

Modélisation d'un empilement de matériaux dans le domaine fréquentiel par une condition d'impédance d'ordre élevé

Pierre Payen

▶ **To cite this version:**

Pierre Payen. Modélisation d'un empilement de matériaux dans le domaine fréquentiel par une condition d'impédance d'ordre élevé. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université Paris-Nord - Paris XIII, 2020. Français. NNT : 2020PA131050 . tel-03269504v2

HAL Id: tel-03269504
https://cea.hal.science/tel-03269504v2

Submitted on 3 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Doctorale 146
« Sciences, Technologies, Santé – Galilée »

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques Appliquées

présentée par

Pierre PAYEN

Modélisation d'un empilement de matériaux dans le domaine fréquentiel par une condition d'impédance d'ordre élevé

---

dirigée par

P^r^ Olivier LAFITTE (LAGA/Université Sorbonne Paris Nord)
et D^r^ Bruno STUPFEL (CEA)

Soutenue le 16/12/2020 devant le jury composé de :

P^r^	Marion Darbas	LAGA	Président
P^r^	Hélène Barucq	INRIA	Rapporteur
P^r^	Xavier Antoine	IECL/Université de Lorraine	Rapporteur
P^r^	Laurence Halpern	LAGA	Examinateur
D^r^	Bérangère Delourme	LAGA	Examinateur
D^r^	Paul Soudais	Dassault Aviation	Examinateur
P^r^	Olivier Lafitte	LAGA	Directeur
D^r^	Bruno Stupfel	CEA	Encadrant CEA

LAGA - UMR 7539
Université Sorbonne Paris Nord
99 avenue Jean Baptiste Clément
93430 Villetaneuse

École doctorale 146 « Sciences, Technologies, Santé – Galilée »
Université Sorbonne Paris Nord
99 avenue Jean Baptiste Clément
93430 Villetaneuse

Modélisation d'un empilement de matériaux dans le domaine fréquentiel par une condition d'impédance d'ordre élevé

Résumé

Nous considérons le problème de la diffraction électromagnétique d'un objet modélisé par une condition d'impédance d'ordre élevée(CIOE) en régime harmonique. L'originalité de cette thèse est l'établissement de nouvelles conditions suffisantes d'unicité (CSU) pour calculer les coefficients de ces conditions aux limites. Ces CSU garantissent l'unicité des solutions du problème des équations de Maxwell harmoniques. Afin d'exprimer l'opérateur de Calderón qui lie les traces tangentielles des champs électromagnétiques à la surface extérieure de l'objet, nous réaliserons des approximations locales de ce dernier par son plan tangent, par un cylindre infini ou par une sphère. Les coefficients de la CIOE sont calculés par minimisation sous contraintes de l'erreur entre l'opérateur de Calderón et son approximation par la CIOE. Cette minimisation est réalisée sur un nombre d'incidences arbitrairement choisies sur lesquelles on calcule l'opérateur de Calderón. Enfin ces CIOE sont implémentées dans un code équation intégrale EFIE-MFIE où les problèmes de discrétisations des opérateurs différentiels de la CIOE seront résolus en réalisant des transformations sur les fonctions de bases des sous-espaces fonctionnels. Cette modélisation est validée sur certains objets d'intérêt par comparaison avec des codes de référence.

Mots-clefs
Électromagnétisme (EM), Impédance, Conditions suffisantes d'unicité (CSU), Optimisation sous contraintes, Surface équivalente radar (SER), Méthode aux éléments finis (FEM), Équations intégrales (EFIE, MFIE)

Simulation of a coated objet in the frequency domain by a high order impedance boundary condition

Abstract

We consider the problem of the electromagnetic diffraction of an object modeled by a high order impedance boundary condition (HOIBC) in harmonic regime. The originality of this thesis is the exhibition of new sufficient uniqueness conditions (SUC) to compute the coefficients of these boundary conditions. These SUC guarantee the uniqueness of the harmonic Maxwell's equations solutions. In order to express the Calderón operator that binds the tangential traces of the electromagnetic fields on the outer surface of the object, we will perform local approximations of the latter by its tangent plane, by an infinite cylinder or by a sphere. The HOIBC's coefficients are then calculated by a constrained optimization problem, which minimizes the error

between the Calderón operator and its approximation by the HOIBC. This minimization is performed on an arbitrary number of arbitrarily chosen incidences angles on which the Calderón operator is computed. Finally, these HOIBC are implemented in an integral equation EFIE-MFIE code where the discretization problems of the differential operators of the HOIBC will be solved by performing transformations on the basis functions of the functional subspaces. This modeling is validated on some objects of interest by comparison with reference codes.

Keywords
Electromagnetism (EM), Impedance, Sufficient uniqueness conditions (SUC), Constrained optimisation, Radar cross section (RCS), Finite element method (FEM), Integral equation (EFIE, MFIE)

Remerciements

Je souhaite remercier les rapporteurs P^r Hélène Barucq et P^r Xavier Antoine pour les remarques et conseils bienveillants dans la rédaction de ce manuscrit. Je remercie aussi les membres du jury, P^r Marion Darbas, P^r Laurence Halpern, D^r Bérangère Delourme et D^r Paul Soudais pour leurs questions pendant la soutenance, elles ont amené de belles discutions. Enfin je remercie mes deux directeurs de thèse.
Bruno, j'en profite aussi pour remercier à travers toi les membres du CEA sans les nommer, car tel est l'usage, je te remercie aussi de la patience dont tu as fait preuve à l'égard de la production de ce manuscrit, je n'ai pas toujours voulu suivre le chemin que tu avais déjà tracé pour me l'approprier. J'ai eu la chance de pouvoir assister grâce au CEA à des conférences passionnantes et de visiter le LMJ (Laser MégaJoule), je recommande à des doctorants qui me liraient d'en profiter, ne serait-ce que par curiosité scientifique.
Olivier, je te remercie, et le mot est trop faible, pour tout ce que tu as apporté à cette thèse. Depuis les cours d'ingénieur de la MACS, j'ai apprécié ta pédagogie, ton enthousiasme, voire ton exubérance. Il fallait suivre ton rythme (dès le premier cours de 2013, où tu t'es toi-même nommé "Bip-Bip Zébulon", je ne permettrai pas que ce surnom tombe dans l'oubli), jusqu'à traverser l'Atlantique où, après de studieuses journées, nous profitions du charme de Montréal. Ça a beaucoup compté. Merci.

Beaucoup de personnes ont contribué, sans le savoir à cette thèse. Merci à vous :
Thomas, Jeanne, Clémence, Édouard, pour ces incroyables soirées au R4ndom, chez nous et chez vous. Tunak Tunak ou Kazoo ? Alex, Isa, Thibault, Benjamin, pour le plaisir des jeux de société au parc Bordelais. Vive le Hannabi, maudite soit ma mémoire. Antho, Ben, Jean, Ptich, Nico, Dadou, Pierre parce que la Compagnie de la Belette vaincra, car c'était quand même une sacrée demi-finale et attend, attend... attend ! Guigui, Noémie, Alexandre, Corentin, quel heureux hasard que cette promo entrante 2010 de la prépa Camille Guérin. En attendant un prochain Freemusic ou nouvel An. Étienne, Baptiste, Claire, Cyrille que j'ai pu revoir quand je remontais à Paris pour les formations doctorales. Thomas, pour t'avoir piégé deux fois pour déménager. La malédiction est levée, quoique... Thomas, pour ses anniversaires aux Écuries. Mi j'repachrai dans ch'Nord Lapin. Juliette, Emilie, pour les soirées SWAG sur Just Dance.
Gentien et Rémi qui m'ont embrigadé dans la section foot, je vous dois quelques courbatures. Thomas, mon correspondant corse LaTeX et Matlab. Paul et Julien, avec qui j'ai enfin pu discuter ondes au milieu de toutes ces couches limites. Mickaël

et Manon que j'ai embrigadés dans la section foot, pour les pique-niques au bord du bassin.

À Florence, Yann, Sarah et Solène, merci pour votre accueil chaleureux.
À mes parents, mes plus grands supporters, merci pour tout. À Ambre et Gabin, je vous souhaite le meilleur dans la vie et je serai toujours là pour vous si besoin.

À Floriane, tout simplement.
$x(t) = 16\sin^3(t), y(t) = 13\cos(t) - 5\cos(2t) - 2\cos(3t) - \cos(4t), \forall t \in [0, 2\pi]$

Informations

Ce manuscrit a été réalisé avec LaTeX 2_ε dont les sources sont disponibles à l'adresse `https://github.com/pirpyn/thesis` et compilent avec l'outil latexmk. Cette version est celle du 17/12/2020.
Un code de calcul numérique des coefficients de CIOE en C++, inspiré par celui développé pendant la thèse, appartenant au CEA et écrit en Fortran, est disponible à l'adresse `https://github.com/pirpyn/choibc`.

Table des matières

Remerciements **v**
Informations vi

Table des figures **ix**

Acronymes et notations **xi**
Acronymes xi
Notations Mathématiques xi
Notations Physiques xii
Opérateurs xiii

Introduction **1**

1 Contexte mathématique global **5**
1.1 Équations de Maxwell à l'intérieur et à l'extérieur de l'objet 6
1.2 Problème de Maxwell à l'extérieur de l'objet avec opérateur de Calderón sur son bord 7
1.3 Problème de Maxwell à l'extérieur de l'objet avec approximation de l'opérateur de Calderón sur son bord 10
1.4 Étude de l'unicité des solutions du problème extérieur avec CIOE sur le bord 12

2 Unicité des solutions de Maxwell **13**
Introduction 14
2.1 Une condition suffisante assurant l'unicité des solutions du problème de Maxwell extérieur 14
2.2 Des CSU pour les CIOE de Stupfel et Poget 2011 17
2.3 Des CSU pour la CIOE de Marceaux et Stupfel 2000 22
2.4 Une CNS pour l'unicité des solutions du problème de Maxwell intérieur 36
Conclusion 40

3 Calcul des coefficients pour un plan infini **41**
Introduction 42
3.1 Analyse de Fourier de l'impédance 42
3.2 Opérateur de Calderón pour un plan 43
3.3 Approximation par une CIOE de l'opérateur de Calderón plan 56

3.4 Choix 1 des coefficients de la CI3 . . . 59
3.5 Choix 2 des coefficients de la CI3 . . . 72
Conclusion . . . 75

4 Calcul des coefficients pour un cylindre infini 77
Introduction . . . 78
4.1 Opérateur de Calderón pour un cylindre infini . . . 78
4.2 Approximation par une CIOE de l'opérateur de Calderón du cylindre 89
4.3 Choix 1 du calcul des coefficients de la CI3 . . . 91
4.4 Choix 2 du calcul des coefficients de la CI3 . . . 93
4.5 Résultats numériques . . . 96
Conclusion . . . 99

5 Calcul des coefficients pour une sphère 101
Introduction . . . 102
5.1 Les harmoniques sphériques vectorielles . . . 102
5.2 Opérateur de Calderón pour une sphère . . . 104
5.3 Approximation par une CIOE de l'opérateur de Calderón de la sphère 113
5.4 Choix 1 du calcul des coefficients de la CI3 . . . 115
5.5 Choix 2 du calcul des coefficients de la CI3 . . . 117
5.6 Résultats numériques . . . 119
Conclusion . . . 120

6 Contribution des CIOE dans une formulation équation intégrale 121
Introduction . . . 122
6.1 Espaces fonctionnels . . . 122
6.2 Équations intégrales . . . 122
6.3 Discrétisation de la surface de l'objet . . . 123
6.4 Fonctions de projections . . . 124
6.5 Matrices de projections . . . 126
6.6 Matrice de changement d'espace . . . 127
6.7 Forme variationnelle des équations intégrales . . . 128
6.8 Contribution de la CIOE dans la discrétisation de la forme variationnelle 128
6.9 Forme finale du système linéaire . . . 131
6.10 Résultats numériques . . . 132

Conclusion 135

Annexes 137
A Liste synthétique des CIOE . . . 137
B Formulation des équations de Maxwell . . . 138
C Opérateurs différentiels surfaciques sur 3 géométries . . . 139
D Solution dans le plan quand k3 = 0 . . . 141
E Solution dans le cylindre quand k3 = 0 . . . 143
F Fonctions de Bessel . . . 145
G Harmoniques sphériques . . . 146
H Courbes de HOPPE 1995 . . . 151
I Espaces Hdiv et Hrot . . . 152

Table des figures

3.1 Partie imaginaire de l'opérateur de Calderón pour une couche plane de matériau issue de Hoppe & Rahmat-Samii p. 33, avec ondes évanescentes 56
3.2 Partie imaginaire de l'opérateur de Calderón pour une couche plane de matériau de P. Soudais p. 11, avec asymptote 56
3.3 Module de l'opérateur de Calderón, comparé avec les approximations CI0, CI01, CI1, CI3 pour une couche plane de matériau de B. Stupfel 64
3.4 Module des coefficients de réflexions exacts, comparé avec les approximations CI0, CI01, CI1, CI3 pour une couche plane de matériau de B. Stupfel 65
3.5 Partie imaginaire de l'opérateur de Calderón, comparé avec les approximations CI0, CI3 pour une couche plane de matériau de Hoppe & Rahmat-Samii, avec ondes évanescentes 66
3.6 Partie imaginaire de l'opérateur de Calderón, comparé avec les approximations CI0, CI3 pour une couche plane de matériau sans pertes de P. Soudais 66
3.7 Partie imaginaire de l'opérateur de Calderón, comparé avec les approximations CI0, CI3 pour une couche plane de matériau sans pertes, avec triple asymptote 67
3.8 Module de la matrice d'impédance pour le matériau M1, perte de précision à cause de la CSU 70
3.9 Partie imaginaire de l'opérateur de Calderón, comparé avec les approximations CI0, CI3, CI3 avec CSU, CI3 avec CSU adaptée pour une couche plane de matériau sans pertes de P. Soudais 71

4.1 Convergence de l'opérateur Calderón du cylindre vers celui du plan quand le rayon augmente. 89
4.2 Partie imaginaire de l'opérateur de Calderón, comparé avec les approximations CI0, CI3, CI6 (calculées avec Jz) pour une couche cylindrique de matériau de Hoppe & Rahmat-Samii. 97
4.3 Partie imaginaire de l'opérateur de Calderón, comparé avec les approximations CI0, CI3, CI6 (calculées avec Jr) pour une couche cylindrique de matériau de Hoppe & Rahmat-Samii. 97

5.1 Convergence de l'opérateur de Calderon de la sphère vers celui du plan112

5.2 Partie imaginaire de l'opérateur de Calderón, comparé avec les approximations CI0, CI3, CI6 (calculées avec Jz) pour une couche sphérique de matériau de Hoppe & Rahmat-Samii. 120

6.1 Conventions de notations de l'élément de référence 123
6.2 Fonctions de Raviart-Thomas 124
6.3 Fonctions de Nédélec 125
6.4 Fonctions de Bendali modifiées 125
6.5 SER monostatique d'un cône-sphère calculée par un code EI 133
6.6 Cône-sphère de longueur 2 mètres et de demi-angle 8 degrés maillé avec 11352 éléments. 133
6.7 SER bistatique d'une sphère calculée par un code EI 133

H.1 Courbes de la page 33 de Hoppe & Rahmat-Samii 1995 151
H.2 Courbes de la page 62 de Hoppe & Rahmat-Samii 1995 152

Acronymes et notations

Acronymes

CEP	conducteur électriquement parfait	36
CI	condition d'impédance	2
CIOE	condition d'impédance d'ordre élevé	2, 12, 17, 36, 122
CL	condition aux limites	7, 10
CSU	condition suffisante d'unicité	2, 12, 17
CSUG	condition suffisante d'unicité générale	17
EDO	équation différentielle ordinaire	45, 78
EDP	équation aux dérivées partielles	44
EFIE	electric field integral equation	123
EI	équation intégrale	2
MFIE	magnetic field integral equation	123
SER	surface équivalente radar	4
SQP	sequential quadratic programming	70

Notations Mathématiques

$H_n^{(2)}(z)$	fonction de Hankel du 2eme type de degré n	8
$J_n(z)$	fonction de Bessel du 1er ordre de degré n	8
$\hat{u}$	transformée de Fourier de u	7
Γ	frontière de Ω	xii, 6, 7, 14, 122
$\mathrm{H}_{\mathrm{div}}$	espace de Sobolev des fonctions de divergence intégrable	152
$\mathrm{H}_{\mathrm{rot}}$	espace de Sobolev des fonctions de rotationnel intégrable	152

$\mathbf{M}$	Une matrice. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$	39
$\hat{\mathbf{Z}}$	Symbole de Fourier de l'opérateur de Calderón, matrice d'impédance	7
Ω	domaine, objet	6, 14
$\mathbb{P}_n^m(x)$	fonction de Legendre d'ordre m et de degré n	102
tilde	$\widetilde{f}(z) = \dfrac{\mathrm{d}(zf(z))}{\mathrm{d}z}$	9, 102
$\vec{n}$	normale unitaire sortante de Ω	xii, 6, 7, 14, 12
$\vec{x}$	point de Ω	6, 122
(x_1, x_2, x_3)	coordonnées cartésiennes de $\vec{x}$	124
(r, θ, z)	coordonnées cylindrique de $\vec{x}$	78
(r, θ, ϕ)	coordonnées sphérique de $\vec{x}$	102

Notations Physiques

c	célérité de la lumière $c = 2.99792458\,10^8$ $[m.s^{-1}]$	xii, 6, 14
$\vec{E}$	champ électrique $[V.m^{-1}]$	6, 14, 42, 80, 122
ϵ	permittivité relative complexe [1]	xii, 6, 43
ϵ_0	permittivité du vide $[F.m^{-1}]$	43
η	impédance relative $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ [1]	xii
η_0	impédance du vide $\eta_0 = 120\pi$ [Ohm]	42
f	fréquence [Hz]	xii
$\vec{H}$	champ magnétique $[A.m^{-1}]$	xii, 42
$\vec{\mathcal{H}}$	excitation magnétique $\vec{\mathcal{H}} = \eta_0 \vec{H}$ $[V.m^{-1}]$	xii, 6, 7, 14, 42, 80, 122
$\vec{J}$	trace tangentielle sur Γ de l'excitation magnétique $\vec{J} = \vec{n} \times \vec{\mathcal{H}}$ $[V.m^{-1}]$	xii, 7, 80, 122
k	nombre d'onde dans le matériau $k = k_0\nu$ $[m^{-1}]$	43
k_0	nombre d'onde dans le vide $k_0 = \dfrac{2\pi f}{c}$ $[m^{-1}]$	xii, 6, 14, 43
$\vec{M_{m,n}}$	vecteur harmonique sphérique d'ordre m et de degré n	103
μ	perméabilité relative complexe [1]	xii, 6, 43
μ_0	perméabilité du vide $[H.m^{-1}]$	43
$\vec{N_{m,n}}$	vecteur harmonique sphérique d'ordre m et de degré n	103

ν	indice relatif du matériau $\nu = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$ [1]	xii
ω	pulsation d'une onde $[s^{-1}]$	6, 14, 42

Opérateurs

$\vec{\nabla}\cdot$	divergent	139
$\vec{\nabla}_s\cdot$	divergent surfacique: $\vec{\nabla}_s \cdot \vec{u} := \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{u}))$	140
$\vec{\nabla}$	gradient	139
$\vec{\nabla}_s$	gradient surfacique : $\vec{\nabla}_s f := \vec{\nabla} f - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{\nabla} f)$	140
$\mathcal{L}$	$= \mathcal{L}_D - \mathcal{L}_R$	10
$\mathcal{L}_D$	$\int_\Gamma \mathcal{L}_D(\vec{u})(x) \cdot \vec{v}(x) \mathrm{d}\Gamma(x) := -\int_\Gamma \vec{\nabla}_s \cdot \vec{u}(x) \vec{\nabla}_s \cdot \vec{v}(x) \mathrm{d}\Gamma(x)$	10, 22, 127, 129
$\mathcal{L}_R$	$\int_\Gamma \mathcal{L}_R(\vec{u})(x) \cdot \vec{v}(x) \mathrm{d}\Gamma(x) := \int_\Gamma \left(\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_s \wedge \vec{u}(x)\right) \left(\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_s \wedge \vec{v}(x)\right) \mathrm{d}\Gamma(x)$	10, 22, 127, 129
Δ	laplacien	147
$\wedge$	produit vectoriel	7
$\vec{\nabla}\wedge$	rotationnel	139
$\vec{\nabla}_s\wedge$	rotationnel surfacique: $\vec{\nabla}_s \wedge \vec{u} := \vec{n}(\vec{n} \cdot \nabla \wedge \vec{u})$	140

Introduction

Contexte industriel

La diffraction des ondes est un problème commun à de nombreux secteurs d'activités : défense, aéronautique, médical, pétrolier. Selon le secteur, la nature des ondes et des matériaux diffère, mais les problématiques sont les mêmes. On étudie souvent la propagation d'une onde autour d'obstacles dans un milieu d'intérêt. Cette onde est émise et réceptionnée à un endroit qui selon le problème est loin ou proche de l'objet. Le problème réel est alors souvent non borné, car les ondes continuent à se propager souvent en dehors du domaine.
Dans le cadre de ses activités dans le domaine de la furtivité radar, le CEA/CESTA développe des codes de calcul simulant avec précision le comportement électromagnétique d'un objet tridimensionnel situé dans le vide, typiquement un conducteur recouvert de matériaux inhomogènes. En régime harmonique, il est éclairé par une onde incidente plane émise par un radar se trouvant très loin de l'objet. Compte tenu de la faible amplitude de l'onde, les phénomènes physiques mis en jeu sont linéaires. Le calcul du champ diffracté par cet objet nécessite la résolution numérique des équations de Maxwell dans le domaine fréquentiel. Des méthodes de résolution dites exactes : formulations variationnelles volumiques ou surfaciques, sont aujourd'hui bien maîtrisées.
Pour les premières, le domaine de calcul incluant l'objet est borné extérieurement par une surface fermée, sur laquelle est implémentée une condition de rayonnement exacte (équation ou représentation intégrale). Le volume intérieur est maillé avec des tétraèdres à l'intérieur desquels les champs électromagnétiques sont représentés par des fonctions de base appropriées (discrétisation par éléments finis volumiques). Pour une fréquence donnée, la résolution des équations de Maxwell est alors ramenée à celle d'un système linéaire matriciel où la solution représente les valeurs discrétisées des champs et le second membre le champ incident. La dimension du système linéaire est de l'ordre de plusieurs centaines de millions pour les objets 3D intéressant le CEA/DAM. La complexité numérique (temps de calcul et taille mémoire) requise pour la résolution précise du système, même si elle est réduite par l'emploi d'une méthode de décomposition de domaines et une parallélisation massive, reste élevée.
Il en est de même pour les méthodes surfaciques faisant intervenir des équations intégrales définies sur la surface de l'objet et sur les interfaces entre les matériaux qui les composent. Après discrétisation pour une méthode d'éléments finis de frontière, ce problème se ramène aussi à un système linéaire où l'inconnue représente alors les valeurs discrétisées des composantes tangentielles des champs sur ces surfaces). Des

études paramétriques (propagation d'incertitudes, variations de la géométrie ou des caractéristiques de l'empilement de matériaux...) nécessitent de très nombreux calculs. Mais se bornant à dégager des tendances, elles requièrent une précision moindre, et des approximations peuvent s'avérer intéressantes. La plus connue consiste à remplacer l'empilement de matériaux par une condition d'impédance (CI) écrite sur la surface extérieure de l'objet : cette CI, implémentée dans une équation intégrale (EI), permet de s'affranchir de la résolution des équations de Maxwell dans les matériaux.
La CI la plus simple (Leontovich) relie par une impédance scalaire les composantes tangentielles du champ électrique à celles du champ magnétique. Elle est strictement locale et ne constitue une bonne approximation que pour des matériaux dont les indices sont suffisamment élevés. Des CI plus performantes, dites conditions d'impédance d'ordre élevé (CIOE), plus ou moins locales, sont proposées dans Hoppe et al. 1995 ; Stupfel 2015. La grande majorité des CIOE ne tient pas compte des courbures et n'est donc valable que dans l'approximation du plan tangent. Mentionnons qu'aucune de ces CI ne modélise correctement une singularité de surface (normale non définie, courbures ou leurs dérivées discontinues) ou une discontinuité de matériaux.
Pour approcher l'opérateur impédance exact, non local, on introduit généralement des dérivées tangentielles multipliées par des coefficients dont les valeurs peuvent être déterminées dans le domaine spectral. Dans ce domaine, les opérateurs différentiels sont remplacés par des opérateurs matriciels d'ordre au moins deux selon la géométrie. Il faut également assurer l'unicité des solutions du problème de Maxwell correspondant.
Les CIOE présentées dans Stupfel et Poget 2011 ; Stupfel 2015 présentent ces deux caractéristiques : les coefficients, optimisés dans le domaine spectral, garantissent des solutions uniques. Implémentées dans des équations intégrales, leur efficacité a été évaluée sur des objets 3D. Une CIOE similaire mais plus performante a été proposée dans Marceaux et al. 2000 et reprise dans Aubakirov 2014 et Soudais 2017.
Il restait à définir les conditions suffisantes d'unicité (CSU) associées.

Plan de la thèse

La finalité de cette thèse est de proposer un modèle permettant de remplacer un empilement de matériaux par une condition aux limites implémentée dans un code équations intégrales, afin de ne pas mailler l'intérieur de l'objet.
Cette condition aux limites fera parti d'une famille connu de conditions aux limites, les conditions d'impédances (Senior et Volakis 1995) qui sont paramétrées par des coefficients complexes.
Ces derniers peuvent être déterminés localement en résolvant un problème de minimisation sous contraintes, ces dernières permettant d'assurer l'unicité des solutions.

Chapitre 1

Ce chapitre présente une condition suffisante qui garantit l'unicité des solutions des équations de Maxwell à l'extérieur de l'objet. Cette condition s'exprime sur sa surface et est satisfaite pour chacune des conditions limites que l'on appliquera à l'objet.

Nous présentons alors des conditions suffisantes sur les coefficients qui impliquent la condition suffisante générale, donc qui garantissent l'unicité des solutions. Nous en présentons plusieurs par CIOE pour marquer le caractère suffisant de ces conditions, puis nous définirons celles conservées et utilisées dans la suite de la thèse. De plus, nous rappellerons aussi l'alternative de Fredholm pour assurer l'unicité du problème intérieur. D'un point de vue pratique, nous présentons une condition simple pour nous assurer que nous pouvons faire la transformée de Fourier des champs, pour dans les chapitres suivants, exprimer l'opérateur d'impédance simplement.

Chapitre 2

Pour calculer les coefficients, sachant les conditions qu'ils doivent vérifier, nous supposons que l'objet est un plan infini. Ce cas d'étude classique permet de calculer exactement la condition d'impédance dans le domaine spectral. Cet opérateur est alors un multiplicateur de Fourier matriciel en fonction de la pulsation ω, de l'empilement des matériaux et des modes de Fourier k_x, k_y associés aux coordonnées cartésiennes tangentielles du plan infini x, y. L'opérateur approché est aussi un multiplicateur de Fourier matriciel dépendant de ω, k_x, k_y et de coefficients complexes. Le calcul de ces coefficients se fait par optimisation sous contraintes où l'on minimise l'erreur entre ces deux matrices pour plusieurs couples k_x, k_y en utilisant les CSU du premier chapitre comme contraintes.

Chapitre 3

Ce chapitre introduit l'effet d'une courbure dans une direction et est fortement lié au précédent dans sa méthodologie. Sur cette géométrie périodique, l'opérateur d'impédance exact s'exprime dans le domaine spectral comme un multiplicateur de Fourier en fonction de ω, de l'empilement et de la courbure du cylindre, ainsi que des coefficients de Fourier n et du mode de Fourier k_z associés aux coordonnées cylindriques tangentielles du cylindre infini θ, z. L'opérateur approché est aussi un multiplicateur de Fourier matriciel dépendant de ω, n, k_z et de coefficients complexes. Le calcul de ces coefficients se fait par optimisation sous contraintes où l'on minimise l'erreur pour chaque coefficient de Fourier n entre ces deux matrices pour plusieurs k_z en utilisant les CSU du premier chapitre comme contraintes.

Chapitre 4

Ce chapitre introduit l'effet d'une courbure dans deux directions (sphère) et est fortement lié aux deux précédents dans sa méthodologie. Sur cette géométrie périodique et finie, l'opérateur d'impédance exact s'exprime dans le domaine spectral comme un multiplicateur de Fourier matriciel en fonction de ω, r et n. Avec ω l'empilement, r la courbure de la sphère, et n un des coefficients de Fourier, associé à la coordonnée sphérique θ. L'opérateur d'impédance ne dépend pas du coefficient de Fourier m associé à la coordonnée sphérique ϕ. Là encore, une onde plane incidente fait a priori intervenir un nombre infini de coefficients de Fourier n, que l'on tronque pour ne garder que les termes qui sont dans le domaine spectral et qui contribuent significativement. L'opérateur approché est aussi un multiplicateur de Fourier matriciel dépendant de ω, n et de coefficients complexes. Le calcul de ces coefficients se fait

par optimisation sous contraintes où l'on minimise l'erreur pour chaque coefficient de Fourier n entre les opérateurs exact et approché en utilisant les CSU du premier chapitre comme contraintes.

Chapitre 5

Ce chapitre reprend des résultats issus de la littérature sur l'intégration de CIOE dans la résolution des équations de Maxwell par équations intégrales. Dans ces méthodes, les inconnues sont les traces tangentielles des champs sur la surface de l'objet, et les champs s'en déduisent à l'extérieur grâce à une représentation intégrale. La résolution de ces équations intégrales étant basée sur des éléments finis de frontière, nous montrons que les espaces fonctionnels usuels sont insuffisants à cause des opérateurs différentiels contenus dans les CIOE. Nous introduirons alors une méthode pour poser le problème dans d'autres espaces plus adaptés. Ce nouveau problème est résolu par la méthode des éléments finis de frontières. Les traces des champs obtenus permettent de calculer la surface équivalente radar (SER) de l'objet, quantité d'intérêt pour mesurer sa furtivité.

Chapitre 1

Contexte mathématique global

Sommaire

1.1 Équations de Maxwell à l'intérieur et à l'extérieur de l'objet 6
1.1.1 Étude de l'unicité des solutions du problème intérieur . . 6
1.1.2 Étude de l'unicité des solutions du problème extérieur : Lemme de Rellich 7
1.2 Problème de Maxwell à l'extérieur de l'objet avec opérateur de Calderón sur son bord 7
1.2.1 Expression de l'opérateur de Calderón pour un plan infini en tant que multiplicateur de Fourier 7
1.2.2 Expression de l'opérateur de Calderón pour un cylindre infini 8
1.2.3 Expression de l'opérateur de Calderón pour une sphère . 9
1.3 Problème de Maxwell à l'extérieur de l'objet avec approximation de l'opérateur de Calderón sur son bord . 10
1.3.1 Approximation constante de l'opérateur de Calderón : la condition de Leontovich 10
1.3.2 Approximation de Taylor et Padé : les CIOE 10
1.3.3 Taylor à l'ordre 1 : la CI01 11
1.3.4 Padé à l'ordre 1 :1 : la CI1 11
1.3.5 Padé à l'ordre 1 :1, découplé : la CI3 11
1.3.6 Taylor à l'ordre 1, découplé : la CI4 11
1.4 Étude de l'unicité des solutions du problème extérieur avec CIOE sur le bord 12
1.4.1 Condition suffisante d'unicité (CSU) de la CI0 12
1.4.2 CSU de la CI1 12
1.4.3 CSU de la CI4 12

On s'intéresse à la propagation des ondes électromagnétiques à l'extérieur d'un objet fermé borné, convexe et régulier, sans source. Les champs associés sont solutions des équations de Maxwell harmoniques, la convention dans toute la thèse étant en $e^{i\omega t}$. Soit $\Gamma = \partial\overline{\Omega}$ la frontière de Ω, on décompose donc tout l'espace entre l'intérieur et l'extérieur, soit

$$\mathbb{R}^3 = \overline{\Omega} \cup \Omega^c.$$

On définit en tout point de Γ, supposée régulière, $\vec{n}$ la normale unitaire sortante à Ω. Dans Ω^c on définit $k_0 = \omega/c \in \mathbb{R}_+^*$, le nombre d'onde dans le vide, où c est la célérité d'une onde dans le vide. Dans Ω, on a $k(\vec{x}) = k_0\sqrt{\epsilon(\vec{x})\mu(\vec{x})}$.
Nous utilisons les équations de Maxwell-Helmholtz (Helmholtz car utilisent le nombre d'onde k et non la pulsation ω) où les inconnues sont le champ électrique $\vec{E}$ et l'excitation magnétique $\vec{\mathcal{H}}$, elles se déduisent des équations de Maxwell (voir annexe B).
Soit $(\vec{E}, \vec{\mathcal{H}})$ dans $(\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3) \cap \mathrm{H}_{\mathrm{rot}}(\mathbb{R}^3))^3$ tels que

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{x}) + ik(\vec{x})\vec{\mathcal{H}}(\vec{x}) &= 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{H}}(\vec{x}) - ik(\vec{x})\vec{E}(\vec{x}) &= 0 \end{cases} \qquad \text{dans } \Omega \cup \Omega^c. \tag{1.0.1}$$

De plus, les conditions limites considérées sont les conditions de Silver-Müller à l'infini (voir J.-C. Nédélec 2001, eq (5.2.25), p. 182)

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\vec{E}(r,\theta,\phi) \wedge \vec{e_r} + \vec{\mathcal{H}}(r,\theta,\phi)\right) = 0, \tag{1.0.2}$$

où r, θ, ϕ sont les coordonnées sphérique d'un point de l'espace et $\vec{e_r}$ le vecteur unitaire radial et les conditions de saut sur Γ

$$\begin{aligned} \left[\vec{E}_t(\vec{x})\right]_{|\Gamma} &= 0, \quad \forall \vec{x} \in \Gamma, \\ \left[\vec{\mathcal{H}}_t(\vec{x})\right]_{|\Gamma} &= 0, \quad \forall \vec{x} \in \Gamma. \end{aligned} \tag{1.0.3}$$

1.1 Équations de Maxwell à l'intérieur et à l'extérieur de l'objet

1.1.1 Étude de l'unicité des solutions du problème intérieur

Théorème 1.1. *Si ω^2 n'est pas une valeur propre de $1/(\epsilon\mu)$ Laplacien vectoriel, l'unique solution $\vec{E}, \vec{\mathcal{H}}$ de* (2.4.1) *avec conditions aux limites de conducteur parfait ($n \wedge \vec{E}_{|\Gamma} = 0$), est $(0,0)$. Si $\omega^2\epsilon\mu$ est une valeur propre du Laplacien vectoriel,* (2.4.1) *avec conditions aux limites de Dirichlet ($\vec{E}_{|\Gamma} = 0$) a pour solution tous les vecteurs propres de l'opérateur A introduit par Cessenat 1996, eq. (133), p. 58.*

La preuve s'appuie notamment sur l'alternative de Fredholm, voir Cessenat 1996, Théorème 8, p. 111.

1.1.2 Étude de l'unicité des solutions du problème extérieur : Lemme de Rellich

On définit en tout point de Γ la trace tangentielle de $\vec{\mathcal{H}}$ que l'on note $\vec{J} = \vec{n}_\Gamma \wedge \vec{\mathcal{H}}$.

Proposition 1.2 (Une condition suffisante d'unicité)**.**
Si l'on suppose que

$$\mathrm{Re}\left(\int_\Gamma \vec{J}(\vec{x}) \cdot \overline{\vec{E}_t}(\vec{x}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{x})\right) \geq 0, \tag{1.1.1}$$

alors le système (1.0.1) *(sans source) muni de la condition aux limites* (2.1.2) *admet* $\vec{E} = \vec{\mathcal{H}} = 0$ *comme unique solution.*

Démonstration. La démonstration s'appuie sur le lemme de Rellich, énoncé dans Cessenat 1996, p. 74 et nous renvoyons à la proposition 2.1.3 du prochain chapitre pour le détail des opérations.

□

1.2 Problème de Maxwell à l'extérieur de l'objet avec opérateur de Calderón sur son bord

L'opérateur de Calderón (Cessenat 1996, Def 4, p. 108), lie les traces tangentielles à la surface extérieure de l'objet des champs solutions du problème intérieur et extérieur.
À un couple de domaines ouverts (Ω, Ω^c) et à deux problèmes de type Maxwell (1.0.1) dans chacun des ouverts, est associé un unique opérateur de Calderón.
En imposant sur le bord extérieur de l'objet une condition aux limites (CL) utilisant cet opérateur, alors les solutions $(\vec{E}, \vec{\mathcal{H}})$ de ce nouveau problème posé uniquement à l'extérieur sont la restriction dans le domaine extérieur des solutions du problème global, posé à l'intérieur et extérieur.
L'unicité des solutions est assurée par le lemme de Rellich, avec la même condition suffisante d'unicité de la proposition 1.1.1, que l'on peut aussi exprimer à l'aide de l'opérateur de Calderón.

1.2.1 Expression de l'opérateur de Calderón pour un plan infini en tant que multiplicateur de Fourier

Remark 1.3. *Dans ce masnuscrit, nous notons pour tout z complexe, sa racine $\sqrt{z}$ le complexe de partie réelle positive.*

Pour une couche d'épaisseur d de matériau diélectrique de constante relative ϵ, μ et donc de nombre d'onde complexe $k = k_0\sqrt{\epsilon\mu}$ et d'impédance relative $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$, l'opérateur de Calderón s'exprime en Fourier (nous choisissons la notation $\hat{u}$ pour désigner la transformée de u) comme un multiplicateur matriciel en (k_x, k_y), supposant $\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \neq 0$,

$$\hat{\mathbf{Z}}(k_x, k_y) = i\eta \frac{\tan\left(d\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}\right)}{k\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} \begin{bmatrix} k^2 - k_x^2 & -k_x k_y \\ -k_x k_y & k^2 - k_y^2 \end{bmatrix}.$$

Notons que nous n'oublierons pas de considérer les cas où il y a des ondes évanescentes, quand la partie imaginaire de $\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$ devient grande. La présentation théorique que nous avons fait ne traite pas ce cas, même si les calculs numériques ont été faits dans des cas d'ondes évanescentes, y compris pour ϵ, μ réels.
Notons ici que nous généralisons l'emploi du nom "opérateur de Calderón" dans ce cas, même si la couche de matériau diélectrique n'est pas un ouvert borné. Nous adopterons cette convention dans toute cette thèse.
La démonstration de ce calcul, ainsi que son extension à un nombre arbitraire de couches est l'objet du chapitre 3.
On remarque que l'opérateur de Calderón n'est pas un opérateur aux dérivées partielles puisque son multiplicateur de Fourier fait intervenir le complexe $\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$, qui n'est pas un polynôme en (k_x, k_y) et donc, par transformée inverse de Fourier ne peut s'exprimer avec les opérateurs $\partial/\partial x, \partial/\partial y$. Par contre, on peut approcher cet opérateur par un polynôme en (k_x, k_y), voire par une fraction de polynômes, et les CIOE sont issues de cette approximation. Par exemple si on approche ce multiplicateur de Fourier par le quotient $\frac{Q(k_x,k_y)}{R(k_x,k_y)}$, l'égalité $\hat{v}(k_x, k_y) = \frac{Q(k_x,k_y)}{R(k_x,k_y)}\hat{u}(k_x, k_y)$ se réécrit (même s'il faut des résultats supplémentaires pour que la formulation qui suit lui soit équivalente) $R(k_x, k_y)\hat{v}(k_x, k_y) = Q(k_x, k_y)\hat{u}(k_x, k_y)$, qui après transformée de Fourier inverse relie u et v via des opérateurs différentiels.
Cette thèse ne fera cependant qu'utiliser des CIOE déjà écrites. Nous renvoyons par exemple à Senior et Volakis 1995 pour ce problème.

1.2.2 Expression de l'opérateur de Calderón pour un cylindre infini

Soit $J_n(z)$ la fonction de Bessel de première espèce et $H_n^{(2)}(z)$ la fonction de Hankel de deuxième espèce, et $J_n', H_n^{(2)\prime}$ leur dérivée respectives.
Pour un cylindre de rayon r_0 recouvert d'une couche d'épaisseur d (on note $r_1 = r_0 + d$) de matériau diélectrique de constante relative ϵ, μ et donc de nombre d'onde complexe $k = k_0\sqrt{\epsilon\mu}$ et d'impédance relative $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$, l'opérateur de Calderón s'exprime en tant que multiplicateur de Fourier matriciel en (n, k_z) où n est l'indice d'un coefficient de série de Bessel (qui est une série de Fourier sur θ) et k_z est la variable de Fourier associée à la transformée de Fourier partielle en z.
La démonstration des formules qui suivent, ainsi que leur extension à un nombre arbitraire de couches est l'objet du chapitre 4.

1.2.2.1 Expression de l'opérateur de Calderón quand $k_z = 0$

Le cas de l'incidence perpendiculaire à l'axe du cylindre simplifie grandement les calculs, car le multiplicateur de Fourier de l'opérateur de Calderón est alors diagonal :

$$(\hat{\mathbf{Z}}_n(0))_{11} = -i\eta\frac{(H_n^{(2)\prime})(kr_1)J_n'(kr_0) - J_n{}'(kr_1)(H_n^{(2)})'(kr_0)}{H_n^{(2)}(kr_1)J_n'(kr_0) - J_n(kr_1)(H_n^{(2)})'(kr_0)},$$
$$(\hat{\mathbf{Z}}_n(0))_{12} = 0,$$
$$(\hat{\mathbf{Z}}_n(0))_{21} = 0,$$

$$(\hat{\mathbf{Z}}_n(0))_{22} = i\eta \frac{H_n^{(2)}(kr_1)J_n(kr_0) - J_n(kr_1)H_n^{(2)}(kr_0)}{(H_n^{(2)})'(kr_1)J_n(kr_0) - J_n'(kr_1)H_n^{(2)}(kr_0)}.$$

1.2.2.2 Expression de l'opérateur de Calderón pour k_z quelconque

On pose $k_3 = \sqrt{k^2 - k_z^2}$ que l'on suppose non nul.
L'opérateur $\hat{\mathbf{Z}}_n(k_z)$ est alors

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{Z}}_n(k_z)_{11} = & -i\eta \frac{k}{k_3} \frac{(H_n^{(2)})'(k_3r_1)J_n'(k_3r_0) - J_n{}'(k_3r_1)(H_n^{(2)})'(k_3r_0)}{H_n^{(2)}(k_3r_1)J_n'(k_3r_0) - J_n(k_3r_1)H_n^{(2)\prime}(k_3r_0)} \\
& + i\eta \frac{n^2k_z^2}{k^2k_3^2r_1^2} \frac{H_n^{(2)}(k_3r_1)J_n(k_3r_0) - J_n(k_3r_1)H_n^{(2)}(k_3r_0)}{H_n^{(2)\prime}(k_3r_1)J_n(k_3r_0) - J_n'(k_3r_1)H_n^{(2)}(k_3r_0)}, \\
\hat{\mathbf{Z}}_n(k_z)_{12} = & -i\eta \frac{nk_z}{kk_3r_1} \frac{H_n^{(2)}(k_3r_1)J_n(k_3r_0) - J_n(k_3r_1)H_n^{(2)}(k_3r_0)}{H_n^{(2)\prime}(k_3r_1)J_n(k_3r_0) - J_n'(k_3r_1)H_n^{(2)}(k_3r_0)}, \\
\hat{\mathbf{Z}}_n(k_z)_{21} = & -i\eta \frac{nk_z}{kk_3r_1} \frac{H_n^{(2)}(k_3r_1)J_n(k_3r_0) - J_n(k_3r_1)H_n^{(2)}(k_3r_0)}{H_n^{(2)\prime}(k_3r_1)J_n(k_3r_0) - J_n'(k_3r_1)H_n^{(2)}(k_3r_0)}, \\
\hat{\mathbf{Z}}_n(k_z)_{22} = & \, i\eta \frac{k_3}{k} \frac{H_n^{(2)}(k_3r_1)J_n(k_3r_0) - J_n(k_3r_1)H_n^{(2)}(k_3r_0)}{H_n^{(2)\prime}(k_3r_1)J_n(k_3r_0) - J_n'(k_3r_1)H_n^{(2)}(k_3r_0)}.
\end{aligned}$$

Comme pour le plan, notons que nous n'oublierons pas de considérer les cas où la partie imaginaire de $\sqrt{k^2 - k_z}$ devient grande, même si la présentation théorique que nous avons fait ne traite pas de ce cas.
On remarque que ces valeurs ne changent pas si on prend n'importe quel couple de solutions linéairement indépendantes de l'équation de Bessel.
Notons aussi que nous avons parlé d'opérateur de Calderón, même si le cylindre infini n'est pas borné.

1.2.3 Expression de l'opérateur de Calderón pour une sphère

Soit j_n la fonction de Bessel sphérique de première espèce et $h_n^{(2)}$ la fonction de Hankel sphérique de deuxième type.
On utilise la notation tilde pour désigner les dérivées de ces fonctions telles que $\widetilde{f}(z) = \dfrac{\mathrm{d}(zf(z))}{\mathrm{d}z}$.
Pour une sphère de rayon r_0 recouverte d'une couche d'épaisseur d (on pose $r_1 = r_0 + d$) de matériau diélectrique de constantes relatives ϵ, μ et donc de nombre d'onde complexe $k = k_0\sqrt{\epsilon\mu}$ et d'impédance relative $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$, l'opérateur de Calderón s'exprime en tant que multiplicateur matriciel de Fourier sur les termes en série de Mie.

$$\begin{aligned}
(\hat{\mathbf{Z}}_n)_{11} &= i\eta kr_1 \frac{h_n^{(2)}(kr_1)j_n(kr_0) - j_n(kr_1)h_n^{(2)}(kr_0)}{\widetilde{h_n^{(2)}}(kr_1)j_n(kr_0) - \widetilde{j_n}(kr_1)h_n^{(2)}(kr_0)}, \\
(\hat{\mathbf{Z}}_n)_{12} &= 0, \\
(\hat{\mathbf{Z}}_n)_{21} &= 0,
\end{aligned}$$

$$(\hat{\mathbf{Z}}_n)_{22} = i\frac{\eta}{kr_1}\frac{\widetilde{h_n^{(2)}}(kr_1)\widetilde{j_n}(kr_0) - \widetilde{j_n}(kr_1)\widetilde{h_n^{(2)}}(kr_0)}{h_n^{(2)}(kr_1)\widetilde{j_n}(kr_0) - j_n(kr_1)\widetilde{h_n^{(2)}}(kr_0)}.$$

La démonstration de ce calcul, ainsi que son extension à un nombre arbitraire de couches est l'objet du chapitre 5.

1.3 Problème de Maxwell à l'extérieur de l'objet avec approximation de l'opérateur de Calderón sur son bord

Nous cherchons à résoudre le problème de Maxwell extérieur avec condition de Silver-Müller à l'infini et une CL sur le bord de l'objet que nous choisirons. Cette CL est alors à choisir judicieusement si l'on espère que les solutions de ce nouveau problème approchent bien celui du problème extérieur avec opérateur de Calderón.

1.3.1 Approximation constante de l'opérateur de Calderón : la condition de Leontovich

Définie par Leontovich 1948, cette condition d'impédance consiste à approcher l'opérateur de Calderón par un opérateur constant.

$$\hat{\vec{E}}_t = a_0 \hat{\vec{J}}$$

Très facile à mettre en œuvre numériquement, elle est une bonne approximation quelle que soit l'incidence pour des matériaux, dont l'indice relatif $|\sqrt{\epsilon\mu}|$ est grand devant l'unité (Senior 1960, par. 3, p.421-422).
Des choix possibles pour a_0 sont alors

- plan : $a_0 = \hat{\mathbf{Z}}(0,0)_{11}$, pour ce couple (k_x, k_y), l'opérateur est toujours multiple de l'identité.
- cylindre : $a_0 = \hat{\mathbf{Z}}_0(0)_{11}$, $a_0 = \hat{\mathbf{Z}}_0(0)_{22}$ ou une combinaison linéaire des deux. À noter que la courbure est prise en compte comme nous le verons dans le chapitre 4.
- sphère : $a_0 = \hat{\mathbf{Z}}_{0,\,11}$, pour le 1er coefficient de la série de Mie, l'opérateur est toujours multiple de l'identité. Là aussi, on prend en compte les courbures.

1.3.2 Approximation de Taylor et Padé : les CIOE

Comme dit précédemment, les CIOE approchent l'opérateur de Calderón par des opérateurs différentiels surfaciques. Dans le cadre de cette thèse, les opérateurs que nous utiliserons sont

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_D &= \vec{\text{grad}}_s \text{div}_s,\\ \mathcal{L}_R &= \vec{\text{rot}}_s \text{rot}_s,\\ \mathcal{L} &= \mathcal{L}_D - \mathcal{L}_R.\end{aligned}$$

Leurs multiplicateurs de Fourier matriciels associés pour le plan infini sont

$$\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{D}}}(k_x,k_y)=\begin{bmatrix}-k_x^2 & -k_xk_y\\ -k_xk_y & -k_y^2\end{bmatrix},\qquad \hat{\mathbf{L}_{\mathbf{R}}}(k_x,k_y)=\begin{bmatrix}k_y^2 & -k_xk_y\\ -k_xk_y & k_x^2\end{bmatrix}.$$

Soit r_e le rayon de la surface extérieure de l'objet.
Les multiplicateurs de Fourier matriciels associés au cylindre infini sont,

$$\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{D}}n}(k_z)=\begin{bmatrix}-(n/r_e)^2 & -k_zn/r_e\\ -k_zn/r_e & -k_z^2\end{bmatrix},\qquad \hat{\mathbf{L}_{\mathbf{R}}n}(k_z)=\begin{bmatrix}k_z^2 & -k_zn/r_e\\ -k_zn/r_e & (n/r_e)^2\end{bmatrix},$$

et ceux de la sphère sont

$$\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{D}}n}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -n(n+1)/r_e^2\end{bmatrix},\qquad \hat{\mathbf{L}_{\mathbf{R}}n}=\begin{bmatrix}n(n+1)/r_e^2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Le nom des CIOE est local à cette thèse et ne reflète que l'ordre dans lequel elles ont été utilisées, notamment par Stupfel et Poget 2011, puis ici. D'autres ouvrages les désignent autrement, voir Hoppe et al. 1994 ; Senior et Volakis 1995 ; Aubakirov 2014.
Nous désignons la condition de Leontovich par CI0.

1.3.3 Taylor à l'ordre 1 : la CI01

On approche l'égalité caractérisant l'opérateur de Calderón par

$$\vec{E}_t=(a_0\mathcal{I}+a_1\mathcal{L})\vec{J}$$

1.3.4 Padé à l'ordre 1 :1 : la CI1

On approche l'égalité caractérisant l'opérateur de Calderón par

$$(\mathcal{I}+b_1\mathcal{L})\vec{E}_t=(a_0\mathcal{I}+a_1\mathcal{L})\vec{J}$$

1.3.5 Padé à l'ordre 1 :1, découplé : la CI3

On approche l'égalité caractérisant l'opérateur de Calderón par

$$(\mathcal{I}+b_1\mathcal{L}_D-b_2\mathcal{L}_R)\vec{E}_t=(a_0\mathcal{I}+a_1\mathcal{L}_D-a_2\mathcal{L}_R)\vec{J}$$

1.3.6 Taylor à l'ordre 1, découplé : la CI4

On approche l'égalité caractérisant l'opérateur de Calderón par

$$\vec{E}_t=(a_0\mathcal{I}+a_1\mathcal{L}_D-a_2\mathcal{L}_R)\vec{J}$$

1.4 Étude de l'unicité des solutions du problème extérieur avec CIOE sur le bord

Il est bien entendu que pour chaque CIOE, le problème avec une onde incidente conduit *s'il y a unicité*, à une unique solution diffractée dont on espère qu'elle est une approximation de la solution exacte du problème diffracté avec opérateur de Calderón.

Tout le problème est de choisir les paramètres complexes des CIOE, obtenus grâce à des approximations issues de critères physiques (matériaux, courbure et fréquence) mais ne dépendant pas de la solution du problème diffracté calculée avec l'opérateur de Calderón.
Il apparaît donc comme incorrect de considérer des paramètres qui ne permettraient pas d'obtenir une unique solution. Plus exactement, comme on ne connaît pas de condition nécessaire et suffisante d'existence et d'unicité, on se contentera de *garantir* l'unicité de la solution dans des cas plus restreints, ceux de conditions *suffisantes* d'unicité.
S'il n'y a pas unicité, d'après l'alternative de Fredholm pour un problème avec source, on peut ne pas avoir existence. Dans le cas d'une source nulle, l'existence est assurée puisque la solution nulle vérifie toutes les conditions et équations du problème.

Nous allons assurer l'unicité de la solution du problème sans source, c'est-à-dire déterminer des CSU qui piloteront le choix des paramètres, et par linéarité l'unicité du problème avec source est assurée, sans que les CSU ne changent. Elles pourront donc être utilisées même si le problème inclut une onde incidente, par exemple dans le chapitre 6.

Les démonstrations des résultats de cette partie sont l'objet du chapitre 2, ainsi les CSU des autres CIOE. Afin de garantir la proposition 1.1.1, les conditions suivantes permettent de choisir les paramètres des CIOE correspondantes.

1.4.1 Condition suffisante d'unicité (CSU) de la CI0

$$\mathrm{Re}(a_0) \geq 0.$$

1.4.2 CSU de la CI1

$$\mathrm{Re}(a_0) \geq 0, \qquad \mathrm{Re}(a_1) \leq 0.$$

1.4.3 CSU de la CI4

$$\mathrm{Re}(a_0) \geq 0, \qquad \mathrm{Re}(a_1) \leq 0, \qquad \mathrm{Re}(a_2) \leq 0.$$

Chapitre 2

Conditions d'unicité des solutions du problème de Maxwell-Helmholtz

Sommaire

Introduction 14

2.1 Une condition suffisante assurant l'unicité des solutions du problème de Maxwell extérieur 14

2.2 Des CSU pour les CIOE de Stupfel et Poget 2011 17

2.2.1 CSU de la CI0 19

2.2.2 CSU de la CI01 19

2.2.3 CSU de la CI1 20

2.3 Des CSU pour la CIOE de Marceaux et Stupfel 2000 . . 22

2.3.1 CSU pour la CI4 23

2.3.2 CSU pour la CI3 24

2.4 Une CNS pour l'unicité des solutions du problème de Maxwell intérieur 36

2.4.1 Cas général : alternative de Fredholm 36

2.4.2 Simplification de la géométrie pour déduire l'opérateur de Calderón. 36

Conclusion 40

Introduction

Nous présentons ici la contribution principale de la thèse : l'établissement de conditions suffisantes d'unicité des solutions des équations de Maxwell. Nous étendons les travaux entamés par Stupfel et Poget 2011 à une nouvelle condition d'impédance d'ordre élevé, la CI3. L'établissement de CSU pour cette CIOE est intéressant, car comme nous l'observerons dans les chapitres suivants, elle est bien plus performante que les CIOE de Stupfel et Poget 2011.

2.1 Une condition suffisante assurant l'unicité des solutions du problème de Maxwell extérieur

On s'intéresse à la propagation des ondes électromagnétiques à l'extérieur d'un objet fermé borné, sans source. Les champs associés sont solutions des équations de Maxwell harmoniques, la convention dans toute la thèse étant en $e^{i\omega t}$.
Puisque le problème est sans source, nous allons déterminer une condition suffisante qui assure que seuls les champs nuls sont solutions de ce problème.
Soit $\Gamma = \partial\overline{\Omega}$ la frontière de Ω que l'on suppose régulière (au moins $\mathcal{C}^2$), on décompose donc tout l'espace entre l'intérieur et l'extérieur, soit

$$\mathbb{R}^3 = \overline{\Omega} \cup \Omega^c.$$

On définit en tout point de Γ, supposée régulière, $\vec{n}$ la normale unitaire sortante à Ω.
Dans Ω^c on définit $k_0 = \omega/c \in \mathbb{R}_+^*$, le nombre d'onde dans le vide, où c est la célérité d'une onde dans le vide. On s'intéresse à la propagation des ondes électromagnétiques à l'extérieur d'un objet fermé borné, sans source.
Les champs associés sont solutions des équations de Maxwell harmoniques, la convention dans toute la thèse étant en $e^{i\omega t}$.
Nous utilisons les équations de Maxwell-Helmholtz (Helmholtz car utilisent le nombre d'onde k_0 et non la pulsation ω) où les inconnues sont le champ électrique $\vec{E}$ et l'excitation magnétique $\vec{\mathcal{H}}$ dans le vide, elles se déduisent du système d'équations de Maxwell (voir annexe B).
Soit $(\vec{E}, \vec{\mathcal{H}})$ dans $(\mathcal{C}_0^\infty(\Omega^c) \cap \mathrm{H}_{\mathrm{rot}}(\Omega^c))^2$ tels que

$$\text{(2.1.1)} \qquad \begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} + ik_0\vec{\mathcal{H}} &= 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{H}} - ik_0\vec{E} &= 0 \end{cases} \qquad \text{dans } \Omega^c.$$

Pour étudier ce problème numériquement, on se ramène à un ouvert borné de la manière suivante : soit $R \in \mathbb{R}_+^*$ tel que le domaine $\overline{\Omega}$ soit inclus dans B_R, la boule de rayon R. On cherche alors les solutions de (2.1.1) dans $\Omega_R^c = \Omega^c \cap B_R$ avec $\partial\Omega_R^c = \Gamma \cup S_R$, S_R étant la sphère de rayon R où l'on écrit la condition de radiation sortante

$$\text{(2.1.2)} \qquad \mathrm{T_R}(\vec{E}_t) = -\vec{n}_{B_R} \wedge \vec{\mathcal{H}} \quad \text{sur } S_R.$$

$\mathrm{T_R}$ est l'opérateur de capacité introduit par J.-C. Nédélec 2001, p. 200, $\vec{n}_{B_R} = \frac{1}{R}\vec{OM}$ la normale unitaire sortante à B_R.

Proposition 2.1 (Formulation variationnelle du problème de Maxwell extérieur sans source)**.** *Le champ électrique $\vec{E}$, solution du problème* (2.1.1) *sans source muni de la condition* (2.1.2)*, est solution du problème*
Soit $V = \{\vec{u} \in (\mathcal{C}_0^\infty(\Omega_R^c) \cap \mathrm{H}_{\mathrm{rot}}(\Omega_R^c)\}$.
Trouver $\vec{E} \in V$*, tel que*

$$a(\vec{E}, \vec{\phi}) = 0 \qquad\qquad \forall \vec{\phi} \in V,$$

où a est la forme sesquilinéaire donnée par

$$a(\vec{E}, \vec{\phi}) := \frac{1}{ik_0} \int_{\Omega_R^c} \vec{\mathrm{rot}}\vec{E}(\vec{x}) \cdot \vec{\mathrm{rot}}\overline{\vec{\phi}}(\vec{x})\mathrm{d}x + ik_0 \int_{\Omega_R^c} \vec{E}(\vec{x}) \cdot \overline{\vec{\phi}}(\vec{x})\mathrm{d}x$$
$$+ \int_{S_R} \overline{\vec{\phi}}(\vec{x}) \cdot \mathrm{T_R}(\vec{E}_t)(\vec{x})\mathrm{d}S_R(\vec{x}) - \int_\Gamma \left(\vec{n} \wedge \frac{\vec{\mathrm{rot}}\vec{E}(\vec{x})}{ik_0}\right) \cdot \overline{\vec{\phi}}(\vec{x})\mathrm{d}\Gamma(\vec{x}).$$

Démonstration. Sens direct. Nous omettons les dépendances en $\vec{x}$. Partons de la première équation de Maxwell

$$0 = \frac{\vec{\mathrm{rot}}\vec{E}}{ik_0} + \vec{\mathcal{H}}.$$

En appliquant cette égalité à $\vec{\mathrm{rot}}\vec{\phi}$ pour $\vec{\phi} \in V$, on déduit la forme variationnelle

$$0 = \int_{\Omega_R^c} \frac{\vec{\mathrm{rot}}\vec{E}}{ik_0} \cdot \vec{\mathrm{rot}}\overline{\vec{\phi}}\mathrm{d}x + \int_{\Omega_R^c} \vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{\mathrm{rot}}\overline{\vec{\phi}}\mathrm{d}x, \qquad\qquad \forall \vec{\phi} \in V.$$

Utilisons la formule de Green du rotationnel (voir Bladel 2007, eq. (A1.32)) où W est un ouvert bornée de frontière S.

$$\int_W \vec{u} \cdot \vec{\mathrm{rot}}\vec{v}\mathrm{d}x = \int_W \vec{\mathrm{rot}}\vec{u} \cdot \vec{v}\mathrm{d}x + \int_{\partial W} \left(\vec{v} \wedge \vec{u}\right) \cdot \vec{n}_S \mathrm{d}S(x),$$

où $\vec{n}_S$ est la normale unitaire sortante de W. On rappelle que $\vec{n}_\Gamma$ est la normale sortante de Ω et $\vec{n}_{B_R}$ la normale sortante de B_R.

$$0 = \int_{\Omega_R^c} \frac{\vec{\mathrm{rot}}\vec{E}}{ik_0} \cdot \vec{\mathrm{rot}}\vec{\phi}\mathrm{d}x + \int_{\Omega_R^c} \vec{\mathrm{rot}}\vec{\mathcal{H}} \cdot \overline{\vec{\phi}}\mathrm{d}x$$
$$+ \int_{S_R} \left(\overline{\vec{\phi}} \wedge \vec{\mathcal{H}}\right) \cdot \vec{n}_{B_R}\mathrm{d}S_R(x) - \int_\Gamma \left(\overline{\vec{\phi}} \wedge \vec{\mathcal{H}}\right) \cdot \vec{n}_\Gamma \mathrm{d}\Gamma(x), \qquad \forall \vec{\phi} \in V.$$

On utilise la deuxième équation de Maxwell, la condition de rayonnement et on permute les termes de l'intégrale sur Γ

$$0 = \int_{\Omega_R^c} \frac{\vec{\mathrm{rot}}\vec{E}}{ik_0} \cdot \vec{\mathrm{rot}}\overline{\vec{\phi}}\mathrm{d}x + \int_{\Omega_R^c} ik_0\vec{E} \cdot \overline{\vec{\phi}}\mathrm{d}x$$
$$+ \int_{S_R} \mathrm{T_R}(\vec{E}_t) \cdot \overline{\vec{\phi}}\mathrm{d}S_R(x) + \int_\Gamma \left(\vec{n}_\Gamma \wedge \vec{\mathcal{H}}\right) \cdot \overline{\vec{\phi}}\mathrm{d}\Gamma(x), \qquad \forall \vec{\phi} \in V.$$

Réciproque : voir Cessenat 1996, p. 121, section 5, "SCATTERING PROBLEMS BY A DIELECTRIC OBSTACLE". □

Le problème n'a pas de source et l'unique solution du problème (B) si ce dernier est bien posé est $\vec{E} = \vec{\mathcal{H}} = 0$.
On définit en tout point de Γ la trace tangentielle de $\vec{\mathcal{H}}$ que l'on note $\vec{J} = \vec{n}_\Gamma \wedge \vec{\mathcal{H}}$.

Proposition 2.2 (Une condition suffisante d'unicité)**.**
Si l'on suppose que

$$\mathrm{Re}\left(\int_\Gamma \vec{J}(\vec{x}) \cdot \overline{\vec{E}_t}(\vec{x}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{x})\right) \geq 0, \tag{2.1.3}$$

alors le système (2.1.1) *muni de la condition aux limites* (2.1.2) *admet* $\vec{E} = \vec{\mathcal{H}} = 0$ *comme unique solution.*

Démonstration. Pour démontrer cela, on utilise le lemme de Rellich, énoncé dans Cessenat 1996, p. 74 :

Lemme 2.3 (Lemme de Rellich)**.** *Soit Ω^c un domaine connexe, complément d'un domaine borné, et soit u satisfaisant*

$$\Delta u + k^2 u = 0 \qquad \text{dans } \Omega^c, \tag{2.1.4a}$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} |u(\vec{x})|^2 \mathrm{d}S_R(\vec{x}) = 0, \tag{2.1.4b}$$

alors $u = 0$ dans Ω^c.

Démonstration. Voir Cessenat 1996, p. 74. □

On définit les quantités suivantes

$$X = \int_\Gamma \vec{J}(\vec{x}) \cdot \overline{\vec{E}_t}(\vec{x}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}), \tag{2.1.5}$$

$$C = \int_{S_R} \mathrm{T_R}(\vec{E}_t)(\vec{x}) \cdot \overline{\vec{E}_t}(\vec{x}) \mathrm{d}S_R(\vec{x}). \tag{2.1.6}$$

De

$$\begin{aligned} a(\vec{E}, \vec{E}) &= \frac{1}{ik_0} \int_{\Omega_R^c} \left\| \vec{\mathrm{rot}} \vec{E}(\vec{x}) \right\|^2 \mathrm{d}x + ik_0 \int_{\Omega_R^c} \left\| \vec{E}(\vec{x}) \right\|^2 \mathrm{d}x + X + C* \\ &= 0, \end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{Re}(a(\vec{E}, \vec{E})) = 0,$$

ce qui se réecrit

$$\mathrm{Re}(C) + \mathrm{Re}(X) = 0.$$

Comme d'après J.-C. Nédélec 2001, Théorème 5.3.5, p. 200 $\mathrm{Re}(C) \geq 0$, on en déduit

$$\mathrm{Re}(X) \leq 0.$$

L'hypothèse (2.1.3) $\mathrm{Re}(X) \geq 0$ impose alors $\mathrm{Re}(X) = 0$ et donc

$$\mathrm{Re}(C) = 0,$$

donc d'après le théorème 5.3.5 de Nédélec

$$\vec{E}_t = 0 \qquad \text{sur } S_R,$$

et d'après le lemme de Rellich

$$\vec{E} = 0 \qquad \text{dans } \Omega_R^e.$$

On en déduit $\vec{\mathcal{H}} = 0$.
On conclut donc que si on suppose (2.1.3), alors en l'absence de sources le couple $(\vec{E}, \vec{\mathcal{H}}) = (0, 0)$ est l'unique solution, ce qui démontre l'unicité par linéarité. □

2.2 Des conditions suffisantes pour les CIOE de Stupfel et Poget 2011

Nous rappelons que nous avons introduit dans le chapitre 1 l'opérateur de Calderón liant les champs sur la surface extérieure de l'objet.
Nous définissons une CIOE liant $\vec{E}_t$ et $\vec{n} \wedge \vec{\mathcal{H}}$ sur Γ comme une approximation de cet opérateur de Calderón.
Grâce à ces CIOE, nous allons établir des conditions suffisantes qui impliquent la condition suffisante d'unicité générale (CSUG) (2.1.3). Comme ces conditions ne sont que suffisantes, il n'y pas une unique CSU pour une CIOE donnée. La difficulté est d'être capable de juger si une CIOE est satisfaisante, et si ce n'est pas le cas, d'être capable d'en proposer une autre.
Par abus de langage, une CSU peut contenir une ou plusieurs expressions, il est important que ces expressions permettent de déduire la propriété (2.1.3).
Les CIOE de Stupfel et Poget 2011 font intervenir l'opérateur de Hodge $\mathcal{L}$ qui est l'opérateur laplacien vectoriel surfacique, commençons par rappeler son expression et quelques propriétés.
Définissons les opérateurs différentiels surfaciques (voir annexe C), définis sur Γ :

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}_s f(\vec{x}) &= \vec{\nabla} f(\vec{x}) - \vec{n}(\vec{x})(\vec{n}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} f(\vec{x})), \\
\vec{\nabla}_s \cdot \vec{u} &= \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{u}(\vec{x}) - \vec{n}(\vec{x})(\vec{n}(\vec{x}) \cdot \vec{u}(\vec{x}) \right), \\
\vec{\nabla}_s \wedge \vec{u}(\vec{x}) &= \vec{n}(\vec{x}) \left(\vec{n}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{u}(\vec{x}) \right).
\end{aligned}$$

Enfin par abus de notations, nous omettrons tous les dépendances en $\vec{x}$ dans les intégrales $\int_\Gamma f(\vec{x}) \vec{E}(\vec{x}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}) \equiv \int_\Gamma f \vec{E}$.

Définition 2.4.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}: \quad (\mathcal{C}^\infty(\Gamma))^3 &\to (\mathcal{C}^\infty(\Gamma))^3\\ \vec{u} &\mapsto \vec{\nabla}_s\vec{\nabla}_s\cdot\vec{u} - \vec{\nabla}_s\wedge\vec{\nabla}_s\wedge\vec{u}.\end{aligned}$$

Proposition 2.5. *L'opérateur hermitien $\mathcal{L}$ est symétrique négatif.*

Démonstration. Pour tous $\vec{u},\vec{v}\in(\mathcal{C}^\infty(\Gamma))^3$, où Γ n'a pas de bord,

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \vec{u}\cdot\mathcal{L}(\overline{\vec{v}}) &= \int_\Gamma \overline{\vec{v}}\cdot\mathcal{L}(\vec{u}),\\ \int_\Gamma \vec{u}\cdot\mathcal{L}(\overline{\vec{u}}) &= -\left\|\vec{\nabla}_s\cdot\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{\nabla}_s\wedge\vec{u}\right\|^2 \le 0.\end{aligned}$$

□

Proposition 2.6. *Soit $\vec{u}\in V=(\mathcal{C}^\infty(\Gamma))^3, a_0\in\mathbb{C}^*, a_1\in\mathbb{C}$.*
Soit $\mathcal{P}$ l'opérateur de V vers lui-même tel que $\mathcal{P}\vec{u}=(a_0\mathcal{I}+a_1\mathcal{L})\vec{u}$.
Si $\mathrm{Re}(a_0)\ge 0$ et $\mathrm{Re}(a_1)\le 0$ alors l'opérateur $\mathcal{P}$ est injectif sur V.

Démonstration. Soit $\vec{u}\in\operatorname{Ker}\mathcal{P}$. Donc $\mathcal{P}\vec{u}=0$ ce qui implique

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \mathcal{P}\vec{u}\cdot\overline{\vec{u}} &= 0,\\ &= \int_\Gamma (a_0\mathcal{I}+a_1\mathcal{L})\vec{u}\cdot\overline{\vec{u}},\\ &= a_0\left\|\vec{u}\right\|^2 - a_1\left(\left\|\vec{\nabla}_s\cdot\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{\nabla}_s\wedge\vec{u}\right\|^2\right).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(\int_\Gamma \mathcal{P}\vec{u}\cdot\overline{\vec{u}}\right) &= 0,\\ &= \mathrm{Re}(a_0)\left\|\vec{u}\right\|^2 - \mathrm{Re}(a_1)\left(\left\|\vec{\nabla}_s\cdot\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{\nabla}_s\wedge\vec{u}\right\|^2\right).\end{aligned}$$

Or $\mathrm{Re}(a_0)\ge 0$ et $\mathrm{Re}(a_1)\le 0$, donc tous les termes de l'expression précédente sont nuls, donc $\left\|\vec{u}\right\|=0$, donc $\vec{u}=0$. Donc l'opérateur $\mathcal{P}$ est injectif. □

Proposition 2.7. *Soit $\vec{u}\in V=(\mathcal{C}^\infty(\Gamma))^3$.*
Soit $\mathcal{P}$ l'opérateur tel que $\mathcal{P}\vec{u}=(a_0\mathcal{I}+a_1\mathcal{L})\vec{u}$.
Si $\mathrm{Re}(a_0)\ge 0$ et $\mathrm{Re}(a_1)\le 0$ alors l'opérateur $\mathcal{P}$ est bijectif de V.

Démonstration. D'après l'alternative de Fredholm (voir Brezis 1996, Théorème VI.6, p. 92) alors $\mathcal{P}$ est soit non-injectif soit bijectif. D'après la proposition 2.6, comme $\mathrm{Re}(a_0)\ge 0$ et $\mathrm{Re}(a_1)\le 0$, alors il est injectif, donc bijectif. □

On se donne une condition aux limites sur Γ qui dépend d'un nombre fini de coefficients complexes : $\vec{E}_t(\vec{x})=\mathcal{Z}((a_i)_i))(\vec{n}\wedge\vec{\mathcal{H}})(\vec{x})$. On veut trouver des conditions sur ces coefficients $(a_i)_i$ permettant de garantir (2.1.3), et donc assurant que $(\vec{E},\vec{\mathcal{H}})=(0,0)$ est l'unique solution de

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} + ik_0 \vec{\mathcal{H}} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{H}} - ik_0 \vec{E} = 0 \end{cases} && \text{dans } \Omega_R^c, \\
&\mathrm{T_R}(\vec{E}_t) = -\vec{n}_{S_R} \wedge \vec{\mathcal{H}} && \text{sur } S_R, \\
&\vec{E}_t(\vec{x}) = \mathcal{Z}((a_i)_i))(\vec{n}_\Gamma \wedge \vec{\mathcal{H}})(\vec{x}) && \text{sur } \Gamma.
\end{aligned} \tag{2.2.1}
$$

Remark 2.8. *Nous rappelons que nous notons sur* Γ, $\vec{J} = \vec{n}_\Gamma \wedge \vec{\mathcal{H}}$.

2.2.1 CSU de la CI0

Considérons la condition d'impédance de Leontovich, la CI0 caractérisée par

$$\vec{E}_t = a_0 \vec{J} \qquad a_0 \in \mathbb{C}. \tag{2.2.2}$$

Définition 2.9. *On définit le sous-espace fermé de* $\mathbb{C}$

$$\mathrm{CSU_{CI0}} = \{a_0 \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(a_0) \geq 0\}.$$

Proposition 2.10 (Une CSU pour la CI0)**.** *Si*

$$a_0 \in \mathrm{CSU_{CI0}},$$

alors le problème {(2.2.1),(2.2.2)} *a une unique solution.*

Démonstration. Cela découle de $X = \overline{a_0} \left\| \vec{J} \right\|^2$ donc $\mathrm{Re}(X) = \mathrm{Re}(a_0) \left\| \vec{J} \right\|^2$. □

2.2.2 CSU de la CI01

Considérons la condition d'impédance CI01 :

$$\vec{E}_t = (a_0 \mathcal{I} + a_1 \mathcal{L}) \vec{J} \qquad \forall (a_0, a_1) \in \mathbb{C}^2. \tag{2.2.3}$$

Définition 2.11. *On définit le sous-espace fermé de* $\mathbb{C}^2$

$$\mathrm{CSU_{CI01}} = \left\{ (a_0, a_1) \in \mathbb{C}^2, \begin{matrix} \mathrm{Re}\,(a_0) \geq 0 \\ \mathrm{Re}\,(a_1) \leq 0 \end{matrix} \right\}.$$

Proposition 2.12 (Une CSU pour la CI01)**.** *Si*

$$(a_0, a_1) \in \mathrm{CSU_{CI01}},$$

alors le problème {(2.2.1),(2.2.3)} *a une unique solution.*

Démonstration. On a

$$X = \overline{a_0} \left\| \vec{J} \right\|^2 - \overline{a_1} \left(\left\| \vec{\nabla}_s \cdot \vec{J} \right\|^2 + \left\| \vec{\nabla}_s \wedge \vec{J} \right\|^2 \right),$$

donc

$$\mathrm{Re}(X) = \mathrm{Re}\,(a_0) \left\| \vec{J} \right\|^2 - \mathrm{Re}\,(a_1) \left(\left\| \vec{\nabla}_s \cdot \vec{J} \right\|^2 + \left\| \vec{\nabla}_s \wedge \vec{J} \right\|^2 \right).$$

Si l'on suppose $(a_0, a_1) \in \mathrm{CSU_{CI01}}$, tous les termes sont positifs, donc $\mathrm{Re}(X) \geq 0$. □

2.2.3 CSU de la CI1

Considérons la condition d'impédance CI1 :

$$(\mathcal{I}+b\mathcal{L})\vec{E}_t=(a_0\mathcal{I}+a_1\mathcal{L})\vec{J} \qquad \forall(a_0,a_1,b)\in\mathbb{C}^3. \tag{2.2.4}$$

Pour cette CIOE, nous observons qu'il y plusieurs sous-espaces différents, inclus dans $\mathbb{C}^3$ qui conduisent à l'unicité de la solution du problème.
On définit

$$\begin{array}{rccc}\Delta: & \mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C}\\ & (a_0,a_1,b) & \mapsto & a_1-a_0\overline{b}.\end{array} \tag{2.2.5}$$

Par abus de notation, on omet les variables (a_0,a_1,b)

$$\Delta(a_0,a_1,b)\equiv\Delta. \tag{2.2.6}$$

On rappelle la CSU énoncée dans Stupfel et Poget 2011.

Définition 2.13. *On définit le sous-espace de* $\mathbb{C}^3$

$$\mathrm{CSU}^1_{\mathrm{CI1}}=\left\{(a_0,a_1,b)\in\mathbb{C}^3,\ \begin{array}{c}\mathrm{Re}(\Delta)=0\\ \mathrm{Im}(\Delta)\neq 0\\ \mathrm{Im}(\Delta)\,\mathrm{Im}(b)\geq 0\\ \mathrm{Im}(\Delta)\,\mathrm{Im}(a_1\overline{a_0})\geq 0\end{array}\right\}.$$

Remarquons que, grâce à l'égalité

$$\mathrm{Im}\,\Delta\,\mathrm{Im}(a_1\overline{a_0})+|a_0|^2\,\mathrm{Im}\,\Delta\,\mathrm{Im}\,b=(\mathrm{Im}\,\Delta)^2\,\mathrm{Re}\,a_0,$$

on en déduit que $\mathrm{Re}\,a_0\geq 0$ *et on retrouve ainsi une condition classique sur* a_0*, mais qui n'implique pas* $\mathrm{CSU}^1_{\mathrm{CI1}}$.

Proposition 2.14 (Une première CSU pour la CI1)**.** *On a*

$$(a_0,a_1,b)\in\mathrm{CSU}^1_{\mathrm{CI1}}\Rightarrow\mathrm{Re}(X)\geq 0.$$

C'est-à-dire $(a_0,a_1,b)\in\mathrm{CSU}^1_{\mathrm{CI1}}$ *entraîne l'unicité de la solution du problème* {(2.2.1),(2.2.4)}.

Démonstration. On utilise l'identité $\Delta\mathcal{I}=(a_1(\mathcal{I}+\overline{b}\mathcal{L})-\overline{b}(a_0\mathcal{I}+a_1\mathcal{L}))$:

$$\Delta X=\int_\Gamma\left(a_1(\mathcal{I}+\overline{b}\mathcal{L})\vec{J}\right)\cdot\overline{\vec{E}_t}-\left(\overline{b}(a_0\mathcal{I}+a_1\mathcal{L})\vec{J}\right)\cdot\overline{\vec{E}_t}.$$

Comme l'opérateur $\mathcal{L}$ est symétrique,

$$\Delta X=\int_\Gamma\left(a_1(\mathcal{I}+\overline{b}\mathcal{L})\overline{\vec{E}_t}\right)\cdot\vec{J}-\int_\Gamma\left(\overline{b}(a_0\mathcal{I}+a_1\mathcal{L})\vec{J}\right)\cdot\overline{\vec{E}_t}.$$

En utilisant la CI1,

$$\Delta X=\int_\Gamma\left(a_1(\overline{a_0}+\overline{a_1}\mathcal{L})\overline{\vec{J}}\right)\cdot\vec{J}-\int_\Gamma\left(\overline{b}(\mathcal{I}+b\mathcal{L})\vec{E}_t\right)\cdot\overline{\vec{E}_t},$$

$$\Delta X = a_1\overline{a_0}\left\|\vec{J}\right\|^2 - |a_1|^2\left(\left\|\vec{\nabla}_s\cdot\vec{J}\right\|^2 + \left\|\vec{\nabla}_s\wedge\vec{J}\right\|^2\right) - \overline{b}\left\|\vec{E}_t\right\|^2 + |b|^2\left(\left\|\vec{\nabla}_s\cdot\vec{E}_t\right\|^2 + \left\|\vec{\nabla}_s\wedge\vec{E}_t\right\|^2\right).$$

La partie imaginaire de ΔX est

$$\mathrm{Im}(\Delta X) = \mathrm{Im}(a_1\overline{a_0})\left\|\vec{J}\right\|^2 - \mathrm{Im}(\overline{b})\left\|\vec{E}_t\right\|^2.$$

Comme $\mathrm{Re}(\Delta) = 0, \mathrm{Im}(\Delta X) = \mathrm{Im}(\Delta)\,\mathrm{Re}(X)$, alors si $(a_0, a_1, b) \in \mathrm{CSU}^1_{\mathrm{CI1}}$, $\mathrm{Im}(\Delta) \neq 0$ d'où

$$\mathrm{Im}(\Delta)^2\,\mathrm{Re}(X) = \mathrm{Im}(\Delta)\,\mathrm{Im}(a_1\overline{a_0})\left\|\vec{J}\right\|^2 + \mathrm{Im}(\Delta)\,\mathrm{Im}(b)\left\|\vec{E}_t\right\|^2.$$

et tous les termes du membre de droite sont positifs donc $\mathrm{Re}(X) \geq 0$.
Dans le cas $\Delta = 0$, la CIOE s'écrit $(\mathcal{I} + b\mathcal{L})E = a_0(\mathcal{I} + \overline{b}\mathcal{L})\vec{J}$, et on ne peut pas en déduire aisément une condition sur les coefficients a_0 et b.

□

On remarque que

$$\mathrm{CSU}^1_{\mathrm{CI1}} \subset \mathrm{CSU}_{\mathrm{CI01}} \times \mathbb{C}, \tag{2.2.7}$$

$$\mathrm{CSU}^1_{\mathrm{CI1}} \cap (\mathbb{C}^2 \times \{0\}) \subsetneq (\mathrm{CSU}_{\mathrm{CI01}} \times \{0\}). \tag{2.2.8}$$

Autrement dit cette CSU de la CIOE CI1 avec $b = 0$ n'est pas équivalente à la CSU de la CI01. Plus précisément, soit $S = \{(a_0, a_1) \in \mathbb{C}^2; \mathrm{Re}(a_1) = 0\}$, on a

$$\mathrm{CSU}^1_{\mathrm{CI1}} \cap (\mathbb{C}^2 \times \{0\}) = (\mathrm{CSU}_{\mathrm{CI01}} \cap S) \times \{0\}. \tag{2.2.9}$$

Définition 2.15. *On définit le sous-espace de* $\mathbb{C}^3$

$$\mathrm{CSU}^2_{\mathrm{CI1}} = \left\{ (a_0, a_1, b) \in \mathbb{C}^3, \begin{array}{c} \mathrm{Re}(b) \leq 0 \\ \mathrm{Re}\,(a_0) \geq 0 \\ \mathrm{Re}\,(b\overline{a_0} + \overline{a_1}) \leq 0 \\ \mathrm{Re}\,(b\overline{a_1}) \geq 0 \end{array} \right\}.$$

Proposition 2.16 (Une deuxième CSU pour la CI1)**.** *On a*

$$(a_0, a_1, b) \in \mathrm{CSU}^2_{\mathrm{CI1}} \Rightarrow \mathrm{Re}(X) \geq 0.$$

C'est-à-dire $(a_0, a_1, b) \in \mathrm{CSU}^2_{\mathrm{CI1}}$ *entraîne l'unicité de la solution du problème* {(2.2.1),(2.2.4)}.

Démonstration. Comme on suppose $\mathrm{Re}(b) \leq 0$, alors l'opérateur $\mathcal{I} + b\mathcal{L}$ est injectif d'après la propriété 2.6. Donc pour tout $\vec{J}$ dans l'image de $\mathcal{I} + b\mathcal{L}$, il existe un unique $\vec{D}$ tel que

$$(\mathcal{I} + b\mathcal{L})^{-1}\vec{J} = \vec{D}.$$

Donc

$$\begin{aligned} (\mathcal{I} + b\mathcal{L})\vec{E}_t &= (a_0\mathcal{I} + a_1\mathcal{L})\vec{J}, \\ (\mathcal{I} + b\mathcal{L})\vec{E}_t &= (a_0\mathcal{I} + a_1\mathcal{L})(\mathcal{I} + b\mathcal{L})\vec{D}, \\ 0 &= (\mathcal{I} + b\mathcal{L})(\vec{E}_t - (a_0\mathcal{I} + a_1\mathcal{L})\vec{D}). \end{aligned}$$

L'opérateur $\mathcal{I}+b\mathcal{L}$ est injectif donc $\vec{E}_t = (a_0\mathcal{I}+a_1\mathcal{L})\vec{D}$, on en déduit alors $\int_\Gamma \vec{J}\cdot\overline{\vec{E}_t} = \int_\Gamma \vec{J}\cdot(\overline{a_0}\mathcal{I}+\overline{a_1}\mathcal{L})\overline{\vec{D}}$. Comme $\vec{J} = (\mathcal{I}+b\mathcal{L})\vec{D}$, $X = \int_\Gamma (\mathcal{I}+b\mathcal{L})\vec{D}\cdot(\overline{a_0}\mathcal{I}+\overline{a_1}\mathcal{L})\overline{\vec{D}}$. Ainsi, $X = \overline{a_0}\left\|\vec{D}\right\|^2 - (b\overline{a_0}+\overline{a_1})\left(\left\|\vec{\nabla}_s\cdot\vec{D}\right\|^2 + \left\|\vec{\nabla}_s\wedge\vec{D}\right\|^2\right) + b\overline{a_1}\left\|\mathcal{L}\vec{D}\right\|^2$. □

On remarque que

$$\mathrm{CSU}^2_{\mathrm{CI1}} \subset \mathrm{CSU}_{\mathrm{CI01}}\times\{0\} \tag{2.2.10}$$

$$\mathrm{CSU}^2_{\mathrm{CI1}} \cap (\mathbb{C}^2\times\{0\}) = (\mathrm{CSU}_{\mathrm{CI01}}\times\{0\}). \tag{2.2.11}$$

Si $b = 0$ la CIOE CI1 se réduit à la CI01 et la $\mathrm{CSU}^2_{\mathrm{CI1}}$ est donc meilleure que la $\mathrm{CSU}^1_{\mathrm{CI1}}$.

2.3 Des conditions suffisantes pour la CIOE de Marceaux et al. 2000

Soit $V = (\mathcal{C}^\infty(\Gamma))^3$ l'ensemble des champs tangents à Γ exprimé dans le repère cartésien. Exprimé dans le repère local à la surface, les éléments de cette ensemble n'ont pas de composantes normale.

Définition 2.17. *On définit les opérateurs $\mathcal{L}_D$ et $\mathcal{L}_R$ tels que*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_D :\ & V \to V \\
& \vec{u} \mapsto \vec{\nabla}_s\vec{\nabla}_s\cdot\vec{u}, \\
\mathcal{L}_R :\ & V \to V \\
& \vec{u} \mapsto \vec{\nabla}_s\wedge\vec{\nabla}_s\wedge\vec{u}.
\end{aligned}$$

Proposition 2.18. *L'opérateur $\mathcal{L}_D$ est hermitien symétrique négatif et $\mathcal{L}_R$ est hermitien symétrique positif.*

Démonstration. Pour tout $\vec{u}\in V$,

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathcal{L}_D(\vec{u})\cdot\overline{\vec{u}} &= -\left\|\vec{\nabla}_s\cdot\vec{u}\right\|^2, \\
\int_\Gamma \mathcal{L}_R(\vec{u})\cdot\overline{\vec{u}} &= \left\|\vec{\nabla}_s\wedge\vec{u}\right\|^2.
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.19. *Soit $\vec{u}\in V$.*
Soit $\mathcal{P}_D$ l'opérateur tel que $\mathcal{P}_D\vec{u} = (a_0\mathcal{I}+a_1\mathcal{L}_D)\vec{u}$.
Si $\mathrm{Re}(a_0)\geq 0$ et $\mathrm{Re}(a_1)\leq 0$ alors l'opérateur $\mathcal{P}_D$ est injectif sur V.

Proposition 2.20. *Soit $\vec{u}\in V$.*
Soit $\mathcal{P}_R$ l'opérateur tel que $\mathcal{P}_R\vec{u} = (a_0\mathcal{I}-a_2\mathcal{L}_R)\vec{u}$.
Si $\mathrm{Re}(a_0)\geq 0$ et $\mathrm{Re}(a_2)\leq 0$, alors l'opérateur $\mathcal{P}_R$ est injectif sur V.

Proposition 2.21. *Soit* $\vec{u} \in V$.
Soit $\mathcal{P}$ *l'opérateur tel que* $\mathcal{P}\vec{u} = (a_0\mathcal{I} + a_1\mathcal{L}_D - a_2\mathcal{L}_R)\vec{u}$.
Si $\mathrm{Re}(a_0) \geq 0$, $\mathrm{Re}(a_1) \leq 0$ *et* $\mathrm{Re}(a_2) \leq 0$, *alors l'opérateur* $\mathcal{P}$ *est injectif sur* V.

Démonstration. Identique à la démonstration de la propriété 2.6. □

Proposition 2.22. *Soit* Ω *un domaine borné de* $\mathbb{R}^3$, *de surface* Γ *fermée et régulière, de normale unitaire sortante* $\vec{n}$ *et* $\vec{u} \in (\mathcal{C}^\infty(\Gamma))^3$, *alors*

$$\mathcal{L}_R(\mathcal{L}_D(\vec{u})) = \mathcal{L}_D(\mathcal{L}_R(\vec{u})) = 0.$$

Démonstration. Soit (x_1, x_2) un système de coordonnées locales sur Γ.
Soit un vecteur tangent défini en tout point de la surface. On définit une base locale $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{n}$ où $(\vec{u_1}, \vec{u_2})$ sont tangents à Γ et $\vec{n}$ est le vecteur normal unitaire sortant à Γ.

Montrons que $\mathcal{L}_R\mathcal{L}_D = 0$.
D'après Bladel 2007, propriété A3.42, p. 1029, soit $f(x_1, x_2)$ une fonction régulière de Γ dans $\mathbb{C}$, alors $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_s \wedge (\vec{\nabla}_s f(x_1, x_2)) = 0$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_R(\mathcal{L}_D\vec{u}) &= \vec{\nabla}_s \wedge \left(\left(\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_s \wedge \left(\vec{\nabla}_s \left(\vec{\nabla}_s \cdot \vec{u}\right)\right)\right)\vec{n}\right), \\
&= \vec{\nabla}_s \wedge \left(0\vec{n}\right), \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Montrons que $\mathcal{L}_D\mathcal{L}_R = 0$.
D'après Bladel 2007, p. 1029, A3.43, $\vec{\nabla}_s \cdot \vec{\nabla}_s \wedge (f\vec{n}) = 0$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_D(\mathcal{L}_R\vec{u}) &= \vec{\nabla}_s\vec{\nabla}_s \cdot \vec{\nabla}_s \wedge (\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_s \wedge \vec{u})), \\
&= \vec{\nabla}_s 0, \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

2.3.1 CSU pour la CI4

Soit la CIOE que l'on nomme CI4 :

$$\vec{E}_t = (a_0 + a_1\mathcal{L}_D - a_2\mathcal{L}_R)\vec{J}. \tag{2.3.1}$$

Définition 2.23. *On définit le sous-espace fermé de* $\mathbb{C}^3$

$$\mathrm{CSU}_{\mathrm{CI4}} = \left\{ \begin{array}{l} (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{C}^3, \\ \mathrm{Re}(a_0) \geq 0, \\ \mathrm{Re}(a_1) \leq 0, \\ \mathrm{Re}(a_2) \leq 0, \end{array} \right\}.$$

Proposition 2.24 (Une CSU pour la CI4)**.** *On a*

$$(a_0, a_1, a_2) \in \mathrm{CSU}_{\mathrm{CI4}} \Rightarrow \mathrm{Re}(X) \geq 0,$$

ce qui entraîne l'unicité de la solution du problème {(2.2.1),(2.3.1)*}.*

Démonstration. Par définition de X (2.1.5), on a

$$X = \overline{a_0} \left\| \vec{J} \right\|^2 + \overline{a_1} \left\| \vec{\nabla}_s \cdot \vec{J} \right\|^2 - \overline{a_2} \left\| \vec{\nabla}_s \wedge \vec{J} \right\|^2,$$

donc

$$\mathrm{Re}(X) = \mathrm{Re}(\overline{a_0}) \left\| \vec{J} \right\|^2 + \mathrm{Re}(\overline{a_1}) \left\| \vec{\nabla}_s \cdot \vec{J} \right\|^2 - \mathrm{Re}(\overline{a_2}) \left\| \vec{\nabla}_s \wedge \vec{J} \right\|^2.$$

□

Soit $S = \left\{ (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{C}^3; a_1 = a_2 \right\}$. On remarque que

$$\mathrm{CSU}_{\mathrm{CI4}} \cap S = (\mathrm{CSU}_{\mathrm{CI01}} \times \mathbb{C}) \cap S. \tag{2.3.2}$$

Dans le cas $a_1 = a_2$, ((2.2.1),(2.2.3)) et ((2.2.1),(2.3.1)) sont le même problème, et les CSU correspondantes sont les mêmes.

2.3.2 CSU pour la CI3

Soit la CIOE dérivée de celle de Marceaux et al. 2000 que l'on nomme CI3 :

$$(\mathcal{I} + b_1 \mathcal{L}_D - b_2 \mathcal{L}_R) \vec{E}_t = (a_0 \mathcal{I} + a_1 \mathcal{L}_D - a_2 \mathcal{L}_R) \vec{J}. \tag{2.3.3}$$

On remarque que ces CIOE sont égales à une permutation près des coefficients :

$$(\mathcal{I} + b_1 \mathcal{L}_D - b_2 \mathcal{L}_R) \vec{E}_t = (a_0 \mathcal{I} + a_1 \mathcal{L}_D - a_2 \mathcal{L}_R) (\vec{n} \wedge \vec{\mathcal{H}})_t$$

est équivalent à

$$(\mathcal{I} - b_1 \mathcal{L}_R - b_2 \mathcal{L}_D) (\vec{n} \wedge \vec{E})_t = (-a_0 \mathcal{I} + a_1 \mathcal{L}_R - a_2 \mathcal{L}_D) \vec{\mathcal{H}}_t.$$

Par abus de notation, on omet les variables de la fonction Δ (2.2.5) :

$$\Delta(a_0, a_1, b_1) \equiv \Delta_1 = a_1 - a_0 \overline{b_1},$$
$$\Delta(a_0, a_2, b_2) \equiv \Delta_2 = a_2 - a_0 \overline{b_2}.$$

Définition 2.25. *On définit le sous-espace de* $\mathbb{C}^5$

$$\mathrm{CSU}^0_{\mathrm{CI3}} = \left\{ \begin{array}{ll} (a_0,a_1,a_2,b_1,b_2) \in \mathbb{C}^5, & \\ \Delta_1 & \neq 0, \\ \Delta_2 & \neq 0, \\ \mathrm{Re}\,(a_0\overline{a_1}\Delta_1) & \geq 0, \\ \mathrm{Re}\left(\dfrac{\overline{b_1}}{\Delta_1}\right) & \leq 0, \\ \mathrm{Re}\left(\overline{a_0}a_2\left(\dfrac{\overline{b_1}}{\Delta_1}-\dfrac{\overline{b_2}}{\Delta_2}\right)+\dfrac{\overline{a_2}a_1}{\Delta_1}\right) & \leq 0, \\ \mathrm{Re}\left(2\,\mathrm{Re}(b_2)\dfrac{\overline{b_1}}{\Delta_1}-\dfrac{\overline{b_2}^2}{\Delta_2}\right) & \geq 0, \\ \mathrm{Re}\,(a_0\overline{a_2}\Delta_2) & \geq 0, \\ \mathrm{Re}\left(\dfrac{\overline{b_2}}{\Delta_2}\right) & \leq 0, \\ \mathrm{Re}\left(\overline{a_0}a_1\left(\dfrac{\overline{b_1}}{\Delta_1}-\dfrac{\overline{b_2}}{\Delta_2}\right)+\dfrac{\overline{a_1}a_2}{\Delta_2}\right) & \leq 0, \\ \mathrm{Re}\left(2\,\mathrm{Re}(b_1)\dfrac{\overline{b_2}}{\Delta_2}-\dfrac{\overline{b_1}^2}{\Delta_1}\right) & \geq 0, \\ \mathrm{Re}\,(\Delta_1) & = 0, \\ \mathrm{Re}\,(\Delta_2) & = 0, \\ \mathrm{Re}\left(\dfrac{\overline{b_2}}{\Delta_2}-\dfrac{\overline{b_1}}{\Delta_1}\right) & = 0, \end{array} \right\}.$$

Proposition 2.26 (Une première CSU pour la CI3)**.** *On a*

$$(a_0,a_1,a_2,b_1,b_2) \in \mathrm{CSU}^0_{\mathrm{CI3}} \Rightarrow \mathrm{Re}(X) \geq 0,$$

ce qui entraîne l'unicité de la solution du problème {(2.2.1),(2.3.3)*}.*

Démonstration. Soit $\mathcal{L}_3$ l'opérateur

(2.3.4)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 : \ & (\mathcal{C}^\infty(\Gamma))^3 \times (\mathcal{C}^\infty(\Gamma))^3 \to (\mathcal{C}^\infty(\Gamma))^3 \\ & (\vec{E_t},\vec{J}) \mapsto (\mathcal{I}+b_1\mathcal{L}_D-b_2\mathcal{L}_R)\vec{E_t}-(a_0\mathcal{I}+a_1\mathcal{L}_D-a_2\mathcal{L}_R)\vec{J}. \end{aligned}$$

De la condition aux limites sur Γ, on déduit par produit scalaire L^2 avec un certain nombre de vecteurs bien choisis, des égalités qui sont nécessairement vérifiées. On fait cependant remarquer que ces égalités ne permettent pas de revenir à la CL. AInsi on utilise l'identité $\int_\Gamma \overline{\mathcal{L}_3(\vec{E_t},\vec{J})}\cdot\vec{J}\mathrm{d}\Gamma(\vec{x}) = 0$ qui découle de la CI3, et dont on déduit

$$\begin{aligned} (2.3.5)\quad & \int_\Gamma \vec{J}\cdot\overline{\vec{E_t}}\mathrm{d}\Gamma(\vec{x}) + \overline{b_1}\int_\Gamma \vec{J}\cdot\mathcal{L}_D\overline{\vec{E_t}}\mathrm{d}\Gamma(\vec{x}) - \overline{b_2}\int_\Gamma \vec{J}\mathcal{L}_R\overline{\vec{E_t}}\mathrm{d}\Gamma(\vec{x}) \\ & \qquad = \overline{a_0}\left\|\vec{J}\right\|^2 - \overline{a_1}\left\|\vec{\nabla}_s\cdot\vec{J}\right\|^2 - \overline{a_2}\left\|\vec{\nabla}_s\wedge\vec{J}\right\|^2. \end{aligned}$$

On utilise de même $\int_\Gamma \mathcal{L}_3(\vec{E}_t, \vec{J}) \cdot \overline{\vec{E}_t} = 0$,

$$\left\|\vec{E}_t\right\|^2 - b_1 \left\|\vec{\nabla}_s \cdot \vec{E}\right\|^2 - b_2 \left\|\vec{\nabla}_s \wedge \vec{E}_t\right\|^2 \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}) = a_0 \int_\Gamma \vec{J} \cdot \overline{\vec{E}_t} \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}) + a_1 \int_\Gamma \overline{\vec{E}_t} \mathcal{L}_D \vec{J} \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}) - a_2 \int_\Gamma \overline{\vec{E}_t} \cdot \mathcal{L}_R \vec{J} \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}). \tag{2.3.6}$$

On utilise $\int_\Gamma \overline{\mathcal{L}_3(\vec{E}_t, \vec{J})} \cdot \mathcal{L}_R \vec{J} \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}) = 0$,

$$\int_\Gamma \vec{J} \cdot \mathcal{L}_R \overline{\vec{E}_t} \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}) - \overline{b_2} \int_\Gamma \mathcal{L}_R \vec{J} \cdot \mathcal{L}_R \overline{\vec{E}_t} \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}) = \overline{a_0} \left\|\vec{\nabla}_s \wedge \vec{J}\right\|^2 ds - \overline{a_2} \left\|\mathcal{L}_R \vec{J}\right\|^2. \tag{2.3.7}$$

On utilise $\int_\Gamma \mathcal{L}_3(\vec{E}_t, \vec{J}) \cdot \mathcal{L}_R \overline{\vec{E}_t} \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}) = 0$,

$$\left\|\vec{\nabla}_s \wedge \vec{E}_t\right\|^2 - b_2 \left\|\mathcal{L}_R \vec{E}_t\right\|^2 = a_0 \int_\Gamma \overline{\vec{E}_t} \cdot \mathcal{L}_R \vec{J} \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}) - a_2 \int_\Gamma \mathcal{L}_R \overline{\vec{E}_t} \cdot \mathcal{L}_R \vec{J} \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}). \tag{2.3.8}$$

On utilise $\int_\Gamma \overline{\mathcal{L}_3(\vec{E}_t, \vec{J})} \cdot \mathcal{L}_D \vec{J} \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}) = 0$,

$$\int_\Gamma \vec{J} \cdot \mathcal{L}_D \overline{\vec{E}_t} \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}) + \overline{b_1} \int_\Gamma \mathcal{L}_D \vec{J} \cdot \mathcal{L}_D \overline{\vec{E}_t} \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}) = -\overline{a_0} \left\|\vec{\nabla}_s \cdot \vec{J}\right\|^2 + \overline{a_1} \left\|\mathcal{L}_D \vec{J}\right\|^2. \tag{2.3.9}$$

On utilise $\int_\Gamma \mathcal{L}_3(\vec{E}_t, \vec{J}) \cdot \mathcal{L}_D \overline{\vec{E}_t} \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}) = 0$,

$$-\left\|\vec{\nabla}_s \cdot \vec{E}_t\right\|^2 + b_1 \left\|\mathcal{L}_D \vec{E}_t\right\|^2 = a_0 \int_\Gamma \overline{\vec{E}_t} \cdot \mathcal{L}_D \vec{J} \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}) + a_1 \int_\Gamma \mathcal{L}_D \overline{\vec{E}_t} \cdot \mathcal{L}_D \vec{J} \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}). \tag{2.3.10}$$

On note

$$Y_D = \int_\Gamma \vec{J} \cdot \mathcal{L}_D \overline{\vec{E}_t} \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}), \qquad Y_R = \int_\Gamma \vec{J} \cdot \mathcal{L}_R \overline{\vec{E}_t} \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}),$$
$$Z_D = \int_\Gamma \mathcal{L}_D \vec{J} \cdot \mathcal{L}_D \overline{\vec{E}_t} \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}), \qquad Z_R = \int_\Gamma \mathcal{L}_R \vec{J} \cdot \mathcal{L}_R \overline{\vec{E}_t} \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}).$$

Les 4 égalités (2.3.5) à (2.3.8) sont équivalentes au système

$$\mathbf{M}_R X_R = F_R,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \overline{b_1} & -\overline{b_2} & 0 \\ a_0 & a_1 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\overline{b_2} \\ 0 & 0 & a_0 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y_D \\ Y_R \\ Z_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{a_0} \left\|\vec{J}\right\|^2 - \overline{a_1} \left\|\vec{\nabla}_s \cdot \vec{J}\right\|^2 - \overline{a_2} \left\|\vec{\nabla}_s \wedge \vec{J}\right\|^2 \\ \left\|\vec{E}_t\right\|^2 - b_1 \left\|\vec{\nabla}_s \cdot \vec{E}\right\|^2 - b_2 \left\|\vec{\nabla}_s \wedge \vec{E}_t\right\|^2 \\ \overline{a_0} \left\|\vec{\nabla}_s \wedge \vec{J}\right\|^2 - \overline{a_2} \left\|\mathcal{L}_R \vec{J}\right\|^2 \\ \left\|\vec{\nabla}_s \wedge \vec{E}_t\right\|^2 - b_2 \left\|\mathcal{L}_R \vec{E}_t\right\|^2 \end{bmatrix},$$

et les 4 égalités (2.3.5),(2.3.6),(2.3.9),(2.3.10) sont équivalentes au système

$$\mathbf{M}_D X_D = F_D,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\overline{b_2} & \overline{b_1} & 0 \\ a_0 & -a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \overline{b_1} \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y_R \\ Y_D \\ Z_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{a_0} \left\| \vec{J} \right\|^2 - \overline{a_1} \left\| \vec{\nabla}_s \cdot \vec{J} \right\|^2 - \overline{a_2} \left\| \vec{\nabla}_s \wedge \vec{J} \right\|^2 \\ \left\| \vec{E}_t \right\|^2 - b_1 \left\| \vec{\nabla}_s \cdot \vec{E} \right\|^2 - b_2 \left\| \vec{\nabla}_s \wedge \vec{E}_t \right\|^2 \\ -\overline{a_0} \left\| \vec{\nabla}_s \cdot \vec{J} \right\|^2 ds + \overline{a_1} \left\| \mathcal{L}_R \vec{J} \right\|^2 \\ - \left\| \vec{\nabla}_s \cdot \vec{E}_t \right\|^2 + b_1 \left\| \mathcal{L}_R \vec{E}_t \right\|^2 \end{bmatrix}.$$

Le déterminant de ces matrices triangulaires par blocs est $\Delta_1 \Delta_2$. Dans le cas où

$$\Delta_1 \Delta_2 \neq 0, \tag{2.3.11}$$

elles sont inversibles et on a alors leurs inverses

$$\mathbf{M}_R^{-1} = \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2} \begin{bmatrix} a_1\Delta_2 & -\overline{b_1}\Delta_2 & a_2(a_1\overline{b_2} - a_2\overline{b_1}) & -\overline{b_2}(a_1\overline{b_2} - a_2\overline{b_1}) \\ -a_0\Delta_2 & \Delta_2 & a_2\Delta_2 & -\overline{b_2}\Delta_2 \\ 0 & 0 & a_2\Delta_1 & -\overline{b_2}\Delta_1 \\ 0 & 0 & a_0\Delta_1 & -\Delta_1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_D^{-1} = \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2} \begin{bmatrix} a_2\Delta_1 & -\overline{b_2}\Delta_1 & a_1(a_1\overline{b_2} - a_2\overline{b_1}) & -\overline{b_1}(a_1\overline{b_2} - a_2\overline{b_1}) \\ a_0\Delta_1 & -\Delta_1 & a_1\Delta_1 & -\overline{b_1}\Delta_1 \\ 0 & 0 & a_1\Delta_2 & -\overline{b_1}\Delta_2 \\ 0 & 0 & -a_0\Delta_2 & \Delta_2 \end{bmatrix}.$$

On déduit alors les vecteurs X_D et X_R en fonction des normes présentes dans F_D et F_R, et donc pour chacun de ces vecteurs, on a une expression de X, $X = (\mathbf{M}_R^{-1} F_R)_1$ et $X = (\mathbf{M}_D^{-1} F_D)_1$.
Cette dernière quantité est une combinaison linéaire de toutes les normes rencontrées, donc $X = A_{D/R} \left\| \vec{J} \right\|^2 + B_{D/R} \left\| \vec{\nabla}_s \cdot \vec{J} \right\|^2 + \ldots$ Une condition suffisante pour que la partie réelle de X soit positive est d'avoir les parties réelles des constantes $A_{D/R}, B_{D/R} \ldots$ positives.
On pose $\Theta = \dfrac{\overline{b_1}}{\Delta_1} - \dfrac{\overline{b_2}}{\Delta_2} = -\dfrac{(a_1\overline{b_2} - a_2\overline{b_1})}{\Delta_1 \Delta_2}$.
En résolvant le système $\mathbf{M}_R X_R = F_R$, on obtient,

$$\begin{aligned} X = \frac{a_1}{\Delta_1} & \left(\overline{a_0} \left\| \vec{J} \right\|^2 - \overline{a_1} \left\| \vec{\nabla}_s \cdot \vec{J} \right\|^2 - \overline{a_2} \left\| \vec{\nabla}_s \wedge \vec{J} \right\|^2 \right) \\ & - \frac{\overline{b_1}}{\Delta_1} \left(\left\| \vec{E}_t \right\|^2 - b_1 \left\| \vec{\nabla}_s \cdot \vec{E} \right\|^2 - b_2 \left\| \vec{\nabla}_s \wedge \vec{E}_t \right\|^2 \right) \\ & + a_2 \frac{(a_1\overline{b_2} - a_2\overline{b_1})}{\Delta_1 \Delta_2} \left(\overline{a_0} \left\| \vec{\nabla}_s \wedge \vec{J} \right\|^2 - \overline{a_2} \left\| \mathcal{L}_R \vec{J} \right\|^2 \right) \\ & - \overline{b_2} \frac{(a_1\overline{b_2} - a_2\overline{b_1})}{\Delta_1 \Delta_2} \left(\left\| \vec{\nabla}_s \wedge \vec{E}_t \right\|^2 - b_2 \left\| \mathcal{L}_R \vec{E}_t \right\|^2 \right). \end{aligned}$$

Les conditions suivantes garantissent que $\mathrm{Re}(X) \geq 0$.

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\overline{a_0} a_1}{\Delta_1} \right) \geq 0, \tag{2.3.12}$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\overline{b_1}}{\Delta_1}\right) \leq 0, \tag{2.3.13}$$

$$\mathrm{Re}\left(\overline{a_0}a_2\Theta + \frac{\overline{a_2}a_1}{\Delta_1}\right) \leq 0, \tag{2.3.14}$$

$$\mathrm{Re}\left(\overline{b_2}\Theta + \frac{\overline{b_1}b_2}{\Delta_1}\right) \geq 0, \tag{2.3.15}$$

$$\mathrm{Re}\left(|a_1|^2\Delta_1\right) \leq 0, \tag{2.3.16}$$

$$\mathrm{Re}\left(|b_1|^2\Delta_1\right) \geq 0, \tag{2.3.17}$$

$$\mathrm{Re}\left(|a_2|^2\Theta\right) \geq 0, \tag{2.3.18}$$

$$\mathrm{Re}\left(|b_2|^2\Theta\right) \leq 0. \tag{2.3.19}$$

L'on remarque (2.3.16) & (2.3.17) impliquent

$$\mathrm{Re}\left(\Delta_1\right) = 0, \tag{2.3.20}$$

et (2.3.28) & (2.3.29) impliquent

$$\mathrm{Re}\left(\Theta\right) = 0. \tag{2.3.21}$$

Tandis qu'avec le système $\mathbf{M}_D X_D = F_D$, on a

$$\begin{aligned} X = \frac{a_2}{\Delta_2}\left(\overline{a_0}\left\|\vec{J}\right\|^2 - \overline{a_1}\left\|\vec{\nabla}_s\cdot\vec{J}\right\|^2 - \overline{a_2}\left\|\vec{\nabla}_s\wedge\vec{J}\right\|^2\right) \\ - \frac{\overline{b_2}}{\Delta_2}\left(\left\|\vec{E}_t\right\|^2 - b_1\left\|\vec{\nabla}_s\cdot\vec{E}\right\|^2 - b_2\left\|\vec{\nabla}_s\wedge\vec{E}_t\right\|^2\right) \\ + a_1\frac{(a_1\overline{b_2} - a_2\overline{b_1})}{\Delta_1\Delta_2}\left(-\overline{a_0}\left\|\vec{\nabla}_s\cdot\vec{J}\right\|^2 + \overline{a_1}\left\|\mathcal{L}_R\vec{J}\right\|^2\right) \\ - \overline{b_1}\frac{(a_1\overline{b_2} - a_2\overline{b_1})}{\Delta_1\Delta_2}\left(-\left\|\vec{\nabla}_s\cdot\vec{E}_t\right\|^2 + b_1\left\|\mathcal{L}_R\vec{E}_t\right\|^2\right). \end{aligned}$$

Les conditions suivantes garantissent que $\mathrm{Re}(X) \geq 0$.

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\overline{a_0}a_2}{\Delta_2}\right) \geq 0, \tag{2.3.22}$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\overline{b_2}}{\Delta_2}\right) \leq 0, \tag{2.3.23}$$

$$\mathrm{Re}\left(\overline{a_0}a_1\Theta - \frac{\overline{a_1}a_2}{\Delta_2}\right) \leq 0, \tag{2.3.24}$$

$$\mathrm{Re}\left(-\overline{b_1}\Theta + \frac{\overline{b_2}b_1}{\Delta_2}\right) \geq 0, \tag{2.3.25}$$

$$\mathrm{Re}\left(|a_2|^2\Delta_2\right) \leq 0, \tag{2.3.26}$$

$$\mathrm{Re}\left(|b_2|^2\Delta_2\right) \geq 0, \tag{2.3.27}$$

$$\mathrm{Re}\left(|a_1|^2\Theta\right) \geq 0, \tag{2.3.28}$$

$$\mathrm{Re}\left(|b_1|^2\Theta\right) \leq 0, \tag{2.3.29}$$

L'on remarque (2.3.26) & (2.3.27) impliquent

$$\mathrm{Re}\left(\Delta_2\right) = 0, \tag{2.3.30}$$

et (2.3.18) & (2.3.19) impliquent

$$\mathrm{Re}\left(\Theta\right) = 0. \tag{2.3.31}$$

Pour conclure, on remarque que l'on peut utiliser 3 CSU
- les relations (2.3.11), (2.3.12) à (2.3.15), (2.3.20), (2.3.31)
- les relations (2.3.11), (2.3.22) à (2.3.25), (2.3.30), (2.3.21)
- l'union de ces deux ensembles qui est la CSU de la proposition.

□

Définition 2.27. *On définit le sous-espace de* $\mathbb{C}^5$

$$\mathrm{CSU}^1_{\mathrm{CI3}} = \left\{ \begin{array}{ll} (a_0, a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{C}^5, & \\ \Delta_1 & \neq 0, \\ \Delta_2 & \neq 0, \\ \mathrm{Re}\left(a_0\overline{a_1}\Delta_1\right) & \geq 0, \\ \mathrm{Re}\left(a_0\overline{a_2}\Delta_2\right) & \geq 0, \\ \mathrm{Re}(\Delta_1) & = 0, \\ \mathrm{Re}(\Delta_2) & = 0, \\ \mathrm{Im}(b_1)\,\mathrm{Im}(\Delta_2) - \mathrm{Im}(b_2)\,\mathrm{Im}(\Delta_1) & = 0, \\ \mathrm{Re}(b_1\Delta_1) & \leq 0. \end{array} \right\}.$$

Proposition 2.28 (CSU de Lafitte : réduction du nombre de relations dans la CSU précédente)**.** *On a*

$$(a_0, a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathrm{CSU}^1_{\mathrm{CI3}} \Rightarrow \mathrm{Re}(X) \geq 0,$$

ce qui entraîne l'unicité de la solution du problème {(2.2.1),(2.3.3)*}.*

Démonstration. Utilisant cette dernière CSU, O. Lafitte a éliminé les redondances et a obtenu une forme plus compacte.

$$\mathrm{Re}(\Delta_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(a_1) - \mathrm{Re}(a_0\overline{b_1}) = 0, \tag{2.3.32}$$

$$\mathrm{Re}(\Delta_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(a_2) - \mathrm{Re}(a_0\overline{b_2}) = 0, \tag{2.3.33}$$

$$\mathrm{Re}(\Theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(b_1)\,\mathrm{Im}(\Delta_2) - \mathrm{Im}(b_2)\,\mathrm{Im}(\Delta_1) = 0. \tag{2.3.34}$$

Les conditions (2.3.13) et (2.3.23) sont alors redondantes et deviennent

$$\mathrm{Im}(b_1)\,\mathrm{Im}(\Delta_1) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(b_2)\,\mathrm{Im}(\Delta_2) \geq 0. \tag{2.3.35}$$

Utilisant (2.3.34), l'inégalité (2.3.15) se simplifie trivialement car

$$\overline{b_2}\Theta + \frac{\overline{b_1}b_2}{\Delta_1} = \overline{b_2}\Theta + \frac{\overline{b_1}b_2}{\Delta_1} + \frac{\overline{b_2}b_2}{\Delta_2} - \frac{\overline{b_2}b_2}{\Delta_2},$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\overline{b_2} + b_2\right)\Theta + \frac{b_2\overline{b_2}}{\Delta_2},\\
&= 2\,\mathrm{Re}(b_2)\Theta + \frac{|b_2|^2}{\Delta_2},
\end{aligned}
$$

et ce dernier est imaginaire pur d'après (2.3.33) & (2.3.34). De même, pour l'inégalité (2.3.25).
Enfin l'inégalité (2.3.14) se simplifie aussi trivialement si l'on injecte la définition de Δ_1 et Δ_2 car

$$
\begin{aligned}
\overline{a_0}a_2\Theta + \frac{\overline{a_2}a_1}{\Delta_1} &= \overline{a_0}a_2\Theta + \overline{a_2}\frac{\Delta_1 + a_0\overline{b_1}}{\Delta_1},\\
&= \overline{a_0}a_2\Theta + \overline{a_2} + a_0\overline{a_2}\frac{\overline{b_1}}{\Delta_1} - a_0\overline{a_2}\frac{\overline{b_2}}{\Delta_2} + a_0\overline{a_2}\frac{\overline{b_2}}{\Delta_2},\\
&= \left(\overline{a_0}a_2 + a_0\overline{a_2}\right)\Theta + \overline{a_2} + a_0\overline{a_2}\frac{\overline{b_2}}{\Delta_2},\\
&= \left(\overline{a_0}a_2 + a_0\overline{a_2}\right)\Theta + \overline{a_2}\frac{\Delta_2 + a_0\overline{b_2}}{\Delta_2},\\
&= 2\,\mathrm{Re}(\overline{a_0}a_2)\Theta + \frac{|a_2|^2}{\Delta_2},
\end{aligned}
$$

qui est imaginaire pur. De même pour l'inégalité (2.3.24).
Ainsi des 13 relations initiales, seules 8 sont conservées

$$
\begin{aligned}
&(2.3.11) && \Delta_1 \neq 0 && \Leftrightarrow && \mathrm{Im}(\Delta_1) \neq 0,\\
&(2.3.11) && \Delta_2 \neq 0 && \Leftrightarrow && \mathrm{Im}(\Delta_2) \neq 0,\\
&(2.3.12) && \mathrm{Re}\left(a_0\overline{a_1}\Delta_1\right) \geq 0 && \Leftrightarrow && \mathrm{Im}(a_0\overline{a_1})\,\mathrm{Im}(\Delta_1) \leq 0,\\
&(2.3.22) && \mathrm{Re}\left(a_0\overline{a_2}\Delta_2\right) \geq 0 && \Leftrightarrow && \mathrm{Im}(a_0\overline{a_2})\,\mathrm{Im}(\Delta_2) \leq 0,\\
&(2.3.32) && \mathrm{Re}(\Delta_1) = 0 && \Leftrightarrow && \mathrm{Re}(a_1) - \mathrm{Re}(a_0\overline{b_1}) = 0,\\
&(2.3.33) && \mathrm{Re}(\Delta_2) = 0 && \Leftrightarrow && \mathrm{Re}(a_2) - \mathrm{Re}(a_0\overline{b_2}) = 0,\\
&(2.3.34) && \mathrm{Re}(\Theta) = 0 && \Leftrightarrow && \mathrm{Im}(b_1)\,\mathrm{Im}(\Delta_2) - \mathrm{Im}(b_2)\,\mathrm{Im}(\Delta_1) = 0,\\
&(2.3.35) && \mathrm{Re}(b_1\Delta_1) \leq 0 && \Leftrightarrow && \mathrm{Im}(b_2)\,\mathrm{Im}(\Delta_2) \geq 0.
\end{aligned}
$$

□

Soit $S = \left\{(a_0, a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{C}^5; a_1 = a_2; b_1 = b_2 = 0\right\}$. On remarque que

$$
\begin{aligned}
&(2.3.36) && \mathrm{CSU}^1_{\mathrm{CI3}} \subset \mathrm{CSU}_{\mathrm{CI4}} \times \mathbb{C}^2,\\
&(2.3.37) && \mathrm{CSU}^1_{\mathrm{CI3}} \cap S \subsetneq (\mathrm{CSU}_{\mathrm{CI4}} \times \mathbb{C}^2) \cap S.
\end{aligned}
$$

Définition 2.29. *On définit le sous-espace de* $\mathbb{C}^5$

$$\mathrm{CSU}^2_{\mathrm{CI3}} = \left\{ \begin{array}{r} (a_0,a_1,a_2,b_1,b_2) \in \mathbb{C}^5, \\ \Delta_1 \neq 0, \\ \Delta_2 \neq 0, \\ \mathrm{Re}\,(a_0) \geq 0, \\ \mathrm{Re}\left(a_1 - \dfrac{\overline{b_1 a_0} a_1}{\Delta_1}\right) \leq 0, \\ \mathrm{Re}\left(a_2 - \dfrac{\overline{b_2 a_0} a_2}{\Delta_2}\right) \leq 0, \\ \mathrm{Re}\,(b_1\Delta_1) = 0, \\ \mathrm{Re}\,(b_2\Delta_2) = 0, \\ \mathrm{Im}\,(b_1\Delta_1)\,\mathrm{Im}(b_1) \geq 0, \\ \mathrm{Im}\,(b_2\Delta_2)\,\mathrm{Im}(b_2) \geq 0, \end{array} \right\}.$$

Proposition 2.30 (Une deuxième CSU pour la CI3)**.**

$$(a_0,a_1,a_2,b_1,b_2) \in \mathrm{CSU}^2_{\mathrm{CI3}} \Rightarrow \mathrm{Re}(X) \geq 0,$$

ce qui entraîne l'unicité de la solution du problème de Maxwell extérieur avec CI3.

Démonstration. En se basant sur la démonstration de la $\mathrm{CSU}^1_{\mathrm{CI3}}$, on remarque que l'on peut déterminer les quantités (Y_R, Z_R) (resp. (Y_D, Z_R)) uniquement en utilisant les équations (2.3.7) et (2.3.8) (resp. (2.3.9) et (2.3.10)).
On déduit donc que si $\Delta_1 \neq 0$ et $\Delta_2 \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} Y_R &= \frac{1}{\Delta_2}\left(a_2\left(\overline{a_0}\int_\Gamma \vec{J}\cdot\mathcal{L}_R\vec{\overline{J}} - \overline{a_2}\left\|\mathcal{L}_R\vec{J}\right\|^2\right) - \overline{b_2}\left(\int_\Gamma \vec{\overline{E}}\cdot\mathcal{L}_R\vec{E} - b_2\left\|\mathcal{L}_R\vec{E}\right\|^2\right)\right), \\ Y_D &= \frac{1}{\Delta_1}\left(a_1\left(\overline{a_0}\int_\Gamma \vec{J}\cdot\mathcal{L}_D\vec{\overline{J}} + \overline{a_1}\left\|\mathcal{L}_D\vec{J}\right\|^2\right) - \overline{b_1}\left(\int_\Gamma \vec{\overline{E}}\cdot\mathcal{L}_D\vec{E} + b_1\left\|\mathcal{L}_D\vec{E}\right\|^2\right)\right). \end{aligned}$$

Utilisons (2.3.5), on obtient

$$X = -\overline{b_1}Y_D + \overline{b_2}Y_R + \overline{a_0}\left\|\vec{J}\right\|^2 + \overline{a_1}\int_\Gamma \vec{J}\cdot\mathcal{L}_D\vec{\overline{J}} - \overline{a_2}\int_\Gamma \vec{J}\cdot\mathcal{L}_R\vec{\overline{J}}.$$

On développe les résultats de la démonstration précédente,

$$\begin{aligned} X = {} & \overline{a_0}\left\|\vec{J}\right\|^2 - \overline{a_1}\left\|\vec{\nabla}_s\cdot\vec{J}\right\|^2 - \overline{a_2}\left\|\vec{\nabla}_s\wedge\vec{J}\right\|^2 \\ & + \frac{\overline{b_2}}{\Delta_2}\left(a_2\left(\overline{a_0}\left\|\vec{\nabla}_s\wedge\vec{J}\right\|^2 - \overline{a_2}\left\|\mathcal{L}_R J\right\|^2\right) - \overline{b_2}\left(\left\|\vec{\nabla}_s\wedge\vec{E}\right\|^2 - b_2\left\|\mathcal{L}_R\vec{E}\right\|^2\right)\right) \\ & - \frac{\overline{b_1}}{\Delta_1}\left(a_1\left(-\overline{a_0}\left\|\vec{\nabla}_s\cdot\vec{J}\right\|^2 + \overline{a_1}\left\|\mathcal{L}_D J\right\|^2\right) - \overline{b_1}\left(-\left\|\vec{\nabla}_s\cdot\vec{E}\right\|^2 + b_1\left\|\mathcal{L}_D\vec{E}\right\|^2\right)\right). \end{aligned}$$

On factorise les termes en $\left\|\vec{J}\right\|^2$, $\left\|\vec{\nabla}_s\cdot\vec{J}\right\|^2$, $\left\|\vec{\nabla}_s\wedge\vec{J}\right\|^2$

$$X = \overline{a_0}\left\|\vec{J}\right\|^2 - \left(\overline{a_1} - \frac{\overline{b_1 a_0}a_1}{\Delta_1}\right)\left\|\vec{\nabla}_s \cdot \vec{J}\right\|^2 - \left(\overline{a_2} - \frac{\overline{b_2 a_0}a_2}{\Delta_2}\right)\left\|\vec{\nabla}_s \wedge \vec{J}\right\|^2 + \frac{\overline{b_2}}{\Delta_2}\left(-|a_2|^2\left\|\mathcal{L}_R\vec{J}\right\|^2 - \overline{b_2}\left(\left\|\vec{\nabla}_s \wedge \vec{E}\right\|^2 - b_2\left\|\mathcal{L}_R\vec{E}\right\|^2\right)\right) - \frac{\overline{b_1}}{\Delta_1}\left(|a_1|^2\left\|\mathcal{L}_D\vec{J}\right\|^2 - \overline{b_1}\left(-\left\|\vec{\nabla}_s \cdot \vec{E}\right\|^2 + b_1\left\|\mathcal{L}_D\vec{E}\right\|^2\right)\right).$$

On développe l'expression précédente

$$X = \overline{a_0}\left\|\vec{J}\right\|^2 - \left(\overline{a_1} - \frac{\overline{b_1 a_0}a_1}{\Delta_1}\right)\left\|\vec{\nabla}_s \cdot \vec{J}\right\|^2 - \left(\overline{a_2} - \frac{\overline{b_2 a_0}a_2}{\Delta_2}\right)\left\|\vec{\nabla}_s \wedge \vec{J}\right\|^2 - \frac{\overline{b_2}|a_2|^2}{\Delta_2}\left\|\mathcal{L}_R\vec{J}\right\|^2 - \frac{\overline{b_2}^2}{\Delta_2}\left\|\vec{\nabla}_s \wedge \vec{E}\right\|^2 + \frac{\overline{b_2}|b_2|^2}{\Delta_2}\left\|\mathcal{L}_R\vec{E}\right\|^2 - \frac{\overline{b_1}|a_1|^2}{\Delta_1}\left\|\mathcal{L}_D\vec{J}\right\|^2 - \frac{\overline{b_1}^2}{\Delta_1}\left\|\vec{\nabla}_s \cdot \vec{E}\right\|^2 + \frac{\overline{b_1}|b_1|^2}{\Delta_1}\left\|\mathcal{L}_D\vec{E}\right\|^2.$$

Comme condition suffisante, on impose à la partie réelle de chaque terme d'être positive, ce qui s'écrit

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(a_0) &\geq 0, \\
\operatorname{Re}\left(\overline{a_1} - \frac{\overline{b_1 a_0}a_1}{\Delta_1}\right) &\leq 0, & \operatorname{Re}\left(\frac{\overline{b_1}^2}{\Delta_1}\right) &\leq 0, \\
\operatorname{Re}\left(\overline{a_2} - \frac{\overline{b_2 a_0}a_2}{\Delta_2}\right) &\leq 0, & \operatorname{Re}\left(\frac{\overline{b_2}^2}{\Delta_2}\right) &\leq 0, \\
\operatorname{Re}\left(\frac{|a_1|^2\overline{b_1}}{\Delta_1}\right) &\leq 0, & \operatorname{Re}\left(\frac{|b_1|^2\overline{b_1}}{\Delta_1}\right) &\geq 0, \\
\operatorname{Re}\left(\frac{|a_2|^2\overline{b_2}}{\Delta_2}\right) &\leq 0, & \operatorname{Re}\left(\frac{|b_2|^2\overline{b_2}}{\Delta_2}\right) &\geq 0.
\end{aligned}$$

On remarque alors que les conditions des deux dernières lignes se combinent et imposent aux parties réelles de $b_1\Delta_1$ et $b_2\Delta_2$ d'être nulles. □

Soit $S = \left\{(a_0, a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{C}^5; a_1 = a_2; b_1 = b_2 = 0\right\}$. On remarque que

$$\mathrm{CSU}^2_{\mathrm{CI3}} \subset \mathrm{CSU}_{\mathrm{CI4}} \times \mathbb{C}^2, \tag{2.3.38}$$

$$\mathrm{CSU}^2_{\mathrm{CI3}} \cap S \subsetneq (\mathrm{CSU}_{\mathrm{CI4}} \times \mathbb{C}^2) \cap S. \tag{2.3.39}$$

On définit

$$\begin{aligned}
z : \ & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\
& (a_0, a_1, a_2, b_1, b_2) \mapsto 1 - \frac{b_1 a_0}{a_1} - \frac{b_2 a_0}{a_2}.
\end{aligned} \tag{2.3.40}$$

Par abus de notation, on omet les variables $(a_0, a_1, a_2, b_1, b_2)$

$$z(a_0, a_1, a_2, b_1, b_2) \equiv z. \tag{2.3.41}$$

Définition 2.31. *On définit le sous-espace de* $\mathbb{C}^5$

$$\mathrm{CSU}^3_{\mathrm{CI3}} = \left\{ \begin{array}{ll} (a_0, a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{C}^5, & \\ a_1 & \neq 0, \\ a_2 & \neq 0, \\ \mathrm{Re}\,(\overline{a_0} z) & \geq 0, \\ \mathrm{Re}\,(\overline{a_1} z) & \leq 0, \\ \mathrm{Re}\,(\overline{a_2} z) & \leq 0, \\ \mathrm{Re}\left(\dfrac{b_1}{a_1}\right) & \geq 0, \\ \mathrm{Re}\left(\dfrac{b_2}{a_2}\right) & \geq 0, \\ \mathrm{Re}\,(a_0) & \geq 0, \\ \mathrm{Re}\,(a_1) & \leq 0, \\ \mathrm{Re}\,(a_2) & \leq 0, \\ \mathrm{Re}\left(\dfrac{b_1 \overline{a_2}}{a_1 \overline{a_0}}\right) & \leq 0, \\ \mathrm{Re}\left(\dfrac{b_2 \overline{a_1}}{a_2 \overline{a_0}}\right) & \leq 0, \end{array} \right\}.$$

Proposition 2.32 (Une troisième CSU pour la CI3)**.**

$$(a_0, a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathrm{CSU}^3_{\mathrm{CI3}} \Rightarrow \mathrm{Re}(X) \geq 0,$$

ce qui entraîne l'unicité du problème {(2.2.1),(2.3.3)*}.*

Démonstration. L'opérateur $a_0\mathcal{I} + a_1\mathcal{L}_D - a_2\mathcal{L}_R$ est inversible dans $(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2))^2$ et l'on se place dans $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^2))^2$ afin que les intégrales suivantes soient bien posées. Alors,

$$X = \int_\Gamma \left(a_0\mathcal{I} + a_1\mathcal{L}_D - a_2\mathcal{L}_R\right)^{-1} \left(\mathcal{I} + b_1\mathcal{L}_D - b_2\mathcal{L}_R\right) \vec{E}_t \cdot \overrightarrow{\overline{E}_t}.$$

On développe chaque terme

$$\begin{aligned} X = \int_\Gamma \Big(& \left(a_0\mathcal{I} + a_1\mathcal{L}_D - a_2\mathcal{L}_R\right)^{-1} \\ & + b_1 \left(a_0\mathcal{I} + a_1\mathcal{L}_D - a_2\mathcal{L}_R\right)^{-1} \mathcal{L}_D \\ & - b_2 \left(a_0\mathcal{I} + a_1\mathcal{L}_D - a_2\mathcal{L}_R\right)^{-1} \mathcal{L}_R \Big) \vec{E}_t \cdot \overrightarrow{\overline{E}_t}. \end{aligned}$$

On suppose $a_1 \neq 0$ et $a_2 \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D &= \frac{1}{a_1} \left(a_0\mathcal{I} + a_1\mathcal{L}_D - a_0\mathcal{I}\right), \\ \mathcal{L}_R &= -\frac{1}{a_2} \left(a_0\mathcal{I} - a_2\mathcal{L}_R - a_0\mathcal{I}\right). \end{aligned}$$

On déduit de ce qui précède que

$$X = \int_\Gamma \left(1 - \frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2}\right) (a_0\mathcal{I} + a_1\mathcal{L}_D - a_2\mathcal{L}_R)^{-1} + \frac{b_1}{a_1} (a_0\mathcal{I} + a_1\mathcal{L}_D - a_2\mathcal{L}_R)^{-1} (a_0\mathcal{I} + a_1\mathcal{L}_D) + \frac{b_2}{a_2} (a_0\mathcal{I} + a_1\mathcal{L}_D - a_2\mathcal{L}_R)^{-1} (a_0\mathcal{I} - a_2\mathcal{L}_R) \vec{E}_t \cdot \overline{\vec{E}_t}.$$

On définit

$$\begin{aligned} z &= 1 - \frac{b_1}{a_1}a_0 - \frac{b_2}{a_2}a_0, \\ \vec{V} &= (a_0\mathcal{I} + a_1\mathcal{L}_D - a_2\mathcal{L}_R)^{-1} \vec{E}_t, \\ \vec{W}_1 &= \left(\mathcal{I} - a_2 (a_0\mathcal{I} + a_1\mathcal{L}_D)^{-1} \mathcal{L}_R\right)^{-1} \vec{E}_t, \\ \vec{W}_2 &= \left(\mathcal{I} + a_1 (a_0\mathcal{I} - a_2\mathcal{L}_R)^{-1} \mathcal{L}_D\right)^{-1} \vec{E}_t. \end{aligned}$$

On remarque que

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{I} - a_2 (a_0\mathcal{I} + a_1\mathcal{L}_D)^{-1} \mathcal{L}_R\right) \vec{W}_1 &= \vec{E}_t, \\ (a_0\mathcal{I} + a_1\mathcal{L}_D) \left(\mathcal{I} - a_2 (a_0\mathcal{I} + a_1\mathcal{L}_D)^{-1} \mathcal{L}_R\right) \vec{W}_1 &= (a_0\mathcal{I} + a_1\mathcal{L}_D) \vec{E}_t, \\ (a_0\mathcal{I} + a_1\mathcal{L}_D - a_2\mathcal{L}_R) \vec{W}_1 &= (a_0\mathcal{I} + a_1\mathcal{L}_D) \vec{E}_t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{I} + a_1 (a_0\mathcal{I} - a_2\mathcal{L}_R)^{-1} \mathcal{L}_D\right) \vec{W}_2 &= \vec{E}_t, \\ (a_0\mathcal{I} - a_2\mathcal{L}_R) \left(\mathcal{I} + a_1 (a_0\mathcal{I} - a_2\mathcal{L}_R)^{-1} \mathcal{L}_D\right) \vec{W}_2 &= (a_0\mathcal{I} - a_2\mathcal{L}_R) \vec{E}_t, \\ (a_0\mathcal{I} + a_1\mathcal{L}_R - a_2\mathcal{L}_R) \vec{W}_2 &= (a_0\mathcal{I} - a_2\mathcal{L}_R) \vec{E}_t. \end{aligned}$$

On déduit

$$X = \int_\Gamma z\vec{V} \cdot (\overline{a_0}\mathcal{I} + \overline{a_1}\mathcal{L}_D - \overline{a_2}\mathcal{L}_R) \overline{\vec{V}} + \frac{b_1}{a_1} \left(\mathcal{I} - \overline{a_2} (\overline{a_0}\mathcal{I} + \overline{a_1}\mathcal{L}_D)^{-1} \mathcal{L}_R\right) \overline{\vec{W}_1} \cdot \vec{W}_1 + \frac{b_2}{a_2} \left(\mathcal{I} + \overline{a_1} (\overline{a_0}\mathcal{I} - \overline{a_2}\mathcal{L}_R)^{-1} \mathcal{L}_D\right) \overline{\vec{W}_2} \cdot \vec{W}_2.$$

Notons

$$\begin{aligned} \vec{R}_1 &= (\overline{a_0}\mathcal{I} + \overline{a_1}\mathcal{L}_D)^{-1} \mathcal{L}_R \overline{\vec{W}_1}, \\ \vec{R}_2 &= (\overline{a_0}\mathcal{I} - \overline{a_2}\mathcal{L}_R)^{-1} \mathcal{L}_D \overline{\vec{W}_2}. \end{aligned}$$

Donc

$$X = \int_\Gamma z\vec{V}\cdot(\overline{a_0}\mathcal{I} + \overline{a_1}\mathcal{L}_D - \overline{a_2}\mathcal{L}_R)\,\overrightarrow{\overline{V}} + \frac{b_1}{a_1}\left\|\vec{W}_1\right\| + \frac{b_2}{a_2}\left\|\vec{W}_2\right\| - \frac{b_1}{a_1}\overline{a_2}\vec{R}_1\cdot\vec{W}_1 + \frac{b_2}{a_2}\overline{a_1}\vec{R}_2\cdot\vec{W}_2.$$

Comme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_D\left(\overline{a_0}\mathcal{I} + \overline{a_1}\mathcal{L}_D\right) &= \left(\overline{a_0}\mathcal{I} + \overline{a_1}\mathcal{L}_D\right)\mathcal{L}_D,\\ \mathcal{L}_R\left(\overline{a_0}\mathcal{I} - \overline{a_2}\mathcal{L}_R\right) &= \left(\overline{a_0}\mathcal{I} - \overline{a_2}\mathcal{L}_R\right)\mathcal{L}_R,\end{aligned}$$

et que $\mathcal{L}_D\mathcal{L}_R = \mathcal{L}_R\mathcal{L}_D = 0$, on trouve

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_D\mathcal{L}_R\overrightarrow{\overline{W}_1} &= \mathcal{L}_D\left(\overline{a_0}\mathcal{I} + \overline{a_1}\mathcal{L}_D\right)\vec{R}_1,\\ 0 &= \left(\overline{a_0}\mathcal{I} + \overline{a_1}\mathcal{L}_D\right)\mathcal{L}_D\vec{R}_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_R\mathcal{L}_D\overrightarrow{\overline{W}_2} &= \mathcal{L}_R\left(\overline{a_0}\mathcal{I} - \overline{a_2}\mathcal{L}_R\right)\vec{R}_2,\\ 0 &= \left(\overline{a_0}\mathcal{I} - \overline{a_2}\mathcal{L}_R\right)\mathcal{L}_R\vec{R}_2.\end{aligned}$$

Donc on déduit que $\mathcal{L}_D\vec{R}_1 = 0$, $\mathcal{L}_R\vec{R}_2 = 0$.
Or par définition $\mathcal{L}_R\overrightarrow{\overline{W}_1} = \left(\overline{a_0} + \overline{a_1}\mathcal{L}_D\right)\vec{R}_1$ et $\mathcal{L}_D\overrightarrow{\overline{W}_2} = \left(\overline{a_0} - \overline{a_2}\mathcal{L}_R\right)\vec{R}_2$, donc

$$\mathcal{L}_R\overrightarrow{\overline{W}_1} = \overline{a_0}\vec{R}_1, \qquad \mathcal{L}_D\overrightarrow{\overline{W}_2} = \overline{a_0}\vec{R}_2,$$

donc

$$\vec{R}_1 = \frac{1}{\overline{a_0}}\mathcal{L}_R\overrightarrow{\overline{W}_1}, \qquad \vec{R}_2 = \frac{1}{\overline{a_0}}\mathcal{L}_D\overrightarrow{\overline{W}_2}.$$

On réinjecte ce résultat dans la définition de X.

$$\begin{aligned}X = \int_\Gamma z\vec{V}\cdot\left(\overline{a_0}\mathcal{I} + \overline{a_1}\mathcal{L}_D - \overline{a_2}\mathcal{L}_R\right)\overrightarrow{\overline{V}}\\ + \frac{b_1}{a_1}\left\|\vec{W}_1\right\|^2 - \frac{b_1\overline{a_2}}{a_1\overline{a_0}}\int_\Gamma\mathcal{L}_R\overrightarrow{\overline{W}_1}\cdot\vec{W}_1\\ + \frac{b_2}{a_2}\left\|\vec{W}_2\right\|^2 + \frac{b_2\overline{a_1}}{a_2\overline{a_0}}\int_\Gamma\mathcal{L}_D\overrightarrow{\overline{W}_2}\cdot\vec{W}_2.\end{aligned}$$

On impose la positivité de la partie réelle de chaque terme pour avoir $\mathrm{Re}(X) \geq 0$. □

Soit $S = \left\{(a_0, a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{C}^5; a_1 = a_2; b_1 = b_2 = 0\right\}$. On remarque que

$$\mathrm{CSU}^3_{\mathrm{CI3}} \subset \mathrm{CSU}_{\mathrm{CI4}} \times\mathbb{C}^2, \tag{2.3.42}$$

$$\mathrm{CSU}^3_{\mathrm{CI3}} \cap S = (\mathrm{CSU}_{\mathrm{CI4}} \times\mathbb{C}^2) \cap S. \tag{2.3.43}$$

2.4 Une condition nécessaire et suffisante pour l'unicité des solutions du problème de Maxwell intérieur

2.4.1 Cas général : alternative de Fredholm

Cette partie détaille l'introduction à l'opérateur de Calderón du chapitre 1.
Pour exprimer l'opérateur de Calderón, nous devons exprimer les champs dans l'objet. Il apparaît nécessaire que ces derniers soient donc bien définis.
Nous exhibons une condition nécessaire et suffisante d'unicité des solutions du problème de Maxwell-Helmholtz (2.4.1) dans Ω, objet multicouche autour d'un conducteur électriquement parfait (CEP), c'est-a-dire tel que $\partial\Omega = \Gamma \cup \Gamma_0$ où Γ est la surface extérieure et Γ_0 la surface intérieure. Le problème de Maxwell harmonique en $e^{i\omega t}$ s'exprime

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{x}) + ik(\vec{x})\eta(\vec{x})\vec{\mathcal{H}}(\vec{x}) & = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{H}}(\vec{x}) - ik(\vec{x})\eta(\vec{x})^{-1}\vec{E}(\vec{x}) & = 0 \end{cases} \qquad \text{dans } \Omega. \tag{2.4.1}$$

Nous rappelons le résultat général de Cessenat 1996, Théorème 8, p. 111.

Théorème 2.33 (Alternative de Fredholm)**.** *Les champs $\vec{E}, \vec{\mathcal{H}}$ solutions de* (2.4.1) *avec conditions aux limites de Dirichlet $\vec{E}_{|\Gamma} = 0$, $\vec{E}_{|\Gamma_0} = 0$ sont soit uniques si $\omega^2\epsilon\mu$ n'est pas une valeur propre du Laplacien vectoriel, soit ces champs sont engendrés par les vecteurs propres.*

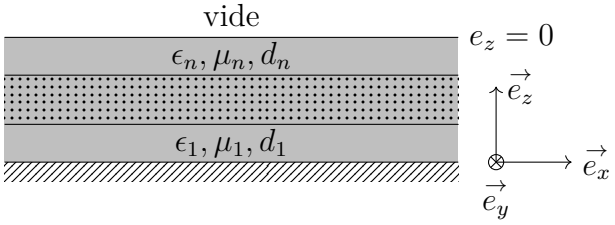
Nous renvoyons à l'ouvrage cité précédemment pour la démonstration, en dehors du cadre de cette thèse. D'après ce résultat, nous pouvons avoir des résonances pour le problème intérieur, c'est-à-dire des solutions non nulles du problème sans source.

2.4.2 Simplification de la géométrie pour déduire l'opérateur de Calderón.

Cette thèse s'attache à déterminer les coefficients des CIOE des sections précédentes. Nous devons être capables d'exprimer l'opérateur de Calderón pour l'approcher par les CIOE. Il faut donc que les champs soient déterminés de façon unique pour exprimer cet opérateur. L'alternative de Fredholm nous permet d'avoir l'existence des champs s'il y a unicité de ces derniers.
Ainsi nous étudierons trois objets modèles sur lesquels nous pouvons montrer l'existence des champs, et donc celle de l'opérateur de Calderón.

1. Un objet plan infini
2. Un objet cylindrique
3. Un objet sphérique

Cependant, nous utiliserons des objets différents (cylindre à bouts arrondis, sphère-cône) lors du calcul par équations intégrales, utilisant les coefficients de CIOE calculés sur ces objets modèles.
Les constantes relatives ϵ, μ (ou k, η) sont constantes par morceaux en fonction de z.



Proposition 2.34. *Le problème Maxwell-Helmholtz* (2.4.1) *avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes* $\vec{E}_{|z=z_n} = 0$, $\vec{E}_{|z=z_0} = 0$ *admet une unique solution pour deux couches de matériaux si et seulement si pour tout* $(k_x, k_y) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $k_x^2 + k_y^2 \neq 0$

$$\begin{cases} \widetilde{k}_2 k_1 \eta_2 \tan\left(\widetilde{k}_2(z_2 - z_1)\right) & \neq \widetilde{k}_1 k_2 \eta_1 \tan\left(\widetilde{k}_1(z_0 - z_1)\right), \\ \widetilde{k}_1 k_2 \eta_2 \tan\left(\widetilde{k}_2(z_2 - z_1)\right) & \neq \widetilde{k}_2 k_1 \eta_1 \tan\left(\widetilde{k}_1(z_0 - z_1)\right). \end{cases}$$

Ces relations ne contiennent pas les conditions de résonance pour chacune des couches.

Démonstration. On pose $\widetilde{k}_1 = \sqrt{k_1^2 - k_x^2 - k_y^2}$, $\widetilde{k}_2 = \sqrt{k_2^2 - k_x^2 - k_y^2}$.
On remarque que toutes les composantes du champs $\vec{E}$ (idem pour $\vec{\mathcal{H}}$) sont solutions de $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (k_i^2 - (k_x^2 + k_y^2))u = 0$, dont les solutions sont données par la famille $(\sin(\widetilde{k}_i z), \cos(\widetilde{k}_i z))$ selon la couche.
On peut donc exprimer le champ électrique tangentiel grâce à des paramètres a_1, c_1, a_2, c_2, b, d dépendant de (k_x, k_y) mais pas de z

$$\hat{E}_x = \begin{cases} a_2 \sin(\widetilde{k}_2(z - z_1)) + b \cos(\widetilde{k}_2(z - z_1)), & z_1 < z < z_2 \\ a_1 \sin(\widetilde{k}_1(z - z_1)) + b \cos(\widetilde{k}_1(z - z_1)), & z_0 < z < z_1 \end{cases}$$
$$\hat{E}_y = \begin{cases} c_2 \sin(\widetilde{k}_2(z - z_1)) + d \cos(\widetilde{k}_2(z - z_1)), & z_1 < z < z_2 \\ c_1 \sin(\widetilde{k}_1(z - z_1)) + d \cos(\widetilde{k}_1(z - z_1)), & z_0 < z < z_1 \end{cases}$$

Ces expressions prennent en compte la continuité des traces tangentielles du champ électrique à l'interface $z = z_1$.
En supposant $k_x^2 + k_y^2$ non nul, nous définissons d'autres paramètres A_2, C_2, A_1, C_1, B, D tels que

$$\begin{aligned} a_2 &= A_2 k_x - C_2 k_y, & c_2 &= A_2 k_y + C_2 k_x, \\ a_1 &= A_1 k_x - C_1 k_y, & c_1 &= A_1 k_y + C_1 k_x, \\ b &= B k_x - D k_y, & d &= B k_y + D k_x, \end{aligned}$$

et réciproquement

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{a_2 k_x + c_2 k_y}{k_x^2 + k_y^2}, & C_2 &= \frac{c_2 k_y - a_2 k_x}{k_x^2 + k_y^2}, \\ A_1 &= \frac{a_1 k_x + c_1 k_y}{k_x^2 + k_y^2}, & C_1 &= \frac{c_1 k_y - a_1 k_x}{k_x^2 + k_y^2}, \end{aligned}$$

$$B = \frac{bk_x + dk_y}{k_x^2 + k_y^2}, \qquad D = \frac{dk_y - bk_x}{k_x^2 + k_y^2}.$$

Les divergences nulles des champs nous permettent de déduire de a_2, c_2, a_1, c_1, b, d la décomposition sur $(\sin(\widetilde{k}_i(z - z_i)), \cos(\widetilde{k}_i(z - z_i)))$ de E_z :

$$E_z = i\frac{k_x^2 + k_y^2}{\widetilde{k}_2} A_2 \cos(\widetilde{k}_2(z - z_1)) - i\frac{k_x^2 + k_y^2}{\widetilde{k}_2} B \sin(\widetilde{k}_2(z - z_1)), z_1 < z < z_2,$$

Dans $z_0 < z < z_1$, il faut remplacer A_2 par A_1, C_2 par C_1 et $\widetilde{k}_2$ par $\widetilde{k}_1$.
Nous cherchons des résonances, c'est-à-dire des solutions non nulles du problème de Maxwell harmonique avec conditions de Dirichlet homogènes sur les bords $z = z_0$ et $z = z_2$.
Notons $\alpha_1 = \widetilde{k}_1(z_0 - z_1)$, $\alpha_2 = \widetilde{k}_2(z_2 - z_1)$.
Les conditions sur E_x et sur E_y donnent, après décomposition sur (k_x, k_y) et sur $(-k_y, k_x)$, en $z = z_0$ et en $z = z_2$

$$\begin{cases} B\cos\alpha_1 = A_1 \sin\alpha_1, \\ D\cos\alpha_1 = C_1 \sin\alpha_1, \\ B\cos\alpha_2 = A_2 \sin\alpha_2, \\ D\cos\alpha_2 = C_2 \sin\alpha_2. \end{cases}$$

D'autre part, on écrit la condition de saut tangentiel du champ magnétique à l'interface $z = z_1$.
Les coordonnées tangentielles de $\vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \hat{\vec{E}}$ dans $z_1 < z < z_2$ son

$$\begin{aligned} F_x = -k_y &\left(\frac{k_x^2 + k_y^2}{\widetilde{k}_2} A_2 \cos(\widetilde{k}_2(z - z_1)) - \frac{k_x^2 + k_y^2}{\widetilde{k}_2} B \sin(\widetilde{k}_2(z - z_1)) \right) \\ &- \widetilde{k}_2 \Big((k_y A_2 + k_x C_2)\cos(\widetilde{k}_2(z - z_1)) - (Bk_y + Dk_x)\sin(\widetilde{k}_2(z - z_1)) \Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_y = \widetilde{k}_1 &\Big((k_x A_2 - k_y C_2)\cos(\widetilde{k}_2(z - z_1)) - (k_x B - k_y D)\sin(\widetilde{k}_2(z - z_1)) \Big) \\ &+ k_x \left(\frac{k_x^2 + k_y^2}{\widetilde{k}_2} A_2 \cos(\widetilde{k}_2(z - z_1)) - \frac{k_x^2 + k_y^2}{\widetilde{k}_2} B \sin(\widetilde{k}_2(z - z_1)) \right) \end{aligned}$$

D'où l'on déduit les coordonnées tangentielles du champ magnétique dans $z_1 < z < z_2$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_x = -\frac{k_y}{-ik_2\eta_2} &\left(\frac{k_x^2 + k_y^2}{\widetilde{k}_2} A_2 \cos(\widetilde{k}_2(z - z_1)) - \frac{k_x^2 + k_y^2}{\widetilde{k}_2} B \sin(\widetilde{k}_2(z - z_1)) \right) \\ &- \frac{\widetilde{k}_2}{-ik_2\eta_2} \Big((k_y A_2 + k_x C_2)\cos(\widetilde{k}_2(z - z_1)) - (Bk_y + Dk_x)\sin(\widetilde{k}_2(z - z_1)) \Big) \end{aligned}$$

$$\hat{\mathcal{H}}_\dagger = \frac{\widetilde{k}_2}{-ik_2\eta_2}\Big((k_xA_2 - k_yC_2)\cos(\widetilde{k}_2(z-z_1)) - (k_xB - k_yD)\sin(\widetilde{k}_2(z-z_1))\Big) + \frac{k_x}{-ik_2\eta_2}\left(\frac{k_x^2+k_y^2}{\widetilde{k}_2}A_2\cos(\widetilde{k}_2(z-z_1)) - \frac{k_x^2+k_y^2}{\widetilde{k}_2}B\sin(\widetilde{k}_2(z-z_1))\right)$$

Dans $z_0 < z < z_1$, il faut remplacer A_2 par A_1, C_2 par C_1, $k_2\eta_2$ par $k_1\eta_1$ et $\widetilde{k}_2$ par $\widetilde{k}_1$. Pour satisfaire à la continuité tangentielle du champ magnétique, il faut que

$$\begin{cases} -\dfrac{k_y}{k_1\eta_1}\dfrac{k_x^2+k_y^2}{\widetilde{k}_1}A_1 - \dfrac{\widetilde{k}_1}{k_1\eta_1}(k_yA_1 + k_xC_1) = -\dfrac{k_y}{k_2\eta_2}\dfrac{k_x^2+k_y^2}{\widetilde{k}_2}A_2 - \dfrac{\widetilde{k}_2}{k_2\eta_2}(k_yA_2 + k_xC_2), \\ -\dfrac{\widetilde{k}_1}{k_1\eta_1}(k_xA_1 - k_yC_1) + \dfrac{k_x}{k_1\eta_1}\dfrac{k_x^2+k_y^2}{\widetilde{k}_1}A_1 = -\dfrac{\widetilde{k}_2}{k_2\eta_2}(k_xA_2 - k_yC_2) + \dfrac{k_x}{k_2\eta_2}\dfrac{k_x^2+k_y^2}{\widetilde{k}_2^2}A_2. \end{cases}$$

On a ainsi un système de 6 équations à 6 inconnues A_1, C_1, A_2, C_2, B, D.
On introduit les deux matrices

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} -\widetilde{k}_1k_y - k_y\dfrac{k_x^2+k_y^2}{\widetilde{k}_1} & -\widetilde{k}_1k_x \\ \widetilde{k}_1k_x + k_x\dfrac{k_x^2+k_y^2}{\widetilde{k}_1} & -\widetilde{k}_1k_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} -\widetilde{k}_2k_y - k_y\dfrac{k_x^2+k_y^2}{\widetilde{k}_2} & -\widetilde{k}_2k_x \\ \widetilde{k}_2k_x + k_x\dfrac{k_x^2+k_y^2}{\widetilde{k}_2} & -\widetilde{k}_2k_y \end{bmatrix}.$$

La continuité tangentielle du champ magnétique se résume à

$$\frac{1}{k_1\eta_1}\mathbf{M}_1\begin{bmatrix}A_1\\C_1\end{bmatrix} = \frac{1}{k_2\eta_2}\mathbf{M}_2\begin{bmatrix}A_2\\C_2\end{bmatrix}.$$

Nous aboutissons en multipliant par $\sin(\alpha_1)\sin(\alpha_2)$ puis en utilisant les relations en fonction de B et D :

$$k_2\eta_2\sin(\alpha_2)\mathbf{M}_1\begin{bmatrix}A_1\sin(\alpha_1)\\C_1\sin(\alpha_1)\end{bmatrix} = k_1\eta_1\sin(\alpha_1)\mathbf{M}_2\begin{bmatrix}A_2\sin(\alpha_2)\\C_2\sin(\alpha_2)\end{bmatrix},$$

$$k_2\eta_2\sin(\alpha_2)\cos(\alpha_1)\mathbf{M}_1\begin{bmatrix}B\\D\end{bmatrix} = k_1\eta_1\sin(\alpha_1)\cos(\alpha_2)\mathbf{M}_2\begin{bmatrix}B\\D\end{bmatrix},$$

et le problème de résonance se ramène à

$$\det(K_1\mathbf{M}_1 - K_2\mathbf{M}_2) = 0$$

avec $K_1 = k_2\eta_2\cos\alpha_1\sin\alpha_2$, $K_2 = k_1\eta_1\cos\alpha_2\sin\alpha_1$.
Nous remarquons alors que

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} -\widetilde{k}_1k_y - k_y\dfrac{k_x^2+k_y^2}{\widetilde{k}_1} & -\widetilde{k}_1k_x \\ \widetilde{k}_1k_x + k_x\dfrac{k_x^2+k_y^2}{\widetilde{k}_1} & -\widetilde{k}_1k_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_y\dfrac{k_1^2}{\widetilde{k}_1} & -\widetilde{k}_1k_x \\ k_x\dfrac{k_1^2}{\widetilde{k}_1} & -\widetilde{k}_1k_y \end{bmatrix},$$

et en modifiant les indices, on obtient un résultat équivalent pour $\mathbf{M}_2$.

En calculant directement le déterminant de $K_1\mathbf{M}_1 - K_2\mathbf{M}_2$, on trouve

$$\left(k_x^2 + k_y^2\right)\left(K_1\frac{k_1^2}{\widetilde{k}_1} - K_2\frac{k_2^2}{\widetilde{k}_2}\right)\left(K_1\widetilde{k}_1 + K_2\widetilde{k}_2\right) = 0$$

On obtient donc 3 conditions de résonances. La première a déjà été supposée, les deux suivantes s'expriment respectivement en fonction de (k_x, k_y)

$$\widetilde{k}_2 k_1\eta_2 \tan\left(\widetilde{k}_2(z_2 - z_1)\right) = \widetilde{k}_1 k_2\eta_1 \tan\left(\widetilde{k}_1(z_0 - z_1)\right),$$
$$\widetilde{k}_1 k_2\eta_2 \tan\left(\widetilde{k}_2(z_2 - z_1)\right) = \widetilde{k}_2 k_1\eta_1 \tan\left(\widetilde{k}_1(z_0 - z_1)\right).$$

Les constantes de matériaux étant complexes, il n'est pas possible d'en déduire des conditions sur (k_x, k_y). □

Conclusion

Nous avons réussi à fournir pour plusieurs CIOE des CSU qui permettent de garantir l'unicité des solutions du problème de Maxwell. Nous avons vu que ces conditions étaient non-linéaires, s'exprimaient comme des inégalités, des égalités, mais aussi par différences (ex $z \neq 0$). Par contre, elles sont indépendantes de la géométrie et de la fréquence. De plus, nous sommes en mesure de calculer l'expression des champs et de l'opérateur d'impédance grâce au calcul en amont d'un déterminant. Grâce à cette condition, le problème est bien posé.

Chapitre 3

Calcul des coefficients pour un plan infini

Sommaire

Introduction 42
3.1 Analyse de Fourier de l'impédance 42
3.2 Opérateur de Calderón pour un plan 43
3.2.1 Expressions des champs tangentiels dans chaque couche . 44
3.2.2 Expression de la matrice d'impédance pour une couche de matériau 46
3.2.3 Expression de la matrice d'impédance pour plusieurs couches 49
3.2.4 Expression des coefficients de la série de Fourier 52
3.2.5 Applications numériques 55
3.3 Approximation par une CIOE de l'opérateur de Calderón plan 56
3.3.1 Expression des opérateurs LD, LR en Fourier 56
3.3.2 Expression de l'approximation du symbole de Calderón par une condition d'impédance 58
3.3.3 Le cas spécial de la condition de Leontovich 59
3.4 Choix 1 des coefficients de la CI3 59
3.4.1 Calcul des coefficients pour une incidence (k_x, k_y) donnée 59
3.4.2 Balayage en incidences et moindres carrés 60
3.4.3 Inversibilité des matrices Mci 61
3.4.4 Calcul des coefficients des CIOE par moindres carrés . . . 63
3.4.5 Résultats numériques sans contraintes 64
3.4.6 Problème de la singularité de l'impédance dans le cadre du plan infini pour une couche de matériau sans perte . . 67
3.4.7 Choix de la méthode numérique pour résoudre la minimisation sous contraintes 70
3.4.8 Résultats numériques avec contraintes 70
3.5 Choix 2 des coefficients de la CI3 72
3.5.1 Expression de la fonction JR 72
Conclusion 75

Introduction

Pour déterminer des coefficients complexes satisfaisants aux conditions introduites dans la partie précédente, nous commençons par la méthode de l'approximation du plan tangent, documenté par Hoppe et al. 1995 ; Marceaux et al. 2000 ; Aubakirov 2014. Cette méthode consiste à considérer localement l'objet, supposé régulier, comme son plan tangent comme un plan infini, ce qui reste valable dans le cadre de cette thèse, car nos objets d'études sont parfaitement réguliers.
Nous rappellerons l'opérateur de Calderón exact qui lie les champs électromagnétiques à la surface extérieure de l'objet, ainsi que la condition nécessaire pour l'obtenir. Pour des considérations de mise en œuvre numérique, nous présenterons une méthode itérative pour exprimer cet opérateur. Cette dernière va ajouter des conditions, dont nous rappellerons qu'elles ne sont à considérer que dans le cadre de cette méthode itérative.

3.1 Analyse de Fourier de l'impédance

Des résultats sur l'analyse spectrale de l'opérateur d'impédance ont déjà été présentés par Hoppe et al. 1995 pour des conducteurs plans et cylindriques recouverts d'une couche de matériau. Nous rappellerons la méthode pour les obtenir puis nous montrerons qu'étendre ces résultats à plusieurs couches est immédiat.
Soit Ω un domaine fermé, borné, de frontière régulière. Soit $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_n}$ un repère local adapté à la surface de Ω.
On suppose aussi que ϵ et μ sont constants par couche : $\epsilon(x_1, x_2, x_n) = \epsilon(x_n)$.
On suppose enfin que ces champs $\vec{E}(\vec{x}, t), \vec{H}(\vec{x}, t)$ ont des transformées de Fourier partielles suivant les coordonnées tangentielles et le temps (Yosida 1995, Théorème de Plancherel, p. 153) telles que

$$\begin{aligned}
\hat{\vec{E}}(k_1, k_2, x_n, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+} e^{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \omega t)} \vec{E}(x_1, x_2, x_n, t) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}t, \\
\vec{E}(x_1, x_2, x_n, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \omega t)} \hat{\vec{E}}(k_1, k_2, x_n, \omega) \mathrm{d}k_1 \mathrm{d}k_2 \mathrm{d}\omega.
\end{aligned}$$

La dépendance temporelle des équations de Maxwell harmoniques est $i\omega t$, donc l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial t}$ est remplacé par $i\omega$.
Afin d'utiliser les mêmes conventions que Stupfel 2015, on substitue au champ magnétique $\vec{H}$ l'excitation magnétique $\vec{\mathcal{H}} = \eta_0 \vec{H}$.
Le système d'équations de Maxwell harmonique usuel est

$$\begin{cases}
\vec{\nabla} \wedge \hat{\vec{E}}(k_1, k_2, x_n, \omega) &= -i\omega\mu(x_n) \hat{\vec{H}}(k_1, k_2, x_n, \omega), \\
\vec{\nabla} \wedge \hat{\vec{H}}(k_1, k_2, x_n, \omega) &= i\omega\epsilon(x_n) \hat{\vec{E}}(k_1, k_2, x_n, \omega).
\end{cases}, \tag{3.1.1}$$

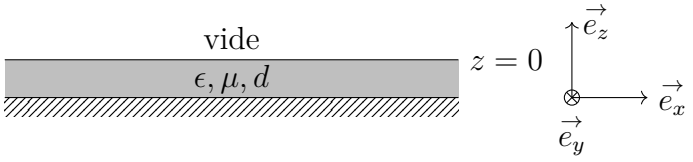
mais le système considéré dans cette thèse est

$$\begin{cases}
\vec{\nabla} \wedge \hat{\vec{E}}(k_1, k_2, x_n, \omega) &= -ik(x_n)\eta_r(x_n) \hat{\vec{\mathcal{H}}}(k_1, k_2, x_n, \omega), \\
\vec{\nabla} \wedge \hat{\vec{\mathcal{H}}}(k_1, k_2, x_n, \omega) &= ik(x_n)\eta_r^{-1}(x_n) \hat{\vec{E}}(k_1, k_2, x_n, \omega).
\end{cases}. \tag{3.1.2}$$

$\epsilon(x_n) = \epsilon_r(x_n)\epsilon_0$, $\mu(x_n) = \mu_r(x_n)\mu_0$, $\eta_r(x_n) = \sqrt{\mu_r(x_n)/\epsilon_r(x_n)}$, $k = k_0\sqrt{\mu_r(x_n)\epsilon_r(x_n)}$, $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ tel qu'en tout point extérieur de Ω, $\epsilon_r(x_n) = \mu_r(x_n) = 1$.
La quantité cléf de cette thèse, et dont les CIOE vont permettre une approximation, est l'opérateur de Caldéron Cessenat 1996, Def 4, p. 108.
Ce dernier est défini comme l'opérateur qui lie les traces tangentielles des champs solutions du problème harmoniques.
Dans la suite, on ne mentionnera plus la dépendance en ω.

3.2 Expressions exactes des matrices d'impédance et des matrices de réflexion pour un plan infini

Dans un premier temps, on peut sans perte de généralités faire une rotation du repère pour avoir le plan orthogonal à $\vec{z}$. Nous utilisons une transformée partielle en x, y.



$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i(k_x x + k_y y)} \hat{\vec{E}}(k_x, k_y, z) \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y.$$

Grâce à cela, nous simplifions le problème en étudiant $\hat{\vec{E}}$ grâce aux multiplicateurs de Fourier associés aux variables x, y.
Soit k la fonction constante par morceaux telle que

$$k : \ [-d, 0[\cup[0, \infty[\to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto k(z) = \begin{cases} w^2\sqrt{\epsilon\mu} & -d \leq z < 0, \\ w^2\sqrt{\epsilon_0\mu_0} & 0 \leq z < \infty. \end{cases}$$

Définition 3.1. *Soit $(k_x, k_y) \in \mathbb{R}^2$ fixé. Soit k_3 la fonction constante par morceaux en z telle que*

$$k_3 : \ [-d, 0[\cup[0, \infty[\to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto k_3(z); k_3(z)^2 = \begin{cases} k^2 - k_x^2 - k_y^2, \mathrm{Im}(k_3(z)) \geq 0 & -d \leq z < 0 \\ k_0^2 - k_x^2 - k_y^2, \mathrm{Im}(k_3(z)) < 0 & 0 \leq z \end{cases}$$

Le choix du signe de la partie imaginaire se déduit de la décroissance à l'infini des champs diffractés définis ci-dessous.

Proposition 3.2. *On se place dans le matériau et l'on suppose tel que $\forall z \in [-d, 0], k_3(z) \neq 0$. Alors il existe $(c_i(k_x, k_y))_{1 \leq i \leq 4}, \in (\mathbb{C}(\mathbb{R}^2))^4$ tels que les champs solutions de 3.1.2 sont de la forme*

$$\hat{E}_y(k_x, k_y, z) = e^{ik_3(z)z} c_1(k_x, k_y) + e^{-ik_3(z)z} c_2(k_x, k_y),$$

$$\hat{\mathcal{H}}_y(k_x,k_y,z) = e^{ik_3(z)z}c_3(k_x,k_y) + e^{-ik_3(z)z}c_4(k_x,k_y).$$

Les constantes c_i ne peuvent en réalité pas être choisies arbitrairement, car les exponentielles complexes divergent quand $k_x^2+k_y^2 \to \infty$ et ces solutions n'ont pas de transformées de Fourier. Nous supposons que les constantes c_i vérifient la propriété (2.34)*, où il n'y a pas de résonances. Nous supposons que les constantes c_i satisfassent la propriété* (2.34)*.*

Démonstration. On commence par coupler les équations de Maxwell pour obtenir des équations sur chaque champ seul

$$\vec{\Delta}\vec{E} + k(z)^2\vec{E} = 0,$$
$$\vec{\Delta}\vec{\mathcal{H}} + k(z)^2\vec{\mathcal{H}} = 0.$$

Donc chaque composante de chaque champ est solution d'une équation de Helmholtz. On s'intéresse alors à la composante en y seulement :

$$\Delta E_y + k(z)^2 E_y = 0,$$
$$\Delta \mathcal{H}_y + k(z)^2 \mathcal{H}_y = 0.$$

Ces équations aux dérivées partielles (EDP) deviennent pour les transformées de Fourier

$$\frac{\partial^2 \hat{E}_y}{\partial z^2}(k_x,k_y,z) + \left(k(z)^2 - k_x^2 - k_y^2\right)\hat{E}_y(k_x,k_y,z) = 0,$$
$$\frac{\partial^2 \hat{\mathcal{H}}_y}{\partial z^2}(k_x,k_y,z) + \left(k(z)^2 - k_x^2 - k_y^2\right)\hat{\mathcal{H}}_y(k_x,k_y,z) = 0.$$

On suppose alors que $k_3(z)^2$ ne s'annule pas dans la couche. S'il s'annule, les solutions sont linéaires en z et nous renvoyons à l'annexe D.
Une solution générale s'écrit alors

$$\hat{E}_y(k_x,k_y,z) = e^{ik_3(z)z}c_1(k_x,k_y) + e^{-ik_3(z)z}c_2(k_x,k_y),$$
$$\hat{\mathcal{H}}_y(k_x,k_y,z) = e^{ik_3(z)z}c_3(k_x,k_y) + e^{-ik_3(z)z}c_4(k_x,k_y).$$

□

Par abus de notation, on identifie $\epsilon \equiv \epsilon(-d^+) = \epsilon(0^-)$, $\mu \equiv \mu(-d^+) = \mu(0^-)$, $k \equiv k(-d^+) = k(0^-)$, $k_3 \equiv k_3(-d^+) = k_3(0^-)$.

3.2.1 Expressions des champs tangentiels dans chaque couche

Remark 3.3. *Nous supposerons dans ce qui suit certaines matrices inversibles (en autres, $\mathbf{B}_E(k_x,k_y,-d^+)$, voir plus loin pour la définition de cette dernière).*
Ceci est uniquement une commodité de calcul mais n'est pas une condition nécessaire d'existence de l'opérateur de Calderón. On identifie l'existence et l'unicité d'un champ vérifiant les équations de Maxwell harmoniques avec condition de Dirichlet à l'existence de l'opérateur de Caldéron.
Voir par exemple la proposition 2.34 pour un exemple de condition nécessaire d'existence pour 2 couches.

Définition 3.4. *On définit les matrices* $\mathbf{A}_E(k_x, k_y, z)$, $\mathbf{B}_E(k_x, k_y, z)$, $\mathbf{A}_H(k_x, k_y, z)$, $\mathbf{B}_H(k_x, k_y, z)$ *constantes par morceaux en* z

$$\mathbf{A}_E(k_x, k_y, z) = e^{ik_3(z)z} \begin{bmatrix} -\dfrac{k_x k_y}{k(z)^2 - k_y^2} & -\dfrac{k(z)\eta_r(z)k_3(z)}{k(z)^2 - k_y^2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_E(k_x, k_y, z) = e^{-ik_3(z)z} \begin{bmatrix} -\dfrac{k_x k_y}{k(z)^2 - k_y^2} & \dfrac{k(z)\eta_r(z)(z)k_3(z)}{k(z)^2 - k_y^2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_H(k_x, k_y, z) = e^{ik_3(z)z} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{k(z)k_3(z)}{\eta_r(z)(k(z)^2 - k_y^2)} & -\dfrac{k_x k_y}{k(z)^2 - k_y^2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_H(k_x, k_y, z) = e^{-ik_3(z)z} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\dfrac{k(z)k_3(z)}{\eta_r(z)(k(z)^2 - k_y^2)} & -\dfrac{k_x k_y}{k(z)^2 - k_y^2} \end{bmatrix}.$$

On remarque que ϵ, μ sont constantes par morceaux, donc k, η_r aussi. Sur une interface d'équation $z = z_p$ entre deux matériaux, il y a donc un saut de valeurs pour ces matrices : $\lim_{\delta \to 0} \mathbf{A}_E(k_x, k_y, z_p + \delta) - \mathbf{A}_E(k_x, k_y, z_p - \delta) \neq 0$.

Proposition 3.5. *Il existe* $(c_i(k_x, k_y, z))_{1 \leq i \leq 4}$ *constants par morceaux en* z *tels que les composantes en* $\vec{e_x}, \vec{e_y}$ *des champs sont*

$$\hat{\vec{E}}_t(k_x, k_y, z) = \mathbf{A}_E(k_x, k_y, z) \begin{bmatrix} c_1(k_x, k_y, z) \\ c_3(k_x, k_y, z) \end{bmatrix} + \mathbf{B}_E(k_x, k_y, z) \begin{bmatrix} c_2(k_x, k_y, z) \\ c_4(k_x, k_y, z) \end{bmatrix},$$

$$\hat{\vec{J}}_t(k_x, k_y, z) = \mathbf{A}_H(k_x, k_y, z) \begin{bmatrix} c_1(k_x, k_y, z) \\ c_3(k_x, k_y, z) \end{bmatrix} + \mathbf{B}_H(k_x, k_y, z) \begin{bmatrix} c_2(k_x, k_y, z) \\ c_4(k_x, k_y, z) \end{bmatrix}.$$

Démonstration. On se place dans une couche, les constantes de matériaux sont donc fixées.
À partir des composantes $\vec{e_x}, \vec{e_y}$ des équations de Maxwell, on détermine un système d'équations différentielles ordinaires (EDO) sur $\hat{E}_x, \hat{E}_z, \hat{\mathcal{H}}_x, \hat{\mathcal{H}}_z$ à partir de $\hat{E}_z, \hat{\mathcal{H}}_z$.

$$\begin{cases} ik_y \hat{E}_z - \dfrac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} = -ik\eta_r \hat{\mathcal{H}}_x, \\ ik_x \hat{E}_y - ik_y \hat{E}_x = -ik\eta_r \hat{\mathcal{H}}_z, \end{cases} \qquad \begin{cases} ik_y \hat{\mathcal{H}}_z - \dfrac{\partial \hat{\mathcal{H}}_y}{\partial z} = ik\eta_r^{-1} \hat{E}_x, \\ ik_x \hat{\mathcal{H}}_y - ik_y \hat{\mathcal{H}}_x = ik\eta_r^{-1} \hat{E}_z. \end{cases}$$

Cela revient à résoudre $Y = \mathbf{M}X$ où la matrice $\mathbf{M}$ et les vecteurs X, Y sont définis tels que

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & -ik_y & -ik\eta_r & 0 \\ ik_y & 0 & 0 & -ik\eta_r \\ ik\eta_r^{-1} & 0 & 0 & -ik_y \\ 0 & ik\eta_r^{-1} & ik_y & 0 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} \hat{E}_x \\ \hat{E}_z \\ \hat{\mathcal{H}}_x \\ \hat{\mathcal{H}}_z \end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} \\ ik_x \hat{E}_y \\ -\dfrac{\partial \hat{\mathcal{H}}_y}{\partial z} \\ ik_x \hat{\mathcal{H}}_y \end{bmatrix}.$$

Cette matrice est inversible si $\det(\mathbf{M}) = (k^2 - k_y^2)^2$ est non nul, ce qu'on suppose, on peut en déduire X

$$\begin{bmatrix} \hat{E}_x \\ \hat{E}_z \\ \hat{\mathcal{H}}_x \\ \hat{\mathcal{H}}_z \end{bmatrix} = \frac{1}{k^2 - k_y^2} \begin{bmatrix} 0 & ik_y & -ik\eta_r & 0 \\ -ik_y & 0 & 0 & -ik\eta_r \\ ik\eta_r^{-1} & 0 & 0 & ik_y \\ 0 & ik\eta_r^{-1} & -ik_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} \\ ik_x \hat{E}_y \\ -\dfrac{\partial \hat{\mathcal{H}}_y}{\partial z} \\ ik_x \hat{\mathcal{H}}_y \end{bmatrix}.$$

On extrait alors uniquement les composantes tangentielles

$$\begin{cases} \hat{E}_x = \dfrac{1}{k^2 - k_y^2} \left(ik_y ik_x \hat{E}_y + ik\eta_r \dfrac{\partial \hat{\mathcal{H}}_y}{\partial z} \right), \\ \hat{E}_y = e^{ik_3 z} c_1 + e^{-ik_3 z} c_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\hat{\mathcal{H}}_y = -e^{ik_3 z} c_3 - e^{-ik_3 z} c_4, \\ \hat{\mathcal{H}}_x = \dfrac{1}{k^2 - k_y^2} \left(-ik\eta_r^{-1} \dfrac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} + ik_y ik_x \hat{\mathcal{H}}_y \right). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{E}_x = \dfrac{1}{k^2 - k_y^2} \left(-\left(k_y k_x c_1 + k\eta_r k_3 c_3\right) e^{ik_3 z} - \left(k_y k_x c_2 - k\eta_r k_3 c_4\right) e^{-ik_3 z} \right), \\ \hat{E}_y = e^{ik_3 z} c_1 + e^{-ik_3 z} c_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\hat{\mathcal{H}}_y = -e^{ik_3 z} c_3 - e^{-ik_3 z} c_4, \\ \hat{\mathcal{H}}_x = \dfrac{1}{k^2 - k_y^2} \left(\left(k\eta_r^{-1} k_3 c_1 - k_y k_x c_3 \right) e^{ik_3 z} + \left(-k\eta_r^{-1} k_3 c_2 - k_y k_x c_4 \right) e^{-ik_3 z} \right). \end{cases}$$

On obtient alors

$$\hat{\vec{E}}_t(k_x, k_y, z) = \mathbf{A}_E(k_x, k_y, z) \begin{bmatrix} c_1(k_x, k_y) \\ c_3(k_x, k_y) \end{bmatrix} + \mathbf{B}_E(k_x, k_y, z) \begin{bmatrix} c_2(k_x, k_y) \\ c_4(k_x, k_y) \end{bmatrix},$$
$$\hat{\vec{J}}_t(k_x, k_y, z) = \mathbf{A}_H(k_x, k_y, z) \begin{bmatrix} c_1(k_x, k_y) \\ c_3(k_x, k_y) \end{bmatrix} + \mathbf{B}_H(k_x, k_y, z) \begin{bmatrix} c_2(k_x, k_y) \\ c_4(k_x, k_y) \end{bmatrix}.$$

□

3.2.2 Expression de la matrice d'impédance pour une couche de matériau

On commence par montrer un lemme très utile pour trouver l'expression de $\hat{\mathbf{Z}}(k_x, k_y)$.

Lemme 3.6 (Continuité des impédances)**.**
Soit z_m une interface entre deux matériaux. Soient $(\vec{E}_t, \vec{\mathcal{H}}_t)$ des champs solutions du problème de Maxwell dans les deux couches, alors si l'on peut définir des matrices qui lient les traces tangentielles des champs à l'interface de ces couches, alors ces matrices sont identiques sur l'interface.
Si

$$\hat{\vec{E}}_t(k_x, k_y, z_m^+) = \hat{\mathbf{Z}}^+(k_x, k_y) \hat{\vec{J}}_t(k_x, k_y, z_m^+),$$

$$\hat{\vec{E}}_t(k_x, k_y, z_m^-) = \hat{\mathbf{Z}}^-(k_x, k_y)\hat{\vec{J}}_t(k_x, k_y, z_m^-).$$

Alors

$$\hat{\mathbf{Z}}^+(k_x, k_y) = \hat{\mathbf{Z}}^-(k_x, k_y).$$

Démonstration.

$$\hat{\vec{E}}_t(k_x, k_y, z_m^+) = \hat{\mathbf{Z}}^+(k_x, k_y)\hat{\vec{J}}_t(k_x, k_y, z_m^+).$$

On utilise la continuité des champs

$$\hat{\vec{E}}_t(k_x, k_y, z_m^-) = \hat{\mathbf{Z}}^+(k_x, k_y)\hat{\vec{J}}_t(k_x, k_y, z_m^-).$$

Ce qui s'identifie à $\hat{\mathbf{Z}}^-(k_x, k_y)$

$$\hat{\vec{E}}_t(k_x, k_y, z_m^-) = \hat{\mathbf{Z}}^-(k_x, k_y)\hat{\vec{J}}_t(k_x, k_y, z_m^-).$$

□

Définition 3.7. *On définit $\hat{\mathbf{Z}}(k_x, k_y)$ la fonction de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{C}^2)$ telle que*

$$k_3 = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \neq 0, \qquad \hat{\mathbf{Z}}(k_x, k_y) = i\eta_r \frac{\tan(k_3 d)}{k k_3}\begin{bmatrix} k^2 - k_x^2 & -k_x k_y \\ -k_x k_y & k^2 - k_y^2 \end{bmatrix}.$$

Proposition 3.8. *Soient $(\vec{E}, \vec{\mathcal{H}})$ une solution du problème de Maxwell-Helmholtz harmonique* (3.1.2) *dans la couche avec les conditions aux limites $\vec{E}_{t|z=-d} = 0$ et $\vec{E}_{t|z=0} = \vec{E}_0$.*
Si on suppose que

$$k_3 \neq 0,$$
$$k_3 d \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\,, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors il existe une unique solution, et cette solution conduit à

$$\hat{\vec{E}}_t(k_x, k_y, 0^-) = \hat{\mathbf{Z}}(k_x, k_y)\hat{\vec{J}}_t(k_x, k_y, 0^-),$$

où $\hat{\mathbf{Z}}(k_x, k_y)$ est donné dans la définition précédente.

Démonstration. Dans la couche, étant donné les expressions des champs, il existe une répartition des constantes (c_1, c_2, c_3, c_4) telles que (c_i, c_j) s'exprime en fonction de (c_k, c_l). Ici nous choisissons

$$\vec{C}_1(k_x, k_y) = \begin{bmatrix} c_1(k_x, k_y) \\ c_3(k_x, k_y) \end{bmatrix}, \qquad \vec{C}_2(k_x, k_y) = \begin{bmatrix} c_2(k_x, k_y) \\ c_4(k_x, k_y) \end{bmatrix}.$$

Nous utilisons la condition aux limites de conducteur parfait

$$\hat{\vec{E}}_t(k_x, k_y, -d^+) = 0,$$

$$= \mathbf{A}_E(k_x, k_y, -d^+)\vec{C_1}(k_x, k_y) + \mathbf{B}_E(k_x, k_y, -d^+)\vec{C_2}(k_x, k_y).$$

Si l'on suppose que ces matrices sont inversibles, donc que k_3 est non-nul alors on a

$$\vec{C_2}(k_x, k_y) = -\left(\mathbf{B}_E(k_x, k_y, -d^+)\right)^{-1} \mathbf{A}_E(k_x, k_y, -d^+)\vec{C_1}(k_x, k_y).$$

Or on injecte le résultat précédent

$$\hat{\vec{E}}_t(k_x, k_y, 0^-) = \left(\mathbf{A}_E(k_x, k_y, 0^-) - \left(\mathbf{B}_E(k_x, k_y, -d^+)\right)^{-1} \mathbf{A}_E(k_x, k_y, -d^+)\right) \vec{C_1}(k_x, k_y),$$

$$\hat{\vec{J}}_t(k_x, k_y, 0^-) = \left(\mathbf{A}_H(k_x, k_y, 0^-) - \left(\mathbf{B}_E(k_x, k_y, -d^+)\right)^{-1} \mathbf{A}_E(k_x, k_y, -d^+)\right) \vec{C_1}(k_x, k_y).$$

On en déduit l'impédance

$$\hat{\mathbf{Z}}(k_x, k_y) = \left(\mathbf{A}_E(k_x, k_y, 0^-) - \mathbf{B}_E(k_x, k_y, 0^-)\left(\mathbf{B}_E(k_x, k_y, -d^+)\right)^{-1} \mathbf{A}_E(k_x, k_y, -d^+)\right) \left(\mathbf{A}_H(k_x, k_y, 0^-) - \mathbf{B}_H(k_x, k_y, 0^-)\left(\mathbf{B}_H(k_x, k_y, -d^+)\right)^{-1} \mathbf{A}_E(k_x, k_y, -d^+)\right)^{-1}.$$

Comme on a supposé les matrices inversibles

$$\hat{\mathbf{Z}}(k_x, k_y) = \left(\mathbf{A}_E(k_x, k_y, 0^-)\left(\mathbf{A}_E(k_x, k_y, -d^+)\right)^{-1} - \mathbf{B}_E(k_x, k_y, 0^-)\left(\mathbf{B}_E(k_x, k_y, -d^+)\right)^{-1}\right) \left(\mathbf{A}_H(k_x, k_y, 0^-)\left(\mathbf{A}_E(k_x, k_y, -d^+)\right)^{-1} - \mathbf{B}_H(k_x, k_y, 0^-)\left(\mathbf{B}_E(k_x, k_y, -d^+)\right)^{-1}\right)^{-1}.$$

On va alors exprimer chacun des termes grâce aux expressions des matrices

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_E(k_x, k_y, 0^-)\left(\mathbf{A}_E(k_x, k_y, -d^+)\right)^{-1} &= e^{ik_3 d}\mathbf{I}, \\
\mathbf{B}_E(k_x, k_y, 0^-)\left(\mathbf{B}_E(k_x, k_y, -d^+)\right)^{-1} &= e^{-ik_3 d}\mathbf{I}, \\
\mathbf{A}_H(k_x, k_y, 0^-)\left(\mathbf{A}_E(k_x, k_y, -d^+)\right)^{-1} &= e^{ik_3 d}\frac{1}{k\eta_r k_3}\begin{bmatrix} k^2 - k_y^2 & k_x k_y \\ k_x k_y & k^2 - k_x^2 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{B}_H(k_x, k_y, 0^-)\left(\mathbf{B}_E(k_x, k_y, -d^+)\right)^{-1} &= -e^{-ik_3 d}\frac{1}{k\eta_r k_3}\begin{bmatrix} k^2 - k_y^2 & k_x k_y \\ k_x k_y & k^2 - k_x^2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Soient les matrices $\hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}, \hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}$ définies à la section 3.3.1

$$\hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}} = -\begin{bmatrix} k_x^2 & k_x k_y \\ k_x k_y & k_y^2 \end{bmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} k_y^2 & -k_x k_y \\ -k_x k_y & k_x^2 \end{bmatrix}.$$

On remarque alors que

$$\mathbf{A}_H(k_x, k_y, 0^-)\left(\mathbf{A}_E(k_x, k_y, -d^+)\right)^{-1} = e^{ik_3 d}\frac{1}{k\eta_r k_3}(k^2\mathbf{I} - \hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}),$$

$$\mathbf{B}_H(k_x,k_y,0^-)\left(\mathbf{B}_E(k_x,k_y,-d^+)\right)^{-1} = -e^{-ik_3d}\frac{1}{k\eta_r k_3}(k^2\mathbf{I}-\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}).$$

Ces matrices sont inversibles si k_3 est non nul, ce que nous avons déjà supposé.
Un simple calcul matriciel permet de trouver que $(k^2\mathbf{I}-\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}})^{-1} = \frac{1}{k^2k_3^2}\left(k^2\mathbf{I}+\hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}\right)$.
En supposant $k_3d \neq \frac{\pi}{2}+n\pi$, donc $e^{ik_3d}+e^{-ik_3d}\neq 0$ on déduit que

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{Z}}(k_x,k_y) &= \frac{\eta_r}{kk_3}\frac{e^{ik_3d}-e^{-ik_3d}}{e^{ik_3d}+e^{-ik_3d}}\left(k^2\mathbf{I}+\hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}\right),\\ &= i\eta_r\frac{\tan(k_3d)}{kk_3}\left(k^2\mathbf{I}+\hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}\right).\end{aligned}$$

On a démontré la propositon 3.8 avec l'expression de la définition 3.7. □

Dans l'article de Marceaux et al. 2000, la matrice d'impédance est telle que, soit $\vec{K} = \vec{n}\wedge\vec{E}$ alors on a

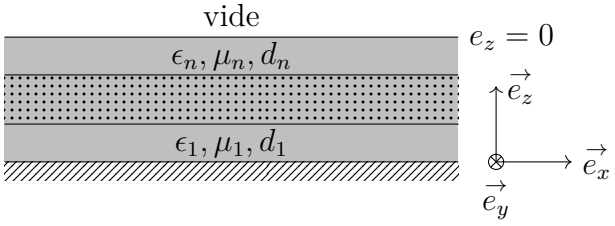
$$\hat{\vec{K}}_t = \hat{\mathfrak{Z}}\hat{\vec{\mathcal{H}}}_t, \text{où} \qquad \hat{\mathfrak{Z}} = -i\eta_r\frac{\tan(k_3d)}{kk_3}\left(k^2\mathbf{I}-\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}\right).$$

C'est une forme équivalente à la nôtre où $\hat{\mathbf{Z}} = \mathbf{T}\hat{\mathfrak{Z}}\mathbf{T}$ avec $\mathbf{T} = \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.
Notons que $\hat{\mathbf{Z}}(k_x,0)$ est une matrice diagonale.
Dans la littérature (Stupfel 2015 ; Aubakirov 2014 ; Hoppe et al. 1995), on nomme les termes diagonaux $\hat{Z}_{TM}, \hat{Z}_{TE}$ tels que

$$\hat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix}\hat{Z}_{TM} & 0\\ 0 & \hat{Z}_{TE}\end{bmatrix}.$$

3.2.3 Expression de la matrice d'impédance pour plusieurs couches

On suppose que l'on a n couches de matériaux :



On suppose qu'il n'y pas de résonances donc que la condition nécessaire à l'existence de l'opérateur de Calderón est vérifié. Nous rappelons que nous avons montré le cas de deux douches à la proposition 2.34.
Soit z_p la hauteur de l'interface p, $z_p = -\sum_{i=p+1}^{n} d_i$. On dit que l'on se trouve dans la couche p si $z_{p-1} \leq z < z_p$.

Définition 3.9. *On définit les fonctions de* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times[z_{p-1},z_p[\times\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ *:*

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_A(k_x,k_y,z,\mathbf{Z})&=\mathbf{A}_E(k_x,k_y,z)-\mathbf{Z}\mathbf{A}_H(k_x,k_y,z),\\ \mathbf{M}_B(k_x,k_y,z,\mathbf{Z})&=\mathbf{B}_E(k_x,k_y,z)-\mathbf{Z}\mathbf{B}_H(k_x,k_y,z).\end{aligned}$$

Définition 3.10. *On définit la fonction de* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times[z_{p-1},z_p[\times\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ *:*

$$\hat{\mathbf{R}}(k_x,k_y,z,\mathbf{Z})=-\mathbf{M}_B(k_x,k_y,z,\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{M}_A(k_x,k_y,z,\mathbf{Z}).$$

A priori, pour k_x,k_y,z donnés, $\hat{\mathbf{R}}(k_x,k_y,z,\mathbf{Z})$ n'est pas définie pour toute matrice $\mathbf{Z}$. On prolonge ces définitions aux autres couches.

Définition 3.11. *On définit* $\mathbf{T}_p$ *la fonction de* $\mathbb{R}^2\times\times[z_{p-1},z_p[^2\times\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ *:*

$$\begin{aligned}&\mathbf{T}_p(k_x,k_y,z,z',\mathbf{Z})=\\ &\quad\Big(\mathbf{A}_E(k_x,k_y,z,)\mathbf{M}_A(k_x,k_y,z',\mathbf{Z})^{-1}-\mathbf{B}_E(k_x,k_y,z,)\mathbf{M}_B(k_x,k_y,z',\mathbf{Z})^{-1}\Big)\\ &\quad\Big(\mathbf{A}_H(k_x,k_y,z,)\mathbf{M}_A(k_x,k_y,z',\mathbf{Z})^{-1}-\mathbf{B}_H(k_x,k_y,z,)\mathbf{M}_B(k_x,k_y,z',\mathbf{Z})^{-1}\Big)^{-1}.\end{aligned}$$

A priori, pour (k_x,k_y,z,z') donnés, $\mathbf{T}_p(k_x,k_y,z,z',\mathbf{Z})$ n'est pas définie pour toute matrice $\mathbf{Z}$.
Nous allons donc pouvoir exprimer l'approche itérative : déterminer la relation liant les champs électromagnétiques d'une couche à l'autre.

Proposition 3.12. *Soient* $\hat{\vec{E}},\hat{\vec{\mathcal{H}}}$ *tels que* $\hat{\vec{E}}_t(k_x,k_y,z_p^-)=\hat{\mathbf{Z}}_p(k_x,k_y)\hat{\vec{J}}_t(k_x,k_y,z_p^-)$.
Si les matrices suivantes sont inversibles

$$\mathbf{M}_A(k_x,k_y,z_p^-,\hat{\mathbf{Z}}_p(k_x,k_y)),\qquad\qquad\mathbf{M}_B(k_x,k_y,z_p^-,\hat{\mathbf{Z}}_p(k_x,k_y)),$$

$$\mathbf{A}_H(k_x,k_y,z_{p-1})\mathbf{M}_A(k_x,k_y,z_p^-,\hat{\mathbf{Z}}_p(k_x,k_y))^{-1}-\mathbf{B}_H(k_x,k_y,z_{p-1})\mathbf{M}_B(k_x,k_y,z_p^-,\hat{\mathbf{Z}}_p(k_x,k_y))^{-1},$$

alors $\hat{\vec{E}}_t(k_x,k_y,z_{p-1})=\mathbf{T}_p(k_x,k_y,z_{p-1},z_p^-,\hat{\mathbf{Z}}_p(k_x,k_y))(\hat{\vec{J}}_t(k_x,k_y,z_{p-1}))$.
Une condition aux limites sur le bord supérieur d'une couche détermine la condition aux limites sur le bord inférieur.

Démonstration. On se situe dans la couche p ($z_{p-1}\le z<z_p$) et l'on sait qu'il existe dans cette couche des constantes $c_i(k_x,k_y)$ telles que les champs vérifient

$$\begin{aligned}&\mathbf{A}_E(k_x,k_y,z_p^-)\begin{bmatrix}c_1(k_x,k_y)\\c_3(k_x,k_y)\end{bmatrix}+\mathbf{B}_E(k_x,k_y,z_p^-)\begin{bmatrix}c_2(k_x,k_y)\\c_4(k_x,k_y)\end{bmatrix}=\\ &\qquad\hat{\mathbf{Z}}_p(k_x,k_y)\left(\mathbf{A}_H(k_x,k_y,z_p^-)\begin{bmatrix}c_1(k_x,k_y)\\c_3(k_x,k_y)\end{bmatrix}+\mathbf{B}_H(k_x,k_y,z_p^-)\begin{bmatrix}c_2(k_x,k_y)\\c_4(k_x,k_y)\end{bmatrix}\right).\end{aligned}$$

Ce qui revient à

$$\mathbf{M}_A(k_x,k_y,z_p^-,\hat{\mathbf{Z}}_p(k_x,k_y))\begin{bmatrix}c_1(k_x,k_y)\\c_3(k_x,k_y)\end{bmatrix}=-\mathbf{M}_B(k_x,k_y,z_p^-,\hat{\mathbf{Z}}_p(k_x,k_y))\begin{bmatrix}c_2(k_x,k_y)\\c_4(k_x,k_y)\end{bmatrix}.$$

On suppose que les matrices $\mathbf{M}_A(k_x, k_y, z_p^-, \hat{\mathbf{Z}}_p(k_x, k_y)), \mathbf{M}_B(k_x, k_y, z_p^-, \hat{\mathbf{Z}}_p(k_x, k_y))$ sont inversibles donc

$$\begin{bmatrix} c_2(k_x, k_y) \\ c_4(k_x, k_y) \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{R}}(k_x, k_y, z_p^-, \hat{\mathbf{Z}}_p(k_x, k_y)) \begin{bmatrix} c_1(k_x, k_y) \\ c_3(k_x, k_y) \end{bmatrix}.$$

On injecte ce qui précède en $z = z_{p-1}$:

$$\hat{\vec{E}}_t(k_x, k_y, z_{p-1}) = \left(\mathbf{B}_E(k_x, k_y, z_{p-1})\hat{\mathbf{R}}(k_x, k_y, z_p^-, \hat{\mathbf{Z}}_p(k_x, k_y)) + \mathbf{A}_E(k_x, k_y, z_{p-1})\right) \begin{bmatrix} c_1(k_x, k_y) \\ c_3(k_x, k_y) \end{bmatrix},$$

$$\hat{\vec{J}}_t(k_x, k_y, z_{p-1}) = \left(\mathbf{B}_H(k_x, k_y, z_{p-1})\hat{\mathbf{R}}(k_x, k_y, z_p^-, \hat{\mathbf{Z}}_p(k_x, k_y)) + \mathbf{A}_H(k_x, k_y, z_{p-1}))\right) \begin{bmatrix} c_1(k_x, k_y) \\ c_3(k_x, k_y) \end{bmatrix}.$$

On suppose alors que cette dernière est inversible pour tout (k_x, k_y).
On obtient

$$\hat{\vec{E}}_t(k_x, k_y, z_{p-1}) = \left(\mathbf{A}_E(k_x, k_y, z_{p-1}) + \mathbf{B}_E(k_x, k_y, z_{p-1})\hat{\mathbf{R}}(k_x, k_y, z_p^-, \hat{\mathbf{Z}}_p(k_x, k_y))\right) \left(\mathbf{A}_H(k_x, k_y, z_{p-1}) + \mathbf{B}_H(k_x, k_y, z_{p-1})\hat{\mathbf{R}}(k_x, k_y, z_p^-, \hat{\mathbf{Z}}_p(k_x, k_y))\right)^{-1} \hat{\vec{J}}_t(k_x, k_y, z_{p-1}).$$

Comme on a supposé l'inversibilité des deux matrices $\mathbf{M}_A$, $\mathbf{M}_B$, on simplifie afin d'obtenir la propriété. □

Proposition 3.13. *Soient $\hat{\vec{E}}_t, \hat{\vec{\mathcal{H}}}_t$ tels que $\vec{E}_t(k_x, k_y, z_{p-1}) = \hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(k_x, k_y)\hat{\vec{J}}_t(k_x, k_y, z_{p-1})$. Si les matrices suivantes sont inversibles*

$$\mathbf{M}_A(k_x, k_y, z_{p-1}, \hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(k_x, k_y)), \qquad \mathbf{M}_B(k_x, k_y, z_{p-1}, \hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(k_x, k_y)),$$

$$\mathbf{B}_H(k_x, k_y, z_p^-)\mathbf{M}_B(k_x, k_y, z_{p-1}, \hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(k_x, k_y))^{-1} - \mathbf{A}_H(k_x, k_y, z_p^-)\mathbf{M}_A(k_x, k_y, z_{p-1}, \hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(k_x, k_y))^{-1},$$

alors $\hat{\vec{E}}_t(k_x, k_y, z_p^-) = \mathbf{T}_p(k_x, k_y, z_p^-, z_{p-1}, \hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(k_x, k_y))\hat{\vec{J}}_t(k_x, k_y, z_p^-)$.
Une condition d'impédance sur le bord inférieur d'une couche détermine la condition aux limites sur le bord supérieur.

Démonstration. Même méthodologie que pour la proposition 3.12. □

Une analyse rigoureuse des trois résultats qui précèdent est la suivante :

Proposition 3.14. *On considère le problème de Calderón pour p couches.*
Sous condition de non-résonance C_p, le problème P_p, constitué des équations des Maxwell dans les p couches avec conditions de Dirichlet, homogène sur l'interface inférieure $z = z_0$ et inhomogène sur l'interface supérieure $z = z_p, \hat{\vec{E}} = \hat{\vec{E}}_0$, a une unique solution, ce qui permet de calculer $\hat{\vec{\mathcal{H}}}|_{z=z_p-}$ et la matrice d'impédance $\hat{\mathbf{Z}}_p$.
Sous condition de non-résonance C_{p-1}, le problème P_{p-1}, constitué des équations des Maxwell dans les $p-1$ premières couches avec conditions de Dirichlet, homogène sur l'interface inférieure $z = z_0$ et inhomogène sur l'interface supérieure $z = z_{p-1}, \hat{\vec{E}} = \hat{\vec{E}}_0^*$, a une unique solution, ce qui permet de calculer $\hat{\vec{\mathcal{H}}}|_{z=z_{p-1}-}$ et la matrice d'impédance $\hat{\mathbf{Z}}_{p-1}$.
Sous les conditions de non-résonance C_p et C_{p-1}, on peut exprimer la matrice $\hat{\mathbf{Z}}_p$ en fonction de $\hat{\mathbf{Z}}_{p-1}$ et réciproquement.

Proposition 3.15.
Soient $\hat{\vec{E}}_t, \hat{\vec{\mathcal{H}}}_t$ tels que

$$\begin{aligned}\hat{\vec{E}}_t(k_x,k_y,z_{p-1}) &= \hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(k_x,k_y)(\hat{\vec{J}}_t(k_x,k_y,z_{p-1})),\\ \hat{\vec{E}}_t(k_x,k_y,z_p^-) &= \hat{\mathbf{Z}}_p(k_x,k_y)(\hat{\vec{J}}_t(k_x,k_y,z_p^-)).\end{aligned}$$

Si les matrices suivantes sont inversibles

$$\begin{aligned}&\mathbf{M}_A(k_x,k_y,z_p^-,\hat{\mathbf{Z}}_p(k_x,k_y)), &&\mathbf{M}_A(k_x,k_y,z_{p-1},\hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(k_x,k_y)),\\ &\mathbf{M}_B(k_x,k_y,z_p^-,\hat{\mathbf{Z}}_p(k_x,k_y)), &&\mathbf{M}_B(k_x,k_y,z_{p-1},\hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(k_x,k_y)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_H(k_x,k_y,z_p^-)\mathbf{M}_A(k_x,k_y,z_{p-1},\hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(k_x,k_y))^{-1} - \mathbf{B}_H(k_x,k_y,z_p^-)\mathbf{M}_B(k_x,k_y,z_{p-1},\hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(k_x,k_y))^{-1},\\ \mathbf{A}_H(k_x,k_y,z_{p-1})\mathbf{M}_A(k_x,k_y,z_p^-,\hat{\mathbf{Z}}_p(k_x,k_y))^{-1} - \mathbf{B}_H(k_x,k_y,z_{p-1})\mathbf{M}_B(k_x,k_y,z_p^-,\hat{\mathbf{Z}}_p(k_x,k_y))^{-1},\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(k_x,k_y) &= \mathbf{T}_p(k_x,k_y,z_{p-1},z_p^-,\hat{\mathbf{Z}}_p(k_x,k_y)),\\ \hat{\mathbf{Z}}_p(k_x,k_y) &= \mathbf{T}_p(k_x,k_y,z_p^-,z_{p-1},\hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(k_x,k_y)).\end{aligned}$$

On peut donc déterminer itérativement les matrices $\hat{\mathbf{Z}}_p$ pour obtenir la matrice associée à l'opérateur de Calderón. Dans notre cadre d'étude, la présence d'un conducteur parfait sur l'interface $z = z_0$ implique $\hat{\mathbf{Z}}_0(k_x,k_y) = 0$.

3.2.4 Expression des coefficients de la série de Fourier

On se place de part et d'autre de l'interface p donc $z_{p-1} \leq z < z_{p+1}$.

Définition 3.16. *On définit les fonctions de $\mathbb{R}^2 \times [z_{p-1}, z_{p+1}[\times \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:*

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_E(k_x,k_y,z,\mathbf{R}) &= \mathbf{A}_E(k_x,k_y,z) + \mathbf{B}_E(k_x,k_y,z)\mathbf{R},\\ \mathbf{N}_H(k_x,k_y,z,\mathbf{R}) &= \mathbf{A}_H(k_x,k_y,z) + \mathbf{B}_H(k_x,k_y,z)\mathbf{R}.\end{aligned}$$

Définition 3.17.
On définit $\mathfrak{T}_p$ la fonction de $\mathbb{R}^2 \times [z_{p-1}, z_p[\times[z_p, z_{p+1}[\times\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_p(k_x, k_y, z, z', \mathbf{Z}) = \\ -\Big(\mathbf{N}_E(k_x, k_y, z', \mathbf{Z})^{-1}\mathbf{B}_E(k_x, k_y, z) - \mathbf{N}_H(k_x, k_y, z', \mathbf{Z})^{-1}\mathbf{B}_H(k_x, k_y, z)\Big)^{-1}, \\ \Big(\mathbf{N}_E(k_x, k_y, z', \mathbf{Z})^{-1}\mathbf{A}_E(k_x, k_y, z) - \mathbf{N}_H(k_x, k_y, z', \mathbf{Z})^{-1}\mathbf{A}_H(k_x, k_y, z)\Big).\end{aligned}$$

A priori, pour k_x, k_y, z, z' donnés, $\mathfrak{T}_p(k_x, k_y, z, z', \mathbf{Z})$ n'est pas définie pour toute matrice $\mathbf{Z}$.

Proposition 3.18.
On suppose qu'il existe $\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(k_x, k_y)$ telle que

$$\begin{aligned}\hat{\vec{E}}_t(k_x, k_y, z_p^+) &= \mathbf{N}_E(k_x, k_y, z_p^+, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(k_x, k_y))\vec{C}_{p+1}(k_x, k_y), \\ \hat{\vec{J}}_t(k_x, k_y, z_p^+) &= \mathbf{N}_H(k_x, k_y, z_p^+, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(k_x, k_y))\vec{C}_{p+1}(k_x, k_y).\end{aligned}$$

Si les matrices suivantes sont inversibles

$$\mathbf{N}_E(k_x, k_y, z_p^+, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(k_x, k_y)), \qquad \mathbf{N}_H(k_x, k_y, z_p^+, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(k_x, k_y)),$$

$$\mathbf{N}_E(k_x, k_y, z_p^+, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(k_x, k_y))^{-1}\mathbf{B}_E(k_x, k_y, z_p^-) - \mathbf{N}_H(k_x, k_y, z_p^+, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(k_x, k_y))^{-1}\mathbf{B}_H(k_x, k_y, z_p^-),$$

alors

$$\begin{aligned}\hat{\vec{E}}_t(k_x, k_y, z_p^-) &= \mathbf{N}_E(k_x, k_y, z_p^-, \mathfrak{T}_p(k_x, k_y, z_p^-, z_p^+, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(k_x, k_y)))\vec{C}_p(k_x, k_y), \\ \hat{\vec{E}}_t(k_x, k_y, z_p^-) &= \mathbf{N}_H(k_x, k_y, z_p^-, \mathfrak{T}_p(k_x, k_y, z_p^-, z_p^+, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(k_x, k_y)))\vec{C}_p(k_x, k_y).\end{aligned}$$

Démonstration. De part et d'autre de $z = z_p$, on a

$$\begin{aligned}\hat{\vec{E}}_t(k_x, k_y, z_p^+) &= \mathbf{N}_E(k_x, k_y, z_p^+, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(k_x, k_y))\vec{C}_1^+(k_x, k_y), \\ \hat{\vec{E}}_t(k_x, k_y, z_p^-) &= \mathbf{A}_E(k_x, k_y, z_p^-)\vec{C}_1^-(k_x, k_y) + \mathbf{B}_E(k_x, k_y, z_p^-)\vec{C}_2^-(k_x, k_y),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\vec{J}}_t(k_x, k_y, z_p^+) &= \mathbf{N}_H(k_x, k_y, z_p^+, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(k_x, k_y))\vec{C}_1^+(k_x, k_y), \\ \hat{\vec{J}}_t(k_x, k_y, z_p^-) &= \mathbf{A}_H(k_x, k_y, z_p^-)\vec{C}_1^-(k_x, k_y) + \mathbf{B}_H(k_x, k_y, z_p^-)\vec{C}_2^-(k_x, k_y).\end{aligned}$$

Il y a continuité des champs à l'interface donc

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_E(k_x, k_y, z_p^-)\vec{C}_1^-(k_x, k_y) + \mathbf{B}_E(k_x, k_y, z_p^-)\vec{C}_2^-(k_x, k_y) &= \mathbf{N}_E(k_x, k_y, z_p^+, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(k_x, k_y))\vec{C}_1^+(k_x, k_y), \\ \mathbf{A}_H(k_x, k_y, z_p^-)\vec{C}_1^-(k_x, k_y) + \mathbf{B}_H(k_x, k_y, z_p^-)\vec{C}_2^-(k_x, k_y) &= \mathbf{N}_H(k_x, k_y, z_p^+, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(k_x, k_y))\vec{C}_1^+(k_x, k_y),\end{aligned}$$

donc si on suppose les matrices $\mathbf{N}_E, \mathbf{N}_H$ inversibles

$$\mathbf{N}_E(k_x, k_y, z_p^+, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(k_x, k_y))^{-1}\Big(\mathbf{A}_E(k_x, k_y, z_p^-)\vec{C}_1^-(k_x, k_y) + \mathbf{B}_E(k_x, k_y, z_p^-)\vec{C}_2^-(k_x, k_y)\Big) =$$

$$\mathbf{N}_H(k_x,k_y,z_p^+,\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(k_x,k_y))^{-1}\left(\mathbf{A}_H(k_x,k_y,z_p^-)\vec{C}_1^{\,-}(k_x,k_y)+\mathbf{B}_H(k_x,k_y,z_p^-)\vec{C}_2^{\,-}(k_x,k_y)\right).$$

On regroupe les termes pour obtenir une relation entre les deux vecteurs,

$$\begin{aligned}\Big(&\mathbf{N}_E(k_x,k_y,z_p^+,\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(k_x,k_y))^{-1}\mathbf{A}_E(k_x,k_y,z_p^-)\\ &-\mathbf{N}_H(k_x,k_y,z_p^+,\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(k_x,k_y))^{-1}\mathbf{A}_H(k_x,k_y,z_p^-)\Big)\vec{C}_1^{\,-}(k_x,k_y)=\\ &-\Big(\mathbf{N}_E(k_x,k_y,z_p^+,\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(k_x,k_y))^{-1}\mathbf{B}_E(k_x,k_y,z_p^-)\\ &-\mathbf{N}_H(k_x,k_y,z_p^+,\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(k_x,k_y))^{-1}\mathbf{B}_H(k_x,k_y,z_p^-)\Big)\vec{C}_2^{\,-}(k_x,k_y).\end{aligned}$$

On suppose l'inversibilité de la matrice devant $\vec{C}_1^{\,-}(k_x,k_y)$, et alors

$$\vec{C}_2^{\,-}(k_x,k_y)=\mathfrak{T}_p(k_x,k_y,z_p^-,z_p^+,\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(k_x,k_y))\vec{C}_1^{\,-}(k_x,k_y).$$

□

Proposition 3.19.
On suppose qu'il existe $\hat{\mathbf{R}}_p(k_x,k_y)$ *telle que*

$$\begin{aligned}\hat{\vec{E}}_t(k_x,k_y,z_p^-)&=\mathbf{N}_E(k_x,k_y,z_p^-,\hat{\mathbf{R}}_p(k_x,k_y))\vec{C}_p(k_x,k_y),\\ \hat{\vec{J}}_t(k_x,k_y,z_p^-)&=\mathbf{N}_H(k_x,k_y,z_p^-,\hat{\mathbf{R}}_p(k_x,k_y))\vec{C}_p(k_x,k_y).\end{aligned}$$

Si les matrices suivantes sont inversibles

$$\mathbf{N}_E(k_x,k_y,z_p^-,\mathbf{R}_p(k_x,k_y)),\qquad\qquad \mathbf{N}_H(k_x,k_y,z_p^-,\hat{\mathbf{R}}_p(k_x,k_y)),$$

$$\mathbf{N}_E(k_x,k_y,z_p^-,\mathbf{R}_p(k_x,k_y))^{-1}\mathbf{B}_E(k_x,k_y,z_p^+)-\mathbf{N}_H(k_x,k_y,z_p^-,\hat{\mathbf{R}}_p(k_x,k_y))^{-1}\mathbf{B}_H(k_x,k_y,z_p^+),$$

alors

$$\begin{aligned}\hat{\vec{E}}_t(k_x,k_y,z_p^+)&=\mathbf{N}_E(k_x,k_y,z_p^+,\mathfrak{T}_p(k_x,k_y,z_p^+,z_p^-,\hat{\mathbf{R}}_p(k_x,k_y)))\vec{C}_{p+1}(k_x,k_y),\\ \hat{\vec{E}}_t(k_x,k_y,z_p^+)&=\mathbf{N}_H(k_x,k_y,z_p^+,\mathfrak{T}_p(k_x,k_y,z_p^+,z_p^-,\hat{\mathbf{R}}_p(k_x,k_y)))\vec{C}_{p+1}(k_x,k_y).\end{aligned}$$

Démonstration. Preuve identique à la proposition 3.18. □

Proposition 3.20.
On suppose qu'il existe $\hat{\mathbf{R}}_p(k_x,k_y)$ *et* $\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(k_x,k_y)$ *telles que*

$$\begin{cases}\hat{\vec{E}}_t(k_x,k_y,z_p^-)=\mathbf{N}_E(k_x,k_y,z_p^-,\hat{\mathbf{R}}_p(k_x,k_y))\vec{C}_p(k_x,k_y),\\ \hat{\vec{J}}_t(k_x,k_y,z_p^-)=\mathbf{N}_H(k_x,k_y,z_p^-,\hat{\mathbf{R}}_p(k_x,k_y))\vec{C}_p(k_x,k_y),\end{cases}$$
$$\begin{cases}\hat{\vec{E}}_t(k_x,k_y,z_p^+)=\mathbf{N}_E(k_x,k_y,z_p^+,\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(k_x,k_y))\vec{C}_{p+1}(k_x,k_y),\\ \hat{\vec{J}}_t(k_x,k_y,z_p^+)=\mathbf{N}_H(k_x,k_y,z_p^+,\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(k_x,k_y))\vec{C}_{p+1}(k_x,k_y).\end{cases}$$

Si les matrices suivantes sont inversibles

$$\mathbf{N}_E(k_x,k_y,z_p^-,\mathbf{R}_p(k_x,k_y)), \qquad \mathbf{N}_H(k_x,k_y,z_p^-,\hat{\mathbf{R}}_p(k_x,k_y)),$$
$$\mathbf{N}_E(k_x,k_y,z_p^+,\mathbf{R}_{p+1}(k_x,k_y)), \qquad \mathbf{N}_H(k_x,k_y,z_p^+,\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(k_x,k_y)),$$

$$\mathbf{N}_E(k_x,k_y,z_p^-,\mathbf{R}_p(k_x,k_y))^{-1}\mathbf{B}_E(k_x,k_y,z_p^+) - \mathbf{N}_H(k_x,k_y,z_p^-,\hat{\mathbf{R}}_p(k_x,k_y))^{-1}\mathbf{B}_H(k_x,k_y,z_p^+),$$
$$\mathbf{N}_E(k_x,k_y,z_p^+,\mathbf{R}_{p+1}(k_x,k_y))^{-1}\mathbf{B}_E(k_x,k_y,z_p^-) - \mathbf{N}_H(k_x,k_y,z_p^+,\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(k_x,k_y))^{-1}\mathbf{B}_H(k_x,k_y,z_p^-),$$

alors

$$\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(k_x,k_y) = \mathfrak{T}_p(k_x,k_y,z_p^+,z_p^-,\hat{\mathbf{R}}_p(k_x,k_y)),$$
$$\hat{\mathbf{R}}_p(k_x,k_y) = \mathfrak{T}_p(k_x,k_y,z_p^-,z_p^+,\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(k_x,k_y)).$$

On peut donc déterminer itérativement les matrices $\hat{\mathbf{R}}$ que l'on nomme matrice de réflexion. Dans notre cadre d'étude, la présence d'un conducteur parfait sur l'interface $z = z_0^+$ implique $\mathbf{R}_1(k_x,k_y) = -\mathbf{B}_E(k_x,k_y,z_0^+)^{-1}\mathbf{A}_E(k_x,k_y,z_0^+)$.

3.2.5 Applications numériques

La figure 3.1 permet de vérifier les résultats de Hoppe et al. 1995, p. 33 pour une couche de matériau sans perte. Dans cet ouvrage, l'opérateur de Calderón lie les traces de $\vec{E}_t$ et $\vec{\mathcal{H}}_t$ (voir annexe H) et on pose $\hat{\mathfrak{Z}} = \hat{\mathbf{Z}}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ le symbole de l'opérateur de Calderón utilisé par Hoppe. On remarque que le symbole de Hoppe est dimensionné (en Ohm) tandis que le nôtre non. De plus les ondes évanescentes, c'est-à-dire telles que $k_x > k_0$ sont prisent en compte sur ce graphe. En reproduisant ces résultats, nous nous assurons que notre approche itérative est correctement codée. On applique les hypothèses précédentes d'invariance par rotation, donc $k_y = 0$, sachant que pour $k_x/k_0 = 2$, $k_3(k_x, 0)$ est nul et l'impédance n'est pas définie en ce point.
Comme le matériau n'a pas de perte, la partie réelle de $\hat{\mathbf{Z}}$ est nulle et n'est donc pas tracée.
La figure 3.2 permet de vérifier les résultats de Soudais 2017 pour une couche de matériau sans perte ($\epsilon = 4$, $\mu = 1$, $d = 0.0035$m, $k_0 = 251.5\text{m}^{-1}$) qui montrent la présence d'une asymptote sur le module des coefficients diagonaux de $\hat{\mathbf{Z}}$ pour $k_x/k_0 = \sqrt{\epsilon\mu - \left(\frac{\pi/2}{k_0 d}\right)^2} \simeq 0.903105...$ (voir (3.4.3) pour l'obtention de cette formule).

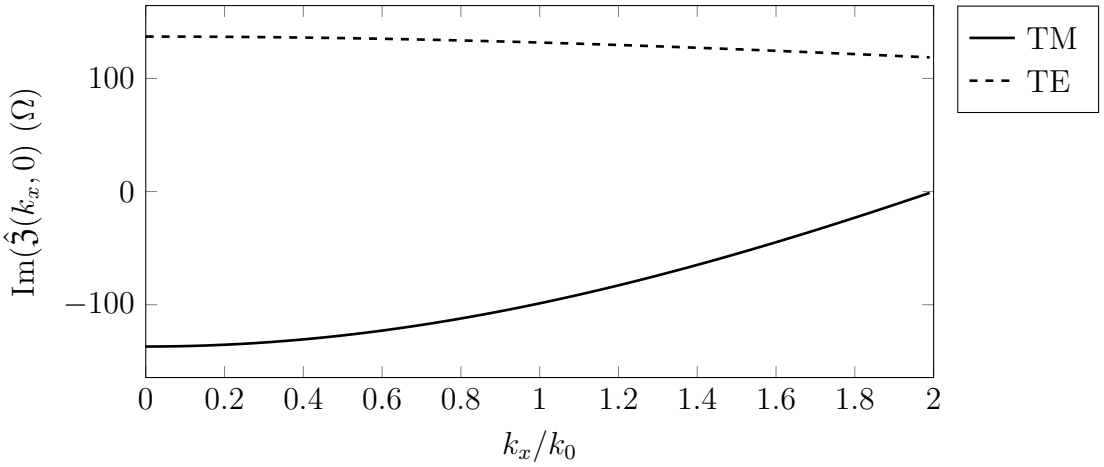


FIGURE 3.1 – Partie imaginaire des coefficients diagonaux de $\hat{\mathfrak{Z}}$ pour $\epsilon = 4, \mu = 1, d = 0.015\text{m}, f = 1\text{GHz}$

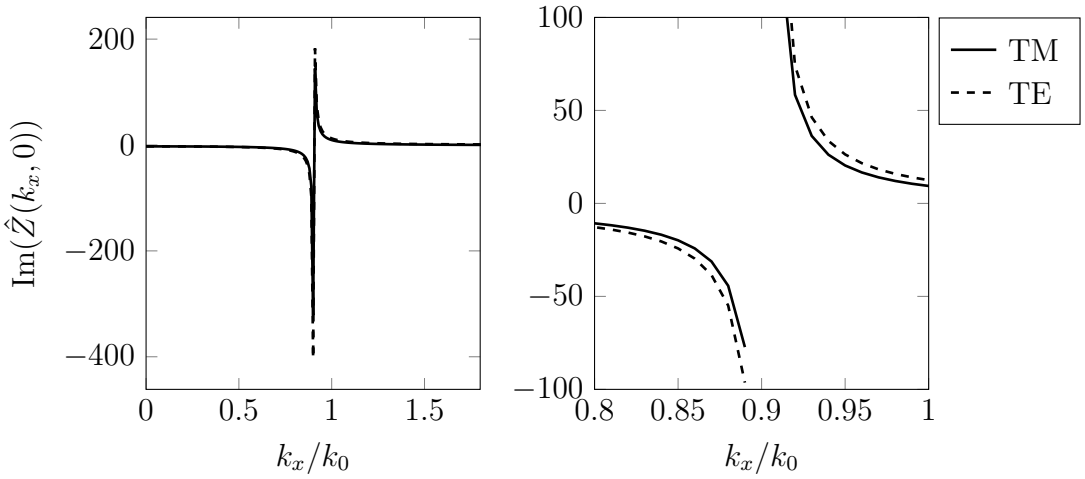


FIGURE 3.2 – Partie imaginaire des coefficients diagonaux de $\hat{\mathbf{Z}}$ pour $\epsilon = 4, \mu = 1, d = 0.0035\text{m}, f = 12\text{GHz}$

3.3 Approximation par une CIOE de l'opérateur de Calderón plan

3.3.1 Expression des opérateurs $\mathcal{L}_D$, $\mathcal{L}_R$ en Fourier

Soient (x, y, z) les coordonnées cartésiennes d'un point de l'espace et un plan d'équation $z = 0$.
Soit $V = (\mathcal{S}(\mathbb{R}^2))^2$ l'espace des fonctions infiniment dérivables définies sur ce plan et de carré intégrable.

Définition 3.21. *On définit $\mathcal{L}_D$ l'opérateur de V tel que*

$$\mathcal{L}_D\vec{U}(x,y,z) = \vec{\nabla}_s\vec{\nabla}_s \cdot \vec{U}(x,y,z).$$

On définit $\hat{\mathbf{L_D}}$ la fonction de $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\hat{\mathbf{L_D}}(k_x,k_y) = -\begin{bmatrix} k_x^2 & k_xk_y \\ k_xk_y & k_y^2 \end{bmatrix}.$$

Proposition 3.22. *Soit $\vec{U} \in V$, alors*

$$\widehat{\mathcal{L}_D \vec{U}}(k_x, k_y, 0) = \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{D}}(k_x, k_y)\hat{\vec{U}}(k_x, k_y, 0).$$

Démonstration. Par définition de $\mathcal{L}_D$, on a

$$\mathcal{L}_D \vec{U} = \vec{\nabla}_s \vec{\nabla}_s \cdot \vec{U}.$$

On utilise les expressions en coordonnées cartésiennes des opérateurs aux dérivées partielles (voir annexe C).

$$\vec{\nabla}_s \cdot \vec{U}(x, y, z) = \frac{\partial U_x}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial U_z}{\partial y}(x, y, z),$$
$$\vec{\nabla}_s f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)\vec{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)\vec{e_y}.$$

Or d'après la définition de la transformée de Fourier

$$\vec{U}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \hat{\vec{U}}(k_x, k_y, z) e^{ik_x x + ik_y y} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y,$$

on a

$$\widehat{\vec{\nabla}_s \cdot \vec{U}}(k_x, k_y, z) = ik_x \hat{U}_x(k_x, k_y, z) + ik_y \hat{U}_y(k_x, k_y, z),$$
$$\widehat{\vec{\nabla}_s f}(k_x, k_y, z) = ik_x \hat{f}(k_x, k_y, z)\vec{e_x} + ik_y \hat{f}(k_x, k_y, z)\vec{e_y},$$

donc

$$\widehat{\mathcal{L}_D \vec{U}}(k_x, k_y, z) = \left(-k_x^2 \vec{e_x} - k_x k_y \vec{e_y}\right) \hat{U}_x(k_x, k_y, z) + \left(-k_x k_y \vec{e_x} - k_y^2 \vec{e_y}\right) \hat{U}_z(k_x, k_y, z).$$

□

Définition 3.23. *On définit $\mathcal{L}_R$ l'opérateur de V tel que*

$$\mathcal{L}_R \vec{U}(x, y, z) = \vec{\nabla}_s \wedge (\nabla_s \wedge \vec{U})(x, y, z).$$

On définit $\hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{R}}$ la fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{R}}(k_x, k_y) = \begin{bmatrix} k_y^2 & -k_x k_y \\ -k_x k_y & k_x^2 \end{bmatrix}.$$

Proposition 3.24. *Soit $\vec{U} \in V$, alors*

$$\widehat{\mathcal{L}_R \vec{U}}(k_x, k_y, 0^+) = \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{R}}(k_x, k_y)\hat{\vec{U}}(k_x, k_y, 0^+).$$

Démonstration. Par définition de $\mathcal{L}_R$, on a

$$\mathcal{L}_R \vec{U} = \vec{\nabla}_s \wedge (\nabla_s \wedge \vec{U}).$$

On utilise les expressions en coordonnées cartésiennes des opérateurs aux dérivées partielles (voir annexe C).

$$\nabla_s \wedge \vec{U}(x,y,z) = \frac{\partial U_y}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial U_x}{\partial y}(x,y,z),$$
$$\vec{\nabla}_s \wedge f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\vec{e_x} - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\vec{e_y},$$

donc comme pour l'opérateur $\mathcal{L}_D$

$$\widehat{\nabla_s \wedge \vec{U}}(k_x,k_y,z) = ik_x\hat{U}_y(k_x,k_y,z) - ik_y\hat{U}_x(k_x,k_y,z),$$
$$\widehat{\vec{\nabla}_s \wedge f}(k_x,k_y,z) = ik_y\hat{f}(k_x,k_y,z)\vec{e_x} - ik_x\hat{f}(k_x,k_y,z)\vec{e_y},$$

donc

$$\widehat{\mathcal{L}_R\vec{U}}(k_x,k_y,z) = \left(k_y^2\vec{e_x} - k_xk_y\vec{e_y}\right)\hat{U}_x(k_x,k_y,z) + \left(-k_xk_y\vec{e_x} + k_x^2\vec{e_y}\right)\hat{U}_z(k_x,k_y,z).$$

□

3.3.2 Expression de l'approximation du symbole de Calderón par une condition d'impédance

Grâce aux multiplicateurs de Fourier matriciels précèdent, on peut par exemple définir $\hat{\mathbf{Z}}_{CI3}$ l'opérateur matriciel associé à la condition d'impédance CI3.

$$\hat{\mathbf{Z}}_{CI3}(k_x,k_y) = \left(\mathbf{I} + b_1\frac{\hat{\mathbf{L_D}}(k_x,k_y)}{k_0^2} - b_2\frac{\hat{\mathbf{L_R}}(k_x,k_y)}{k_0^2}\right)^{-1} \left(a_0\mathbf{I} + a_1\frac{\hat{\mathbf{L_D}}(k_x,k_y)}{k_0^2} - a_2\frac{\hat{\mathbf{L_R}}(k_x,k_y)}{k_0^2}\right). \tag{3.3.1}$$

Les CIOE dérivées de la CI3 (CI0, CI01, CI1, CI4) s'obtiennent s'en déduisent :

$$\hat{\mathbf{Z}}_{CI4}(k_x,k_y) = a_0\mathbf{I} + a_1\frac{\hat{\mathbf{L_D}}}{k_0^2}(k_x,k_y) - a_2\frac{\hat{\mathbf{L_R}}}{k_0^2}(k_x,k_y),$$

$$\hat{\mathbf{Z}}_{CI1}(k_x,k_y) = \left(\mathbf{I} + b\frac{\hat{\mathbf{L_D}} - \hat{\mathbf{L_R}}}{k_0^2}(k_x,k_y)\right)^{-1}\left(a_0\mathbf{I} + a_1\frac{\hat{\mathbf{L_D}} - \hat{\mathbf{L_R}}}{k_0^2}(k_x,k_y)\right),$$

$$\hat{\mathbf{Z}}_{CI01}(k_x,k_y) = a_0\mathbf{I} + a_1\frac{\hat{\mathbf{L_D}} - \hat{\mathbf{L_R}}}{k_0^2}(k_x,k_y).$$

Les coefficients de la CIOE peuvent être choisis comme ceux qui minimisent la distance entre $\hat{\mathbf{Z}}(k_x,k_y)$, le symbole de l'opérateur de Calderón, vu comme un multiplicateur de Fourier matriciel et $\hat{\mathbf{Z}}_{CI}(k_x,k_y)$, le multiplicateur de Fourier associé à la CI [1]. Selon le nombre de paramètres de la CIOE, ce minimum peut ne pas être unique pour un couple (k_x,k_y) donné. Nous avons choisi de nous donner un grand nombre de ces couples, et pour chacun d'entre eux, calculer le symbole de Calderón exact du l'empilement plan de matériaux, et nous présentons dans la section suivante la méthode de calcul.

1. La distance choisie est la norme de Frobenius

3.3.3 Le cas spécial de la condition de Leontovich

Cette sous-section traite de la condition de Leontovich qui consiste à approcher la matrice par une constante, et donc à avoir $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$. Cependant, cette condition rend compte exactement de l'impédance à incidence normale. Dans ce cas particulier, nous ne réaliserons pas de minimisation, mais on fixera cette constante à la valeur de la matrice quand $(k_x, k_y) = (0, 0)$ donc $\hat{\mathbf{Z}}_{CI0} = \hat{\mathbf{Z}}(0, 0)$. Cette dernière est diagonale.

3.4 Choix des coefficients de la CI3 par moindres carrés sur l'impédance

Dans la section précédente, nous avons exprimé les matrices $\hat{\mathbf{Z}}$ (dite d'impédance) et la matrice $\hat{\mathbf{R}}$ (dite de réflexion) en fonction de l'empilement. Nous allons montrer que nous pouvons choisir deux manières de trouver les coefficients de la CIOE CI3 (ce qui s'étend facilement aux CIOE dérivées de cette dernière).
On se donne N_x k_x et N_y k_y. Il existe donc $N_k = N_x N_y$ couples tels que $(k_{xi}, k_{yj}) = (k_x, k_y)_{(j-1)N_x+i}$.

Définition 3.25. *Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{C}^{N_k}$ et $\|\cdot\|$ la norme associée.*

$$\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^{N_k} \overline{a_i} b_i.$$

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ le produit scalaire usuel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et $\|\cdot\|_F$ la norme associée.

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle_F = \mathrm{Tr}(\overline{\mathbf{A}^t}\mathbf{B}).$$

3.4.1 Calcul des coefficients pour une incidence (k_x, k_y) donnée

Définition 3.26. *On définit $\mathbf{H}_{CI3}$ la fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_{4\times5}(\mathbb{C})$ telle que*

$$\mathbf{H}_{CI3}(k_x, k_y, \mathbf{Z}) = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(k_x, k_y)_{11} & -\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(k_x, k_y)_{11} & -\left(\hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(k_x, k_y)\mathbf{Z}\right)_{11} & \left(\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(k_x, k_y)\mathbf{Z}\right)_{11} \\ 0 & \hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(k_x, k_y)_{12} & -\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(k_x, k_y)_{12} & -\left(\hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(k_x, k_y)\mathbf{Z}\right)_{12} & \left(\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(k_x, k_y)\mathbf{Z}\right)_{12} \\ 0 & \hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(k_x, k_y)_{21} & -\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(k_x, k_y)_{21} & -\left(\hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(k_x, k_y)\mathbf{Z}\right)_{21} & \left(\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(k_x, k_y)\mathbf{Z}\right)_{21} \\ 1 & \hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(k_x, k_y)_{22} & -\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(k_x, k_y)_{22} & -\left(\hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(k_x, k_y)\mathbf{Z}\right)_{22} & \left(\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(k_x, k_y)\mathbf{Z}\right)_{22} \end{bmatrix}.$$

On définit b la fonction de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^4$ telle que

$$b(\mathbf{Z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} \\ \mathbf{Z}_{12} \\ \mathbf{Z}_{21} \\ \mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix}.$$

Proposition 3.27. *Soit $X = (a_0, a_1, a_2, b_1, b_2)$, (k_x, k_y) fixé et $\hat{\mathbf{Z}}_{ex}$ le symbole de l'opérateur de Calderón de l'empilement plan de matériaux.*

S'il existe un unique X minimisant la distance entre ces deux matrices alors

$$\underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \left\|\hat{\mathbf{Z}}_{CI3}(k_x,k_y,X)-\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(k_x,k_y)\right\| = \underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \left\|\mathbf{H}_{CI3}(k_x,k_y,\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(k_x,k_y))X-b(\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(k_x,k_y))\right\|.$$

Démonstration. On rappelle que dans la section précédente, on a introduit (au coefficient k_0 près)

$$\hat{\mathbf{Z}}_{CI3}(k_x,k_y)=\left(\mathbf{I}+b_1\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{D}}}(k_x,k_y)-b_2\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{R}}}(k_x,k_y)\right)^{-1}\left(a_0\mathbf{I}+a_1\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{D}}}(k_x,k_y)-a_2\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{R}}}(k_x,k_y)\right).$$

On pose

$$\hat{\mathbf{Z}}_D(k_x,k_y)=\mathbf{I}+b_1\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{D}}}(k_x,k_y)-b_2\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{R}}}(k_x,k_y),$$
$$\hat{\mathbf{Z}}_N(k_x,k_y)=a_0\mathbf{I}+a_1\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{D}}}(k_x,k_y)-a_2\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{R}}}(k_x,k_y).$$

Et ainsi, on développe

$$\begin{aligned}
&\underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \left\|\hat{\mathbf{Z}}_{CI3}(k_x,k_y,X)-\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(k_x,k_y)\right\| \\
&= \underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \left\|\hat{\mathbf{Z}}_D(k_x,k_y)^{-1}\hat{\mathbf{Z}}_N(k_x,k_y)-\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(k_x,k_y)\right\|, \\
&= \underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \left\|\hat{\mathbf{Z}}_D(k_x,k_y)^{-1}\left(\hat{\mathbf{Z}}_N(k_x,k_y)-\hat{\mathbf{Z}}_D(k_x,k_y)\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(k_x,k_y)\right)\right\|, \\
&= \underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \left\|\hat{\mathbf{Z}}_N(k_x,k_y)-\hat{\mathbf{Z}}_D(k_x,k_y)\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(k_x,k_y)\right\|, \\
&= \underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \left\|\hat{\mathbf{Z}}_N(k_x,k_y)-\left(b_1\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{D}}}(k_x,k_y)-b_2\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{R}}}(k_x,k_y)\right)\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(k_x,k_y)-\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(k_x,k_y)\right\|, \\
&= \underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \left\|\mathbf{H}_{CI3}(k_x,k_y,\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(k_x,k_y))X-b(\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(k_x,k_y))\right\|.
\end{aligned}$$

□

Les fonctions associées aux CIOE CI0, CI01, CI1, CI4 se déduisent aisément.
Pour un couple (k_x,k_y), les coefficients d'une CIOE (ici la CI3) sont solutions d'un problème d'optimisation. Cependant, comme sans pertes de généralités, nous pouvons nous ramener à des matrices diagonales quand k_y est nul, alors il existera une infinité de solutions possibles.

3.4.2 Balayage en incidences et moindres carrés

Pour déterminer numériquement les coefficients de la CIOE, nous allons considérer que k_x, k_y appartient respectivement à un domaine discret réel de taille respectivement N_{k_x}, N_{k_y}.

Définition 3.28. *On définit $\mathbf{A}_{CI3}$ la matrice de $\mathcal{M}_{4N_xN_y\times 5}(\mathbb{C})$ telle que*

$$\mathbf{A}_{CI3}=\begin{bmatrix}\mathbf{H}_{CI3}(k_{x_1},k_{y_1},\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(k_{x_1},k_{y_1}))\\ \vdots \\ \mathbf{H}_{CI3}(k_{x_i},k_{y_j},\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(k_{x_i},k_{y_j}))\\ \vdots \\ \mathbf{H}_{CI3}(k_{xN_x},k_{yN_y},\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(k_{xN_x},k_{yN_y}))\end{bmatrix}.$$

On définit g le vecteur colonne complexe tel que

$$g = \begin{bmatrix} b(\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(k_{x_1}, k_{y_1})) \\ \vdots \\ b(\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(k_{x_i}, k_{y_j})) \\ \vdots \\ b(\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(k_{xN_x}, k_{yN_y})) \end{bmatrix}.$$

Définition 3.29. *On pose* $\mathbf{M}_{CI} = \overline{\mathbf{A}_{CI}^t}\mathbf{A}_{CI}$.

Cette matrice est importante car comme nous le montrerons plus tard, elle apparaît dans la forme quadratique associée à la minimisation. Nous allons donc démontrer immédiatement que la matrice associée à une des CIOE est inversible. Cela nous permettra de démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème de minimisation vérifié par les coefficients de la CIOE.

3.4.3 Inversibilité des matrices $\mathbf{M}_{CI}$

3.4.3.1 Inversibilité de la matrice $\mathbf{M}_{CI01}$

Proposition 3.30. *La matrice* $\mathbf{M}_{CI01}$ *associée à la CI01 est inversible, si et seulement s'il existe au moins deux couples* (k_x, k_y) *différents parmis les* N_k *considérés.*

Démonstration. Soit t le vecteur de $\mathbb{R}_+^{N_k}$ tel que $t_{(j-1)N_x+i} = k_{xi}^2 + k_{yj}^2$ et 1 le vecteur de $\mathbb{R}^{N_k}$ dont tous les éléments sont 1. On a

$$\mathbf{M}_{CI01} = 2\begin{bmatrix} N_k & -\sum_{i=1}^{N_k} t_i \\ -\sum_{i=1}^{N_k} t_i & \sum_{i=1}^{N_k} t_i^2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} \langle 1,1\rangle & -\langle 1,t\rangle \\ -\langle t,1\rangle & \langle t,t\rangle \end{bmatrix}.$$

Pour prouver son inversibilité, on exprime son déterminant

$$= 4\left(\langle 1,1\rangle\langle t,t\rangle - \langle t,1\rangle^2\right).$$

Donc d'après Cauchy–Schwarz (voir DLMF 2019, eq. 1.7.1), le terme de droite est non-nul pour tout t non colinéaire au vecteur dont toutes les composantes valent 1, c'est-à-dire n'importe quel vecteur ayant au moins deux composantes différentes. □

3.4.3.2 Inversibilité de la matrice $\mathbf{M}_{CI4}$

Proposition 3.31. *La matrice* $\mathbf{M}_{CI4}$ *associée à la CI4 est inversible, si et seulement s'il existe au moins deux couples* (k_x, k_y) *différents parmis les* N_k *considérés.*

Démonstration. En reprenant la définition des vecteurs de $\mathbb{R}_+^{N_k}$ t et 1 introduits ci-avant, on a

$$\mathbf{M}_{CI4} = \begin{bmatrix} 2\langle 1,1\rangle & -\langle 1,t\rangle & -\langle 1,t\rangle \\ -\langle t,1\rangle & \langle t,t\rangle & 0 \\ -\langle t,1\rangle & 0 & \langle t,t\rangle \end{bmatrix}.$$

Donc immédiatement

$$\det(\mathbf{M}_{CI4}) = 2\langle t,t\rangle\left(\langle 1,1\rangle\langle t,t\rangle - \langle t,1\rangle^2\right).$$

On conclut ici aussi grâce à Cauchy–Schwarz. □

3.4.3.3 Inversibilité de la matrice $\mathbf{M}_{CI1}$

Nous renvoyons aux définitions des vecteurs de $\mathbb{R}_+^{N_k}$ t et 1 introduits ci-avant.
Soient s le vecteur de $\mathbb{C}^{N_k}$ tel que $s_i = \left\langle \mathbf{I}, \hat{\mathbf{Z}}(k_x,k_y)_i \right\rangle_F$ et z le vecteur de $\mathbb{R}^{N_k}$ tel que $z_i = \left\| \hat{\mathbf{Z}}(k_x,k_y)_i \right\|_F$. On a l'expression suivante de $\mathbf{M}_{CI1}$

$$\mathbf{M}_{CI1} = \begin{bmatrix} 2\langle 1,1\rangle & -2\langle t,1\rangle & \langle t,s\rangle \\ -2\langle t,1\rangle & 2\langle t,t\rangle & -\sum_{i=1}^{N_k} t_i^2 s_i \\ \langle t,\overline{s}\rangle & -\sum_{i=1}^{N_k} t_i^2 \overline{s_i} & \sum_{i=1}^{N_k} t_i^2 z_i^2 \end{bmatrix}.$$

Alors

$$\det(\mathbf{M}_{CI1}) = \left\langle t^2, z^2 \right\rangle \det(\mathbf{M}_{CI01}) + 4\langle t,1\rangle \operatorname{Re}\left(\left\langle t^2, s \right\rangle \left\langle t^2, \overline{s} \right\rangle \right) - 2\|t\|^2 |\langle t,s\rangle|^2 - 2N_k |\left\langle t^2, s \right\rangle|^2.$$

Supposons t et 1 colinéaires, ce qui revient à ne prendre qu'un seul couple k_x, k_y. Alors la deuxième colonne est multiple de la première. Donc son déterminant est nul. L'introduction de $\hat{\mathbf{Z}}_{ex}$ dans $\mathbf{M}$ ne permet plus d'exprimer simplement le déterminant de cette dernière.
Nous l'avons vérifié numériquement et pour nos empilements, nous n'avons jamais constaté que ce déterminant s'annulait.

3.4.3.4 Inversibilité de la matrice $\mathbf{M}_{CI3}$

Cette CIOE complexifie les expressions.
Nous renvoyons aux définitions des vecteurs de $\mathbb{R}_+^{N_k}$ t et 1 introduits ci-avant. Soient s_D, s_R les vecteurs de $\mathbb{C}^{N_k}$ et l_D, l_R les vecteurs de $\mathbb{R}_+^{N_k}$ tels que

$$\begin{aligned} s_{Di} &= \left\langle \mathbf{L_D}(k_x,k_y)_i, \hat{\mathbf{Z}}(k_x,k_y)_i \right\rangle_F, \\ s_{Ri} &= \left\langle \mathbf{L_R}(k_x,k_y)_i, \hat{\mathbf{Z}}(k_x,k_y)_i \right\rangle_F, \\ l_{Di} &= \left\| \mathbf{L_D}(k_x,k_y)_i \hat{\mathbf{Z}}(k_x,k_y)_i \right\|_F, \\ l_{Ri} &= \left\| \mathbf{L_R}(k_x,k_y)_i \hat{\mathbf{Z}}(k_x,k_y)_i \right\|_F. \end{aligned}$$

On a l'expression suivante de $\mathbf{M}_{CI3}$

$$\mathbf{M}_{CI3} = \begin{bmatrix} 2\langle 1,1\rangle & -\langle t,1\rangle & -\langle t,1\rangle & -\langle 1,s_D\rangle & \langle 1,s_R\rangle \\ -\langle t,1\rangle & \langle t,t\rangle & 0 & \langle t,s_D\rangle & 0 \\ -\langle t,1\rangle & 0 & \langle t,t\rangle & 0 & -\langle t,s_R\rangle \\ -\langle 1,\overline{s_D}\rangle & \langle t,\overline{s_D}\rangle & 0 & \langle l_D,l_D\rangle & 0 \\ \langle 1,\overline{s_R}\rangle & 0 & -\langle t,\overline{s_R}\rangle & 0 & \langle l_R,l_R\rangle \end{bmatrix}.$$

Nous n'exprimons pas le déterminant dont nous n'avons pas de simplification.
Tout comme pour la CI1, nous avons vérifié numériquement sur un certain nombre d'empilements et d'incidences qu'il ne s'annule pas.

3.4.4 Calcul des coefficients des CIOE par moindres carrés

Définition 3.32. *On définit la fonction* J_Z

$$J_Z(X) = \|\mathbf{A}_{CI}X - g\|^2 .$$

3.4.4.1 Minimisation sans contraintes

Définition 3.33. *Soit* $X^* \in \mathbb{C}^N$ *une solution du problème suivant dit sans CSU, c'est-à-dire*
Trouver $X \in \mathbb{C}^N$ *tel que*

$$X = \underset{X\in\mathbb{C}^N}{\operatorname{argmin}} J_Z(X).$$

Proposition 3.34. *Si* $\overline{\mathbf{A}_{CI}^t}\mathbf{A}_{CI}$ *est inversible, alors*

$$X^* = (\overline{\mathbf{A}_{CI}^t}\mathbf{A}_{CI})^{-1}(\overline{\mathbf{A}_{CI}^t}g).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} J_Z(X) &= \|\mathbf{A}_{CI}X - g\|^2 , \\ &= \langle \mathbf{A}_{CI}X - g, \mathbf{A}_{CI}X - g\rangle , \end{aligned}$$

le produit scalaire est hermitien donc

$$\begin{aligned} &= \langle \mathbf{A}_{CI}X, \mathbf{A}_{CI}X\rangle - \langle \mathbf{A}_{CI}X, g\rangle - \langle g, \mathbf{A}_{CI}X\rangle + \langle g, g\rangle , \\ &= \left\langle X, \overline{\mathbf{A}_{CI}^t}\mathbf{A}_{CI}X\right\rangle - \left\langle X, \overline{\mathbf{A}_{CI}^t}g\right\rangle - \left\langle \overline{\mathbf{A}_{CI}^t}g, X\right\rangle + \langle g, g\rangle , \end{aligned}$$

Si la matrice $\overline{\mathbf{A}_{CI}^t}\mathbf{A}_{CI}$ est inversible, comme elle est par définition hermitienne et positive, alors la fonction J_Z est quadratique. Il existe donc un unique minimum où le gradient de cette fonction s'annule. Or

$$\begin{aligned} \nabla J_Z(X^*) &= 2\overline{\mathbf{A}_{CI}^t}\mathbf{A}_{CI}X^* - 2\overline{\mathbf{A}_{CI}^t}g, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc si l'hypothèse de la propriété est vérifiée, on déduit X^*. □

3.4.4.2 Minimisation avec contraintes

Définition 3.35 (Minimisation avec contraintes pour la CI3)**.**
Soit $\mathrm{CSU}^3_{\mathrm{CI3}}$ *le sous-espace de* $\mathbb{C}^5$ *issu de la définition 2.31. Alors les coefficients de la CIOE respectant cette CSU sont solutions du problème suivant*
Trouver $X^* \in \mathbb{C}^5$ *tel que*

$$J_Z(X^*) = \min_{X\in\mathrm{CSU}^3_{\mathrm{CI3}}} J_Z(X).$$

Si la fonction J_Z est quadratique et continue, alors il y a existence de ce minimum X^*, et pour certaines CIOE (CI0, CI01, CI4), nous avons démontré l'inversibilité des matrices $\mathbf{M}_{CI}$ donc le caractère quadratique.
L'unicité dépend en plus de la convexité de l'espace des contraintes, ce qui est vérifié pour les CIOE (CI0, CI01, CI4).
Nous n'avons pas trouvés numériquement de cas où les autres CIOE (CI1, CI3) ne permettaient pas de vérifier l'existence et l'unicité de ce minimum X^*.

3.4.5 Résultats numériques sans contraintes

Sans contraintes, on résout le système linéaire $\mathbf{H}X = b$.
Dans Stupfel 2015 sont introduites les CIOE

— CI01

$$\vec{E}_t = \left(a_0\mathcal{I} + a_1\frac{\mathcal{L}}{k_0^2}\right)\vec{J},$$

— CI1

$$\left(\mathcal{I} + b\frac{\mathcal{L}}{k_0^2}\right)\vec{E}_t = \left(a_0\mathcal{I} + a_1\frac{\mathcal{L}}{k_0^2}\right)\vec{J}.$$

L'opérateur $\mathcal{L}$ est le laplacien tangentiel Δ_s appliqué à chaque composante. Le multiplicateur de Fourier associé est la matrice.

$$\hat{\mathbf{L}} = -\begin{bmatrix} k_x^2 + k_y^2 & 0 \\ 0 & k_x^2 + k_y^2 \end{bmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{L}$ est multiple de l'identité donc la matrice $\hat{\mathbf{Z}}_{CI}$ associée à ces CIOE n'approchera pas bien la matrice $\hat{\mathbf{Z}}_{ex}$. La figure 3.3 présente donc quelques résultats, où l'on voit bien la limite de ces CIOE par rapport à la CI3 et il en est de même pour les coefficients de réflexion visible à la figure 3.4.

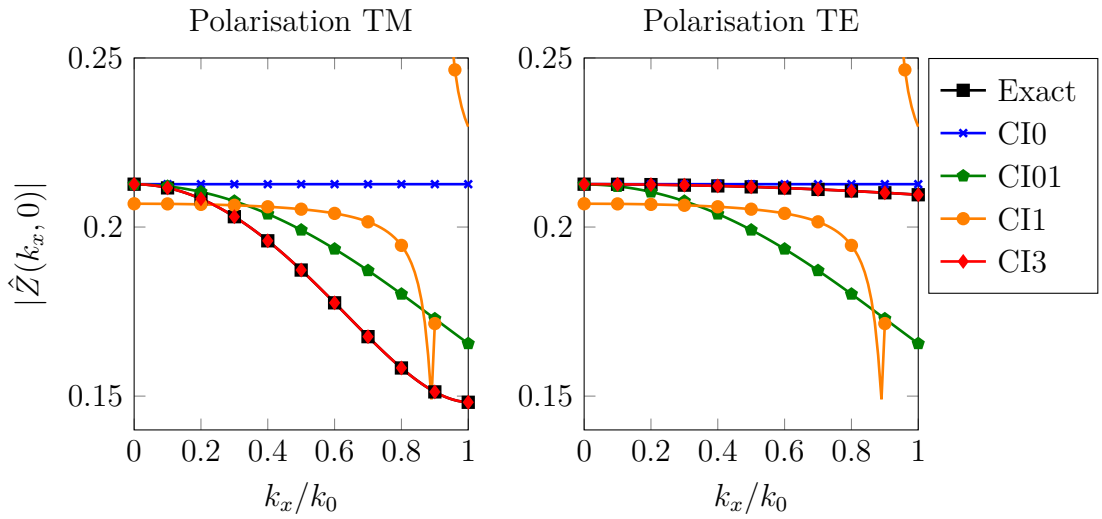


Figure 3.3 – Module des coefficients diagonaux de $\hat{\mathbf{Z}}$ pour $\epsilon = 1 - i, \mu = 1, d = 0.05\text{m}, f = 0.2\text{GHz}$

CI0	
a0	3.178E-03 +2.127E-01i

CI01	
a0	3.243E-03 +2.126E-01i
a1	-5.161E-02 +5.639E-02i

CI1	
a0	8.611E-03 +2.067E-01i
a1	6.096E-03 +2.543E-01i
b	1.208E+00 +2.060E-05i

CI3	
a0	3.179E-03 +2.127E-01i
a1	-1.047E-01 +1.079E-01i
a2	-2.731E-05 -6.113E-04i
b1	-1.493E-02 +3.544E-04i
b2	-1.782E-02 +3.980E-04i

TABLE 3.1 – Coefficients associés à la figure 3.3

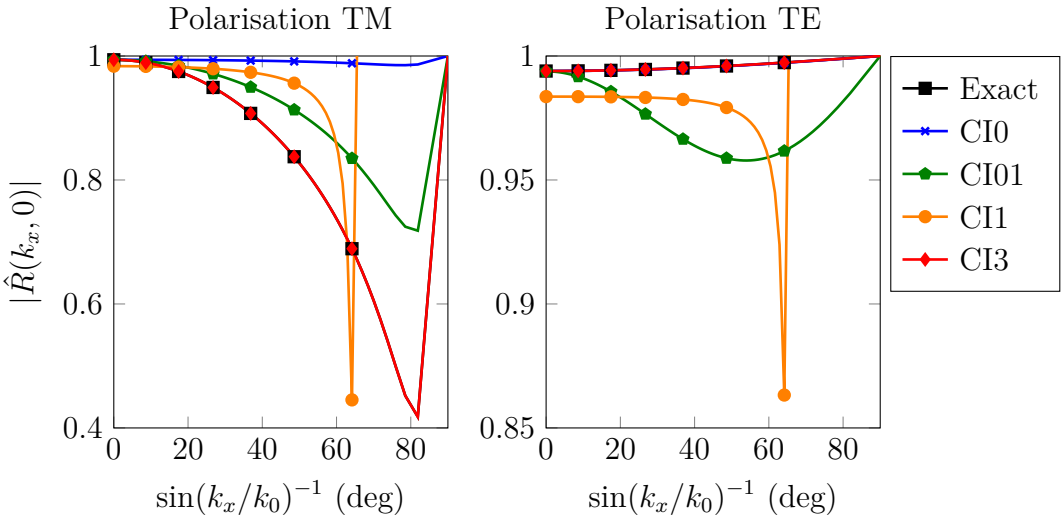


FIGURE 3.4 – Module des coefficients diagonaux de $\mathbf{R}$ pour $\epsilon = 1 - i, \mu = 1, d = 0.05\text{m}, f = 0.2\text{GHz}$

La figure 3.5 permet de vérifier les résultats de HOPPE et al. 1995, p. 33 pour une couche de matériau sans perte où il n'y a pas de k_x réel tel que $k_3 d = \frac{\pi}{2} + n\pi$ donc pas d'asymptote. La condition d'impédance d'ordre élevé est bien meilleure que la condition de Leontovich.

CI0	
a0	0.000E+00 +3.636E-01i

CI3	
a0	1.072E-19 +3.636E-01i
a1	6.036E-20 +9.087E-02i
a2	-4.660E-18 -2.397E-03i
b1	-3.989E-02 -1.596E-19i
b2	-4.676E-02 +1.438E-17i

TABLE 3.2 – Coefficients associés à la figure 3.5

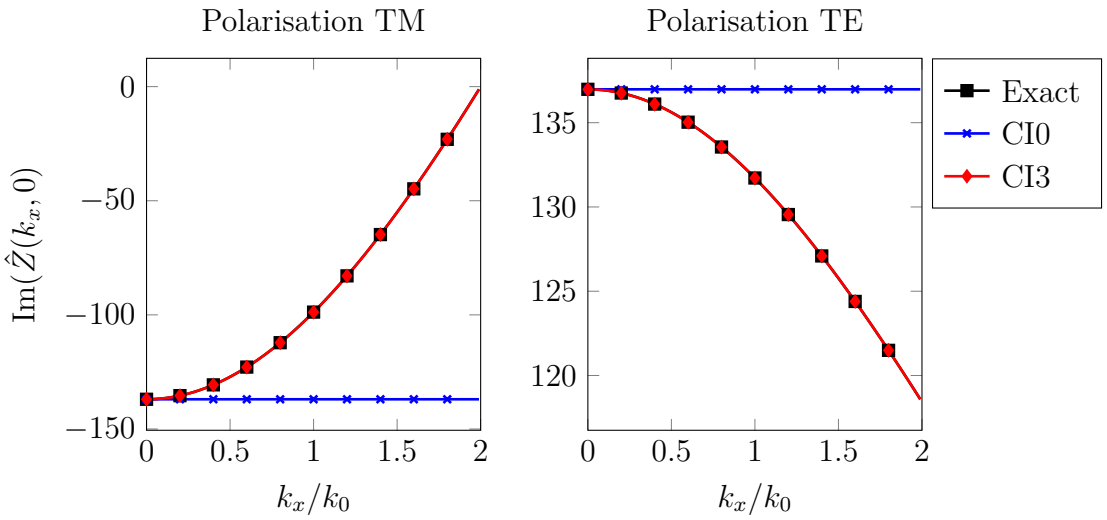


FIGURE 3.5 – $\epsilon = 4, \mu = 1, d = 0.015\text{m}, f = 1\text{GHz}$

La figure 3.6 permet de vérifier les résultats de SOUDAIS 2017, p. 11 pour une couche de matériaux sans perte où l'on remarque une asymptote. Si l'on n'impose pas de contrainte, la CI3 capture cette asymptote grâce à son dénominateur et approche bien l'opérateur de Calderón.

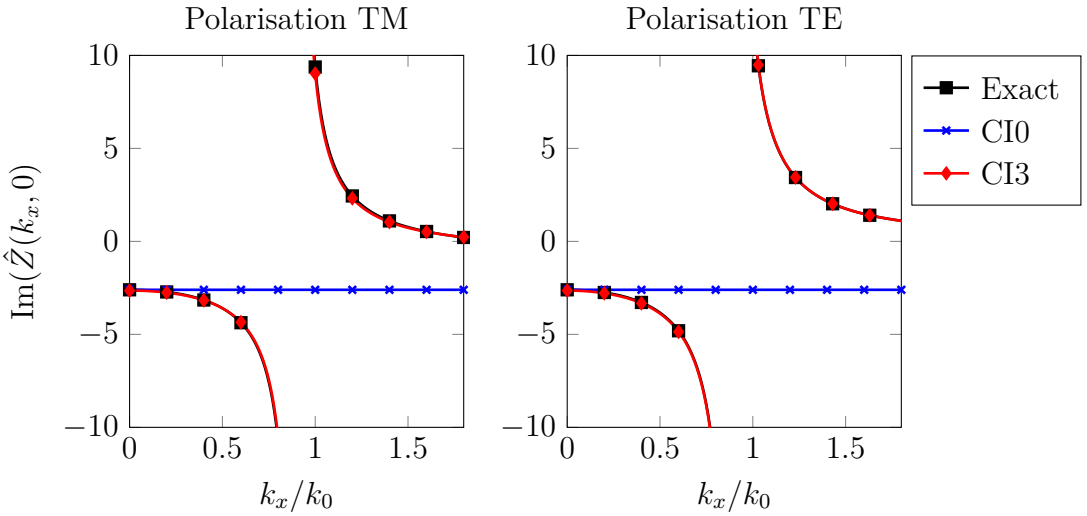


FIGURE 3.6 – Partie imaginaire des coefficients diagonaux de $\hat{\mathbf{Z}}$ pour $\epsilon = 4, \mu = 1, d = 0.035\text{m}, f = 12\text{GHz}$

CI0	
a0	0.000E+00 -2.604E+00i

CI3	
a0	4.232E-19 -2.645E+00i
a1	9.844E-19 -6.057E-01i
a2	-1.318E-18 +1.960E-01i
b1	1.226E+00 -2.118E-18i
b2	1.226E+00 +1.150E-18i

TABLE 3.3 – Coefficients associés à la figure 3.6

La figure 3.7 montre la limite de la CI3 pour capturer trois asymptotes. Pour cela, il faudrait utiliser une CI d'ordre au moins 6 sur l'opérateur agissant sur $\vec{E}_t$. La CI3 n'est donc une bonne CIOE que si le nombre d'asymptotes est inférieur à 1, ce que l'on peut calculer connaissant l'empilement (voir proposition 3.8).
Si la matrice d'impédance exacte possède plusieurs asymptotes, il faut autant de pôles à la CIOE pour être une bonne approximation.
L'expression d'une CIOE vérifiant ce critère est la CI7
(3.4.1)

$$\left(\mathcal{I}+\sum_{i=1}^{3}\left(d_i\left(\frac{\mathcal{L}_D}{k_0^2}\right)^i+e_i\left(-\frac{\mathcal{L}_R}{k_0^2}\right)^i\right)\right)\vec{E}_t=\left(a_0\mathcal{I}+\sum_{i=1}^{3}\left(b_i\left(\frac{\mathcal{L}_D}{k_0^2}\right)^i+c_i\left(-\frac{\mathcal{L}_R}{k_0^2}\right)^i\right)\right)\vec{J}.$$

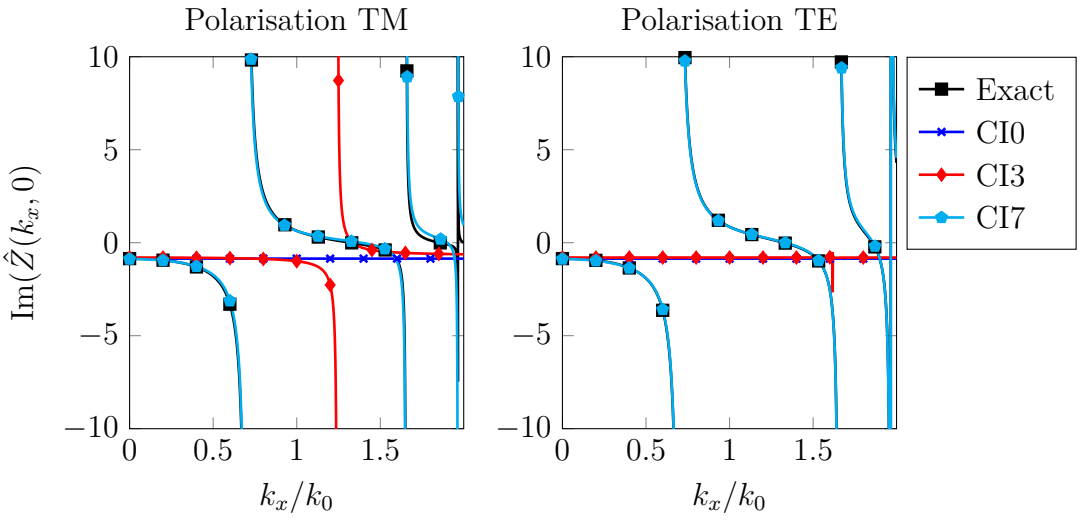


FIGURE 3.7 – Partie imaginaire des coefficients diagonaux de $\hat{\mathbf{Z}}$ pour $\epsilon = 4, \mu = 1, d = 0.2\text{m}, f = 1\text{GHz}$

3.4.6 Problème de la singularité de l'impédance dans le cadre du plan infini pour une couche de matériau sans perte

Dans la thèse de AUBAKIROV 2014, les constantes de la couche de matériau $\epsilon = 4, \mu = 1, f = 12$ GHz, et $d = 3.5$ mm.
Il existe un s_z tel que $\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(k_0 s_z, 0.) = \infty$ si $\epsilon\mu \in \mathbb{R}$. En effet, d'après la formule pour

CI0	
a0	0.000E+00 -8.545E-01i

CI3	
a0	4.199E-20 -7.966E-01i
a1	2.144E-19 -4.462E-01i
a2	7.667E-20 -3.048E-01i
b1	6.473E-01 +4.985E-19i
b2	3.825E-01 +6.861E-20i

CI7	
a0	-1.239E-17 -8.808E-01i
b1	-6.128E-17 -6.811E-01i
b2	-4.416E-17 -1.093E-01i
b3	-7.712E-18 +3.244E-03i
c1	-5.901E-17 -2.921E-01i
c2	-4.533E-17 +2.471E-01i
c3	-8.598E-18 +7.465E-02i
d1	2.669E+00 +3.486E-17i
d2	1.372E+00 +9.070E-18i
d3	1.937E-01 -7.261E-19i
e1	2.669E+00 +2.264E-17i
e1	2.669E+00 +2.264E-17i
e3	1.936E-01 +2.628E-18i

TABLE 3.4 – Coefficients associés à la figure 3.7

une couche de matériaux de la définition 3.7,

$$\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(k_x, 0.) = i\frac{\eta}{k\sqrt{k^2 - k_x^2}} \tan(\sqrt{k^2 - k_x^2}d) \left(k^2\mathbf{I} - \hat{\mathbf{L}_{\mathbf{R}}}\right). \tag{3.4.2}$$

Ainsi, il est facile de voir que l'on a une asymptote à cause de la tangente, et donc pour cet empilement

$$s_z = \sqrt{\epsilon\mu - \left(\frac{\pi/2}{k_0 d}\right)^2}. \tag{3.4.3}$$

Le problème est donc que si nous balayons en incidence et que l'on passe par ce point, alors la matrice $\hat{\mathbf{Z}}$ n'est pas définie en ce point. Or comme le gradient de la fonction est fonction de cette matrice, le gradient n'est pas défini pour tout X.
Si l'on utilise une méthode basée sur le gradient de type Newton, ce que nous avons fait, on comprend pourquoi la méthode numérique échoue à calculer des coefficients.

3.4.6.1 Réduction du nombre de variables de la minimisation

On décompose alors nos matrices et vecteurs en séparant les parties contentant cette asymptote.
On suppose donc qu'il existe $\mathbf{H}_\infty, b_\infty, X_\infty$, tels que

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_\infty + \mathbf{H}_r,$$
$$b = b_\infty + b_r,$$
$$X = X_\infty + X_r.$$

Ces matrices et vecteurs sont reliés par les relations

$$\mathbf{H}_\infty X_\infty = b_\infty, \tag{3.4.4}$$
$$\mathbf{H}_\infty X_r = 0. \tag{3.4.5}$$

Il faut voir cette décomposition comme deux parties, où l'une est nulle quasiment partout sauf pour le s_z problématique, et l'autre est définie normalement sauf aux termes correspondant au s_z où elle est nulle.
Schématiquement, on définit i_z l'indice d'une ligne telle que $b(\hat{\mathbf{Z}})_{i_z} = \infty$,

$$\begin{matrix} \mathbf{H} \end{matrix} = \begin{matrix} \mathbf{H}_\infty \end{matrix} + \begin{matrix} \mathbf{H}_r, \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,1} & \cdots & \mathbf{H}_{1,N_{CI}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_{i_z-1,1} & \cdots & \mathbf{H}_{i_z-1,N_{CI}} \\ \mathbf{H}_{i_z,1} & \cdots & \mathbf{H}_{i_z,N_{CI}} \\ \mathbf{H}_{i_z+1,1} & \cdots & \mathbf{H}_{i_z+1,N_{CI}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_{4N_i,1} & \cdots & \mathbf{H}_{4N_i,N_{CI}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{H}_{i_z,1} & \cdots & \mathbf{H}_{i_z,N_{CI}} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,1} & \cdots & \mathbf{H}_{1,N_{CI}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_{i_z-1,1} & \cdots & \mathbf{H}_{i_z-1,N_{CI}} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{H}_{i_z+1,1} & \cdots & \mathbf{H}_{i_z+1,N_{CI}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_{4N_i,1} & \cdots & \mathbf{H}_{4N_i,N_{CI}} \end{bmatrix}.$$

Dans les faits, $\mathbf{H}_\infty$ a 4 lignes non nulles et $\mathbf{H}_r$ en a autant de nulles aux mêmes endroits.
On développe donc la fonction suivant cette décomposition :

$$\underset{X}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{H}X - b\|^2 = \underset{X_r}{\operatorname{argmin}} \|(\mathbf{H}_\infty + \mathbf{H}_r)(X_\infty + X_r) - b_\infty - b_r\|^2 .$$

On utilise la relation entre $\mathbf{H}_\infty X_\infty$ et b_∞

$$= \underset{X_r}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{H}_\infty X_r + \mathbf{H}_r X_\infty + \mathbf{H}_r X_r - b_r\|^2 .$$

Enfin par définition de $\mathbf{H}_\infty$ et X_r, leur produit est nul

$$= \underset{X_r}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{H}_r(X_r + X_\infty) - b_r\|^2 .$$

On voit alors que l'on peut résoudre le problème si l'on minimise uniquement sur X_r, les autres étant fixés, et si l'on enlève du système les lignes où l'impédance n'est pas définie.

3.4.6.2 Application de la réduction à la CI3

On rappelle l'expression de la CI3

$$\hat{\mathbf{Z}}_{ap}(k_x, 0) = \left(\mathbf{I} + b_1 \hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(k_x, 0) - b_2 \hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(k_x, 0)\right)^{-1} \left(a_0 \mathbf{I} + a_1 \hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(k_x, 0) - a_2 \hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(k_x, 0)\right).$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\hat{\mathbf{Z}}_{ap}$ ait une asymptote est que la matrice de gauche ne soit pas inversible en s_z.
La matrice $\mathbf{H}_\infty$ est donc nulle partout sauf en 8 termes, placés sur les deux dernières colonnes et les 4 lignes correspondantes à $(k_x, k_y) = (k_0 s_z, 0)$.
Connaissant les expressions des matrices $\hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}, \hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}$ introduites dans la partie précédente alors on déduit que

$$X_\infty = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (k_0 s_z)^{-2} \\ (k_0 s_z)^{-2} \end{bmatrix}, \qquad X_r = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3.4.7 Choix de la méthode numérique pour résoudre la minimisation sous contraintes

Des méthodes basées sur le gradient sont adaptées, car la fonction est dérivable pour tout X et les contraintes se comportent comme des polynômes dépendant uniquement des composantes de X. Nous avons donc fait le choix de la méthode sequential quadratic programming (SQP) pour les raisons suivantes :

- elle est éprouvée depuis Kraft 1988 et des sources Fortran à jour sont disponibles à `https://github.com/jacobwilliams/slsqp`, ce qui est capital pour l'intégrer dans un code industriel ;
- elle est rapide, nous avons observé que cette méthode convergeait en quelques dizaines d'itérations au plus ;
- elle accepte des contraintes non linéaires, donc elle est adaptée à nos CSU.

3.4.8 Résultats numériques avec contraintes

La figure 3.8 montre un empilement où les coefficients déterminés sans contraintes ne vérifient pas la $\mathrm{CSU}^3_{\mathrm{CI3}}$ de la définition 2.31, et où on peut observer une différence entre l'opérateur de Calderón et son approximation avec les coefficients calculés en vérifiant cette CSU.

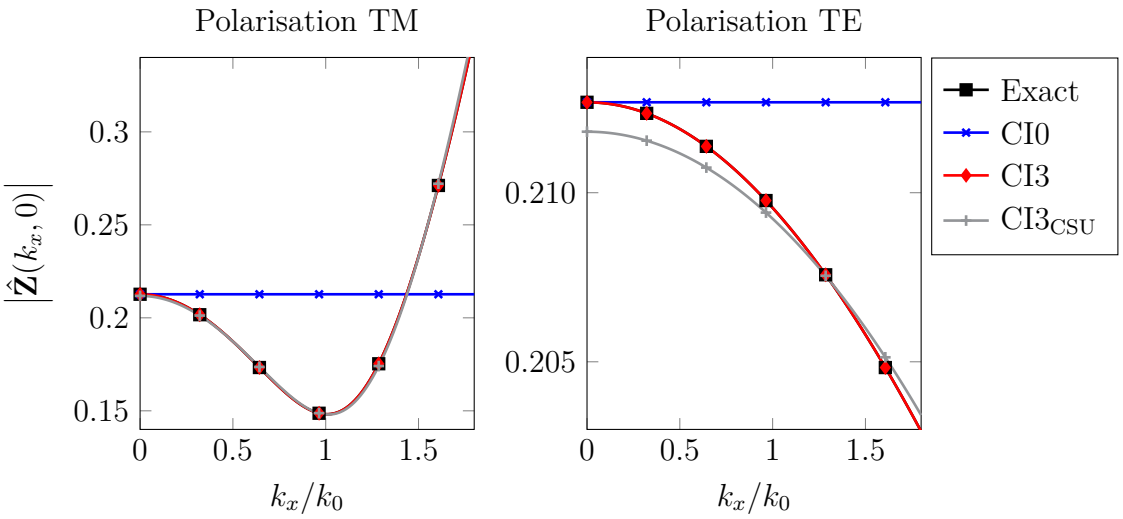


Figure 3.8 – Module des coefficients diagonaux de $\hat{\mathbf{Z}}$ pour $\epsilon = 1 - i$, $\mu = 1$, $d = 5\mathrm{cm}$, $f = 200\mathrm{MHz}$.

CI0	
a0	3.178E-03 +2.127E-01i

CI3	
a0	3.180E-03 +2.126E-01i
a1	-1.047E-01 +1.079E-01i
a2	-5.762E-05 -5.770E-04i
b1	-1.480E-02 +3.522E-04i
b2	-1.765E-02 +5.529E-04i

CI3 avec CSU	
a0	3.351E-03 +2.118E-01i
a1	-1.011E-01 +1.068E-01i
a2	-2.946E-04 +3.085E-03i
b1	4.373E-08 +4.108E-08i
b2	2.419E-03 +4.678E-04i

TABLE 3.5 – Coefficients associés à la figure 3.8

La figure 3.9 montre l'effet des matériaux sans perte sur la minimisation. Nous complétons la figure 3.6 où nous avions déjà observé la précision de la CI3, dont les coefficients étaient alors calculés sans contraintes. L'on observe bien que si l'on n'adapte pas la minimisation pour le cas de ce matériau sans perte en fixant les coefficients b_1 et b_2 ($\text{CI3}^*_{\text{CSU}}$ sur le graphe), la matrice d'impédance approchée n'est pas du tout une bonne approximation de l'opérateur de Calderón.

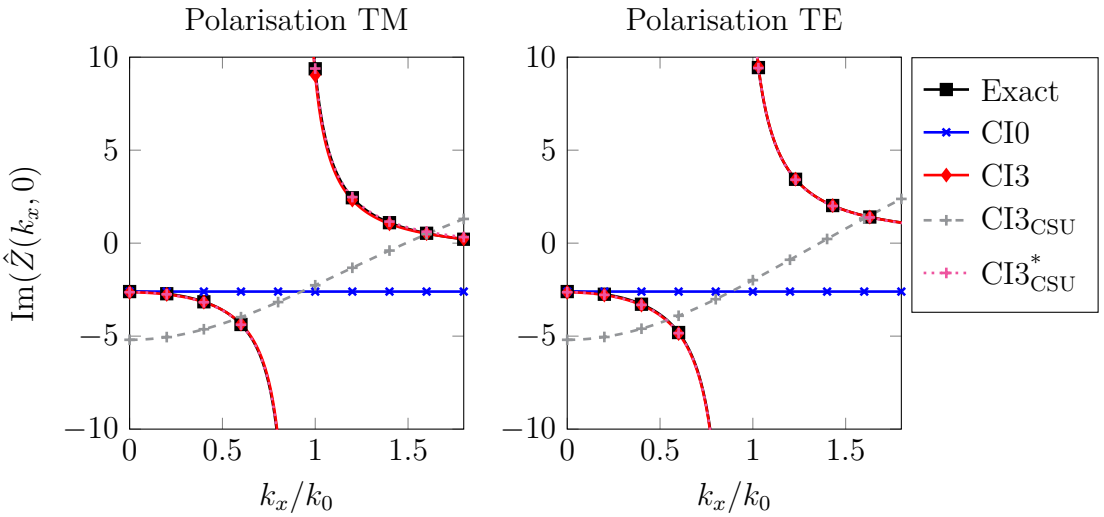


FIGURE 3.9 – Partie imaginaire des coefficients diagonaux de $\hat{\mathbf{Z}}$ pour $\epsilon = 4, \mu = 1, d = 0.035\text{m}, f = 12\text{GHz}$

CI0	
a0	0.000E+00 -2.604E+00i

CI3	
a0	4.232E-19 -2.645E+00i
a1	9.844E-19 -6.057E-01i
a2	-1.318E-18 +1.960E-01i
b1	1.226E+00 -2.118E-18i
b2	1.226E+00 +1.150E-18i

CI3 avec CSU	
a0	0.000E+00 -5.197E+00i
a1	0.000E+00 -2.345E+00i
a2	0.000E+00 -2.811E+00i
b1	-2.602E-01 +0.000E+00i
b2	-1.991E-01 +0.000E+00i

CI3* avec CSU	
a0	0.000E+00 -2.638E+00i
a1	0.000E+00 -5.154E-01i
a2	0.000E+00 +1.816E-01i
b1	1.226E+00 +0.000E+00i
b2	1.226E+00 +0.000E+00i

TABLE 3.6 – Coefficients associés à la figure 3.9

3.5 Choix des coefficients de la CI3 par moindres carrés sur les coefficients de la série de Fourier

Soient $\mathbf{M}_A$ et $\mathbf{M}_B$ les fonctions introduites à la définition 3.9 et $\hat{\mathbf{R}}$ la fonction définie en 3.10.

Définition 3.36. *On définit les fonctions* $\hat{\mathbf{R}}_{ex}, \hat{\mathbf{R}}_{CI3}$ *de* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ *telles que*

$$\hat{\mathbf{R}}_{ex}(k_x,k_y) = \hat{\mathbf{R}}(k_x,k_y,\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(k_x,k_y)),$$
$$\hat{\mathbf{R}}_{CI3}(k_x,k_y) = \hat{\mathbf{R}}(k_x,k_y,\hat{\mathbf{Z}}_{CI3}(k_x,k_y)).$$

où $\hat{\mathbf{Z}}_{ex}, \hat{\mathbf{Z}}_{CI3}$ *sont des fonctions définies à la proposition 3.15 et à l'équation* (3.3.1).

3.5.1 Expression de la fonction J_R

On utilise les fonctions $\mathbf{N}_E, \mathbf{N}_H$ introduites à la définition 3.16 et $\hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}, \hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}$ définies à 3.21-3.23.

Définition 3.37. *On définit* $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ *les fonctions de* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ *telles que*

$$\mathbf{A}_0(k_x,k_y,\mathbf{R}) = \mathbf{N}_E(k_x,k_y,0^+,\mathbf{R}),$$
$$\mathbf{A}_1(k_x,k_y,\mathbf{R}) = \hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(k_x,k_y)\mathbf{N}_E(k_x,k_y,0^+,\mathbf{R}),$$
$$\mathbf{A}_2(k_x,k_y,\mathbf{R}) = -\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(k_x,k_y)\mathbf{N}_E(k_x,k_y,0^+,\mathbf{R}),$$
$$\mathbf{B}_1(k_x,k_y,\mathbf{R}) = \hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(k_x,k_y)\mathbf{N}_H(k_x,k_y,0^+,\mathbf{R}),$$
$$\mathbf{B}_2(k_x,k_y,\mathbf{R}) = -\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(k_x,k_y)\mathbf{N}_H(k_x,k_y,0^+,\mathbf{R}).$$

On définit $\widetilde{\mathbf{H}}_{CI3}$ *la fonction de* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_{4\times5}(\mathbb{C})$ *telle que*

$\widetilde{\mathbf{H}}_{CI3}(k_x,k_y,\mathbf{R}) =$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0(k_x,k_y,\mathbf{R})_{11} & \mathbf{A}_1(k_x,k_y,\mathbf{R})_{11} & \mathbf{A}_2(k_x,k_y,\mathbf{R})_{11} & \mathbf{B}_1(k_x,k_y,\mathbf{R})_{11} & \mathbf{B}_2(k_x,k_y,\mathbf{R})_{11} \\ \mathbf{A}_0(k_x,k_y,\mathbf{R})_{12} & \mathbf{A}_1(k_x,k_y,\mathbf{R})_{12} & \mathbf{A}_2(k_x,k_y,\mathbf{R})_{12} & \mathbf{B}_1(k_x,k_y,\mathbf{R})_{12} & \mathbf{B}_2(k_x,k_y,\mathbf{R})_{12} \\ \mathbf{A}_0(k_x,k_y,\mathbf{R})_{21} & \mathbf{A}_1(k_x,k_y,\mathbf{R})_{21} & \mathbf{A}_2(k_x,k_y,\mathbf{R})_{21} & \mathbf{B}_1(k_x,k_y,\mathbf{R})_{21} & \mathbf{B}_2(k_x,k_y,\mathbf{R})_{21} \\ \mathbf{A}_0(k_x,k_y,\mathbf{R})_{22} & \mathbf{A}_1(k_x,k_y,\mathbf{R})_{22} & \mathbf{A}_2(k_x,k_y,\mathbf{R})_{22} & \mathbf{B}_1(k_x,k_y,\mathbf{R})_{22} & \mathbf{B}_2(k_x,k_y,\mathbf{R})_{22} \end{bmatrix}.$$

On définit $\widetilde{b}$ *la fonction de* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\to\mathbb{C}^4$ *tel que*

$$\widetilde{b}(k_x,k_y,\mathbf{R}) = -\begin{bmatrix} \mathbf{N}_H(k_x,k_y,0^+,\mathbf{R})_{11} \\ \mathbf{N}_H(k_x,k_y,0^+,\mathbf{R})_{12} \\ \mathbf{N}_H(k_x,k_y,0^+,\mathbf{R})_{21} \\ \mathbf{N}_H(k_x,k_y,0^+,\mathbf{R})_{22} \end{bmatrix}.$$

Proposition 3.38. *Soit* $X=(a_0,a_1,a_2,b_1,b_2)$, (k_x,k_y) *fixé et* $\hat{\mathbf{R}}_{ex}$ *la matrice définie en 3.36, alors*

$$\begin{aligned}\operatorname*{argmin}_{X\in\mathbb{C}^5}\left\|\hat{\mathbf{R}}_{CI3}(k_x,k_y,X)-\hat{\mathbf{R}}_{ex}(k_x,k_y)\right\| = \\ \operatorname*{argmin}_{X\in\mathbb{C}^5}\left\|\widetilde{\mathbf{H}}_{CI3}(k_x,k_y,\hat{\mathbf{R}}_{ex}(k_x,k_y))X-\widetilde{b}(k_x,k_y,\hat{\mathbf{R}}_{ex}(k_x,k_y))\right\|.\end{aligned}$$

Démonstration. C'est la même méthodologie que pour l'impédance. On rappelle de la section précédente

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{Z}}_{CI3}(k_x,k_y) = \left(\mathbf{I}+b_1\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{D}}}(k_x,k_y)-b_2\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{R}}}(k_x,k_y)\right)^{-1} \\ \left(a_0\mathbf{I}+a_1\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{D}}}(k_x,k_y)-a_2\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{R}}}(k_x,k_y)\right).\end{aligned}$$

On pose $\hat{\mathbf{Z}}_D(k_x,k_y)=\mathbf{I}+b_1\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{D}}}(k_x,k_y)-b_2\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{R}}}(k_x,k_y)$ et $\hat{\mathbf{Z}}_N(k_x,k_y)=a_0\mathbf{I}+a_1\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{D}}}(k_x,k_y)-a_2\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{R}}}(k_x,k_y)$ donc

$$\begin{aligned}&\operatorname*{argmin}_{X\in\mathbb{C}^5}\left\|\hat{\mathbf{R}}_{CI3}(k_x,k_y,X)-\hat{\mathbf{R}}_{ex}(k_x,k_y)\right\| \\ &= \operatorname*{argmin}_{X\in\mathbb{C}^5}\left\|-\mathbf{M}_B(k_x,k_y,0^+,\hat{\mathbf{Z}}_{CI3})^{-1}\mathbf{M}_A(k_x,k_y,0^+,\hat{\mathbf{Z}}_{CI3})-\hat{\mathbf{R}}_{ex}(k_x,k_y)\right\|, \\ &= \operatorname*{argmin}_{X\in\mathbb{C}^5}\left\|-\mathbf{M}_B(k_x,k_y,0^+,\hat{\mathbf{Z}}_{CI3})^{-1}\left(\mathbf{M}_A(k_x,k_y,0^+,\hat{\mathbf{Z}}_{CI3})+\mathbf{M}_B(k_x,k_y,0^+,\hat{\mathbf{Z}}_{CI3})\hat{\mathbf{R}}_{ex}(k_x,k_y)\right)\right\|, \\ &= \operatorname*{argmin}_{X\in\mathbb{C}^5}\left\|\mathbf{M}_A(k_x,k_y,0^+,\hat{\mathbf{Z}}_{CI3})+\mathbf{M}_B(k_x,k_y,0^+,\hat{\mathbf{Z}}_{CI3})\hat{\mathbf{R}}_{ex}(k_x,k_y)\right\|.\end{aligned}$$

D'après la définition 3.9 des fonctions $\mathbf{M}_A,\mathbf{M}_B$,

$$\begin{aligned}= \operatorname*{argmin}_{X\in\mathbb{C}^5}\Big\|&\left(\mathbf{J}_E(k_x,k_y,0^+)-\hat{\mathbf{Z}}_{CI3}(k_x,k_y)\mathbf{J}_H(k_x,k_y,0^+)\right) \\ &+\left(\mathbf{H}_E(k_x,k_y,0^+)-\hat{\mathbf{Z}}_{CI3}(k_x,k_y)\mathbf{H}_H(k_x,k_y,0^+)\right)\hat{\mathbf{R}}_{ex}(k_x,k_y)\Big\|.\end{aligned}$$

D'après la définition de $\hat{\mathbf{Z}}_{CI3}$,

$$\begin{aligned}= \operatorname*{argmin}_{X\in\mathbb{C}^5}\Big\|&\hat{\mathbf{Z}}_D(k_x,k_y)^{-1}\left(\hat{\mathbf{Z}}_D(k_x,k_y)\mathbf{J}_E(k_x,k_y,0^+)-\hat{\mathbf{Z}}_N(k_x,k_y)\mathbf{J}_H(k_x,k_y,0^+)\right) \\ &+\hat{\mathbf{Z}}_D(k_x,k_y)^{-1}\left(\hat{\mathbf{Z}}_D(k_x,k_y)\mathbf{H}_E(k_x,k_y,0^+)-\hat{\mathbf{Z}}_N(k_x,k_y)\mathbf{H}_H(k_x,k_y,0^+)\right)\hat{\mathbf{R}}_{ex}(k_x,k_y)\Big\|,\end{aligned}$$

$$= \underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \left\| \left(\hat{\mathbf{Z}}_D(k_x,k_y)\mathbf{J}_E(k_x,k_y,0^+) - \hat{\mathbf{Z}}_N(k_x,k_y)\mathbf{J}_H(k_x,k_y,0^+)\right) \right.$$
$$\left. + \left(\hat{\mathbf{Z}}_D(k_x,k_y)\mathbf{H}_E(k_x,k_y,0^+) - \hat{\mathbf{Z}}_N(k_x,k_y)\mathbf{H}_H(k_x,k_y,0^+)\right)\hat{\mathbf{R}}_{ex}(k_x,k_y)\right\|.$$

D'après la définition 3.16 des fonctions $\mathbf{N}_E, \mathbf{N}_H$,

$$= \underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \left\|\hat{\mathbf{Z}}_N(k_x,k_y)\mathbf{N}_E(k_x,k_y,0^+,\hat{\mathbf{R}}_{ex}(k_x,k_y)) + \hat{\mathbf{Z}}_D(k_x,k_y)\mathbf{N}_H(k_x,k_y,0^+,\hat{\mathbf{R}}_{ex}(k_x,k_y))\right\|.$$

et l'on conclut d'après la définition des fonctions $\hat{\mathbf{Z}}_D, \hat{\mathbf{Z}}_N$. □

Définition 3.39. *On définit* $\widetilde{\mathbf{A}}_{CI3}$ *la matrice de* $\mathcal{M}_{4N_nN_{k_z}\times 5}(\mathbb{C})$ *telle que*

$$\widetilde{\mathbf{A}}_{CI3} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{H}}_{CI3}(n_1,k_{z1},\hat{\mathbf{R}}_{ex}(n_1,k_{z1})) \\ \vdots \\ \widetilde{\mathbf{H}}_{CI3}(n_i,k_{zj},\hat{\mathbf{R}}_{ex}(n_i,k_{zj})) \\ \vdots \\ \widetilde{\mathbf{H}}_{CI3}(n_{N_n},k_{zN_{k_z}},\hat{\mathbf{R}}_{ex}(n_{N_n},k_{zN_{k_z}})) \end{bmatrix}.$$

On définit $\widetilde{g}$ *le vecteur colonne* $\mathbb{C}^{4N_nN_{k_z}}$ *telle que*

$$\widetilde{g} = \begin{bmatrix} \widetilde{b}(n_1,k_{z1},\hat{\mathbf{R}}_{ex}(n_1,k_{z1})) \\ \vdots \\ \widetilde{b}(n_i,k_{zj},\hat{\mathbf{R}}_{ex}(n_i,k_{zj})) \\ \vdots \\ \widetilde{b}(n_{N_n},k_{zN_{k_z}},\hat{\mathbf{R}}_{ex}(n_{N_n},k_{zN_{k_z}})) \end{bmatrix}.$$

On peut alors calculer les coefficients de la CI3

Définition 3.40. *On introduit la fonction*

$$\begin{aligned} J_R: \quad & \mathbb{C}^5 \to \mathbb{R} \\ & X \mapsto \left\|\widetilde{\mathbf{A}}_{CI3}X - \widetilde{g}\right\|. \end{aligned}$$

Définition 3.41 (Minimisation sans contraintes pour la CI3)**.** *Les coefficients de la CIOE sont solutions du problème*
Trouver $X^* \in \mathbb{C}^5$ *tel que*

$$X^* = \underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} J_R(X).$$

Proposition 3.42. *Si* $\overline{\widetilde{\mathbf{A}}_{CI3}^{\,t}}\widetilde{\mathbf{A}}_{CI3}$ *est inversible, alors*

$$X^* = (\overline{\widetilde{\mathbf{A}}_{CI3}^{\,t}}\widetilde{\mathbf{A}}_{CI3})^{-1}\overline{\widetilde{\mathbf{A}}_{CI3}^{\,t}}\widetilde{g}.$$

Démonstration. Même méthode que pour la proposition 3.34 sur l'impédance. □

Nous n'avons pas réussi à démontrer que cette matrice était définie pour tout empilement et toute incidence, pas même pour des CIOE plus simples.

Définition 3.43 (Minimisation avec contraintes pour la CI3)**.** *Soit* $\mathrm{CSU}^3_{\mathrm{CI3}}$ *le sous-espace de* $\mathbb{C}^5$ *issu de la définition 2.31, alors les coefficients de la CIOE respectant les CSU sont solutions du problème*
Trouver $X^* \in \mathbb{C}^5$ *tel que*

$$X^* = \underset{X \in \mathrm{CSU}^3_{\mathrm{CI3}}}{\operatorname{argmin}} J_R(X).$$

Conclusion

Nous avons proposé une méthode pour calculer des coefficients complexes vérifiant une des CSU choisie, et qui permettent d'approcher l'opérateur de Calderón dans le cas d'un objet plan infini en minimisant au sens des moindres carrés la différence entre les matrices d'impédance exactes et approchées.
Nous avons montré que minimiser l'erreur entre les matrices de réflexion aboutit aux mêmes coefficients de CIOE. Pour cela, nous avons réalisé une analyse spectrale des équations de Maxwell et montré que la condition d'impédance s'exprime comme un multiplicateur de Fourier matriciel, tout comme la matrice de réflexion. Grâce à cette analyse spectrale, nous avons aussi exprimé les CIOE comme des multiplicateurs de Fourier matriciels dont on a déduit la matrice de réflexion associée. Nous avons alors exprimé le problème de minimisation sous contraintes et montré que celui-ci a besoin d'être réduit dans le cas d'une couche de matériau sans pertes. Nous avons montré sur cette géométrie que la CIOE choisie, la CI3, était largement plus précise que les précédentes CI01 et CI1. Ce gain en précision est tel que l'on peut introduire des contraintes lors du calcul et avoir une solution finale convenable, relativement à l'opérateur exact.

Chapitre 4

Calcul des coefficients pour un cylindre infini

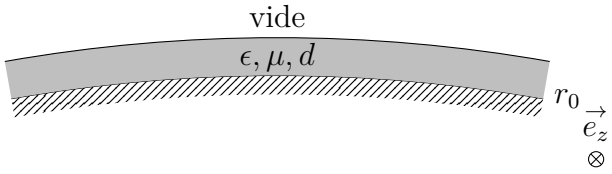
Sommaire

Introduction 78
4.1 Opérateur de Calderón pour un cylindre infini 78
4.1.1 Expressions des champs tangentiels dans chaque couche . 80
4.1.2 Expression du symbole de l'opérateur de Calderón pour une couche 82
4.1.3 Expression de la matrice d'impédance pour plusieurs couches 83
4.1.4 Expression des coefficients de la série de Fourier 86
4.1.5 Applications numériques 88
4.2 Approximation par une CIOE de l'opérateur de Calderón du cylindre 89
4.2.1 Expression des opérateurs LD, LR en Fourier 89
4.2.2 Expression de la matrice d'impédance approchée par une CI 91
4.3 Choix 1 du calcul des coefficients de la CI3 91
4.3.1 Choix de la fonction Jz 91
4.4 Choix 2 du calcul des coefficients de la CI3 93
4.4.1 Choix de la fonction JR 93
4.5 Résultats numériques 96
Conclusion 99

Introduction

L'introduction de courbures dans les CIOE est un atout majeur, car les objets réels sont rarement plats. Nous considérons ici le cas d'un cylindre infini déjà traité par Hoppe et al. 1994 en reprenant largement les résultats du plan.

4.1 Expressions exactes des matrices d'impédance et des matrices de réflexion pour un cylindre infini



On exprime les équations de Maxwell dans le matériau en coordonnées cylindriques et sans perte de généralité, on effectue une transformée de Fourier en z par invariance en translation. La solution étant périodique en θ, elle est développable en série de Fourier sur cette coordonnée.
Soit $\vec{E}$ la transformée de Fourier telle que

$$\vec{E}(r,\theta,z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} e^{i(n\theta+k_z z)}\hat{\vec{E}}(r,n,k_z)\mathrm{d}k_z.$$

Nous rappelons que les coefficients de Fourier k_z doivent satisfaire la propriété 2.34 pour assurer l'unicité des solutions et que le champ a bien une transformée de Fourier.
La fonction $\hat{\vec{E}}(r,n,k_z)$ est solution d'une EDO en r que nous allons résoudre pour chaque paramètre n, k_z.

Définition 4.1. *Soit k_3 la fonction constante par morceaux en r telle que*

$$\begin{aligned} k_3 : \ \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{C} \\ r &\mapsto \sqrt{k^2 - k_z^2}. \end{aligned}$$

Soit J_n la fonction de Bessel d'ordre n et $H_n^{(2)}$ la fonction de Hankel d'ordre n de 2e espèce.

Proposition 4.2. *On suppose que le matériau est homogène isotrope pour $r_{m-1} \leq r \leq r_m$, donc $\epsilon(r) \equiv \epsilon, \mu(r) \equiv \mu, k_3(r) \equiv k_3$.*
On suppose qu'il n'existe pas de paramètres k_z tels que $k_3(r) = 0$ pour tout $r_{m-1} \leq r \leq r_m$.
Alors pour (n,k_z) donné, pour tout $r_{m-1} \leq r \leq r_m$ il existe $(c_i(n,k_z))_{1\leq i\leq 4} \in (\mathbb{C}(\mathbb{N}\times\mathbb{R}))^4$ telles que

$$\begin{aligned} \hat{E}_z(r,n,k_z) &= c_1(n,k_z)J_n(k_3 r) + c_2(n,k_z)H_n^{(2)}(k_3 r), \\ \hat{\mathcal{H}}_z(r,n,k_z) &= c_3(n,k_z)J_n(k_3 r) + c_4(n,k_z)H_n^{(2)}(k_3 r). \end{aligned}$$

Pour toute autre couche, ces constantes sont différentes.

Démonstration. Les équations de Maxwell harmoniques dans la couche sont

$$i\left(\frac{n}{r}\hat{E}_z - k_z\hat{E}_\theta\right)\vec{e_r} + \left(ik_z\hat{E}_r - \frac{\mathrm{d}\hat{E}_z}{\mathrm{d}r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\mathrm{d}(r\hat{E}_\theta)}{\mathrm{d}r} - in\hat{E}_r\right)\vec{e_z} = -ik\eta\hat{\vec{\mathcal{H}}},$$
$$i\left(\frac{n}{r}\hat{\mathcal{H}}_z - k_z\hat{\mathcal{H}}_\theta\right)\vec{e_r} + \left(ik_z\hat{\mathcal{H}}_r - \frac{\mathrm{d}\hat{\mathcal{H}}_z}{\mathrm{d}r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\mathrm{d}(r\hat{\mathcal{H}}_\theta)}{\mathrm{d}r} - in\hat{\mathcal{H}}_r\right)\vec{e_z} = ik\eta^{-1}\hat{\vec{E}}.$$

On remarque que les 2 premières composantes de ces deux égalités permettent de déduire $\hat{E}_r, \hat{E}_\theta, \hat{\mathcal{H}}_r, \hat{\mathcal{H}}_\theta$ de $\hat{E}_z, \hat{\mathcal{H}}_z$.
On couple les 2 équations du système de Maxwell :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\left(k^2 - \frac{n^2}{r^2} - k_z^2\right)\hat{E}_r + i\frac{n}{r^2}\frac{\mathrm{d}(r\hat{E}_\theta)}{\mathrm{d}r} + ik_z\frac{\mathrm{d}\hat{E}_z}{\mathrm{d}r} & = & 0, \\ in\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\hat{E}_r}{r}\right) - \left(k^2 - k_z^2\right)\hat{E}_\theta - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(r\hat{E}_\theta)}{\mathrm{d}r}\right) - n\frac{k_z}{r}\hat{E}_z & = & 0, \\ i\frac{k_z}{r}\frac{\mathrm{d}(r\hat{E}_r)}{\mathrm{d}r} - n\frac{k_z}{r}\hat{E}_\theta - \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)\hat{E}_z - \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\hat{E}_z}{\mathrm{d}r}\right) & = & 0. \end{array}\right.$$

De la troisième égalité, on a

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2\hat{E}_z}{\mathrm{d}r^2} + r\frac{\mathrm{d}\hat{E}_z}{\mathrm{d}r} + \left(r^2k^2 - n^2\right)\hat{E}_z = ik_zr\frac{\mathrm{d}(r\hat{E}_r)}{\mathrm{d}r} - nk_zr\hat{E}_\theta.$$

Or $\vec{\nabla}\cdot\hat{\vec{E}} = 0$ et l'on a

$$\vec{\nabla}\cdot\hat{\vec{E}} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(r\hat{E}_r)}{\mathrm{d}r} + \frac{in}{r}\hat{E}_\theta + ik_z\hat{E}_z = 0,$$

donc

$$k_z^2r^2\hat{E}_z = ik_zr\frac{\mathrm{d}(r\hat{E}_r)}{\mathrm{d}r} - nk_zr\hat{E}_\theta.$$

Si l'on injecte cette égalité dans la 3e composante du système de Maxwell couplé ci-dessus, on obtient sur $\hat{E}_z$ (et donc aussi sur $\hat{\mathcal{H}}_z$).

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2\hat{E}_z}{\mathrm{d}r^2} + r\frac{\mathrm{d}\hat{E}_z}{\mathrm{d}r} + \left(r^2\left(k^2 - k_z^2\right) - n^2\right)\hat{E}_z = 0.$$

On obtient l'équation différentielle en r vérifiée par $\hat{E}_z$ et $\hat{\mathcal{H}}_z$:

$$x^2f''(x) + xf'(x) + \left(x^2a^2 - n^2\right)f(x) = 0.$$

Si $a = k_3$ est non nul, c'est une équation de Bessel (voir Bowman 1958, eq (6.80)) sinon une équation d'Euler et nous renvoyons à l'annexe E.
Si k_3 est non nul, il existe donc $(c_1(n,k_z), c_2(n,k_z)) \in (\mathbb{C}(\mathbb{N}\times\mathbb{R}))^2$ telles que le champ s'exprime dans la couche

$$\hat{E}_z(r,n,k_z) = c_1(n,k_z)J_n\left(k_3r\right) + c_2(n,k_z)H_n^{(2)}\left(k_3r\right)$$

où J_n est la fonction de Bessel d'ordre n, $H_n^{(2)}$ la fonction de Hankel de deuxième espèce d'ordre n. Il existe d'autres notations pour désigner ces fonctions, voir Abramowitz et al. 1964, p. 358. On sait que l'on peut prendre n'importe quel couple de fonctions de Bessel, voir annexe (F.4).
De plus, d'après Abramowitz et al. 1964, p. 358 (DLMF 2019, `https://dlmf.nist.gov/10.4`), une fonction solution de l'équation de Bessel d'ordre n est linéairement dépendante de la même fonction d'ordre $-n$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in \mathbb{R}^+, J_n(r) = (-1)^n J_{-n}(r),$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in \mathbb{R}_+^*, H_n^{(2)}(r) = (-1)^n H_{-n}^{(2)}(r).$$

Donc $\hat{E}_z(r, n, k_z)$ est colinéaire à $\hat{E}_z(r, -n, k_z)$. On peut donc se restreindre à n entier naturel.
On trouve exactement les mêmes résultats pour $\hat{\mathcal{H}}_z$ dans la couche de matériaux. Il existe $(c_3(n, k_z), c_4(n, k_z)) \in (\mathbb{C}(\mathbb{N}_+ \times \mathbb{R}))^2$

$$\hat{\mathcal{H}}_z(r, n, k_z) = c_3(n, k_z) J_n(k_3 r) + c_4(n, k_z) H_n^{(2)}(k_3 r).$$

□

4.1.1 Expressions des champs tangentiels dans chaque couche

Définition 4.3. *On définit les matrices* $\mathbf{J}_E(r, n, k_z), \mathbf{H}_E(r, n, k_z), \mathbf{J}_{\mathcal{H}}(r, n, k_z), \mathbf{H}_{\mathcal{H}}(r, n, k_z)$ *où* $k(r), \eta(r)$ *sont constants par morceaux en* r

$$\mathbf{J}_E(r, n, k_z) = \begin{bmatrix} -\dfrac{nk_z}{rk_3(r)^2} J_n(k_3(r)r) & \dfrac{ik(r)\eta(r)}{k_3(r)} J_n'(k_3(r)r) \\ J_n(k_3(r)r) & 0 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{H}_E(r, n, k_z) = \begin{bmatrix} -\dfrac{nk_z}{rk_3(r)^2} H_n^{(2)}(k_3(r)r) & \dfrac{ik(r)\eta(r)}{k_3(r)} H_n^{(2)\prime}(k_3(r)r) \\ H_n^{(2)}(k_3(r)r) & 0 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{J}_{\mathcal{H}}(r, n, k_z) = \begin{bmatrix} 0 & -J_n(k_3(r)r) \\ -\dfrac{ik(r)}{\eta(r)k_3(r)} J_n'(k_3(r)r) & -\dfrac{nk_z}{rk_3(r)^2} J_n(k_3(r)r) \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{H}_{\mathcal{H}}(r, n, k_z) = \begin{bmatrix} 0 & -H_n^{(2)}(k_3(r)r) \\ -\dfrac{ik(r)}{\eta(r)k_3(r)} H_n^{(2)\prime}(k_3(r)r) & -\dfrac{nk_z}{rk_3(r)^2} H_n^{(2)}(k_3(r)r) \end{bmatrix}.$$

Sur une interface d'équation $r = r_p$ entre deux matériaux, il y a donc un saut de valeurs pour ces matrices : $\lim_{\delta \to 0} \mathbf{J}_E(r_p + \delta, n, k_z) - \mathbf{J}_E(r_p - \delta, n, k_z) \neq 0$.

Proposition 4.4. *Dans chaque couche* $r_{m-1} \leq r < r_m$*, il existe* $(c_i(n, k_z))_{1 \leq i \leq 4}$ *telles que les composantes en* $\vec{e_\theta}, \vec{e_z}$ *des champs* $(\vec{E}, \vec{J} = \vec{e_r} \wedge \vec{\mathcal{H}})$*, dites composantes tangentielles par abus de langage, sont*

$$\hat{\vec{E}}_t(r, n, k_z) = \mathbf{J}_E(r, n, k_z) \begin{bmatrix} c_1(n, k_z) \\ c_3(n, k_z) \end{bmatrix} + \mathbf{H}_E(r, n, k_z) \begin{bmatrix} c_2(n, k_z) \\ c_4(n, k_z) \end{bmatrix}, \tag{4.1.2a}$$
$$\hat{\vec{J}}_t(r, n, k_z) = \mathbf{J}_{\mathcal{H}}(r, n, k_z) \begin{bmatrix} c_1(n, k_z) \\ c_3(n, k_z) \end{bmatrix} + \mathbf{H}_{\mathcal{H}}(r, n, k_z) \begin{bmatrix} c_2(n, k_z) \\ c_4(n, k_z) \end{bmatrix}. \tag{4.1.2b}$$

Démonstration. À partir des composantes en $\vec{e_r}, \vec{e_\theta}$ des équations de Maxwell, on peut déterminer $\hat{E}_r, \hat{E}_\theta, \hat{\mathcal{H}}_r, \hat{\mathcal{H}}_\theta$.

$$\begin{cases} -ik_z\hat{E}_\theta + ik(r)\eta(r)\hat{\mathcal{H}}_r = -\dfrac{in}{r}\hat{E}_z, \\ ik_z\hat{E}_r + ik(r)\eta(r)\hat{\mathcal{H}}_\theta = \dfrac{\mathrm{d}\hat{E}_z}{\mathrm{d}r}, \end{cases} \qquad \begin{cases} i\dfrac{k(r)}{\eta(r)}\hat{E}_r + ik_z\hat{\mathcal{H}}_\theta = \dfrac{in}{r}\hat{\mathcal{H}}_z, \\ i\dfrac{k(r)}{\eta(r)}\hat{E}_\theta - ik_z\hat{\mathcal{H}}_r = -\dfrac{\mathrm{d}\hat{\mathcal{H}}_z}{\mathrm{d}r}. \end{cases}$$

Ce système est équivalent à $\vec{Y} = \mathbf{M}\vec{X}$ où la matrice $\mathbf{M}$ et les champs de vecteurs $\vec{X}, \vec{Y}$ sont définis tels que

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & -ik_z & ik(r)\eta(r) & 0 \\ ik_z & 0 & 0 & ik(r)\eta(r) \\ i\dfrac{k(r)}{\eta(r)} & 0 & 0 & ik_z \\ 0 & i\dfrac{k(r)}{\eta(r)} & -ik_z & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{X} = \begin{bmatrix} \hat{E}_r \\ \hat{E}_\theta \\ \hat{\mathcal{H}}_r \\ \hat{\mathcal{H}}_\theta \end{bmatrix}, \quad \vec{Y} = \begin{bmatrix} -\dfrac{in}{r}\hat{E}_z \\ \dfrac{\mathrm{d}\hat{E}_z}{\mathrm{d}r} \\ \dfrac{in}{r}\hat{\mathcal{H}}_z \\ -\dfrac{\mathrm{d}\hat{\mathcal{H}}_z}{\mathrm{d}r} \end{bmatrix}.$$

On remarque que $\mathbf{M}^2 = \left(k_z^2 - k(r)^2\right)\mathbf{I} = -k_3(r)^2\mathbf{I}$ et donc que $\det(\mathbf{M}) = k_3(r)^4$. On suppose ce dernier non nul, on peut déduire $\vec{X}$:

$$\begin{bmatrix} \hat{E}_r \\ \hat{E}_\theta \\ \hat{\mathcal{H}}_r \\ \hat{\mathcal{H}}_\theta \end{bmatrix} = \frac{1}{-k_3(r)^2} \begin{bmatrix} 0 & -ik_z & ik(r)\eta(r) & 0 \\ ik_z & 0 & 0 & ik(r)\eta(r) \\ i\dfrac{k(r)}{\eta(r)} & 0 & 0 & ik_z \\ 0 & i\dfrac{k(r)}{\eta(r)} & -ik_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dfrac{in}{r}\hat{E}_z \\ \dfrac{\mathrm{d}\hat{E}_z}{\mathrm{d}r} \\ \dfrac{in}{r}\hat{\mathcal{H}}_z \\ -\dfrac{\mathrm{d}\hat{\mathcal{H}}_z}{\mathrm{d}r} \end{bmatrix}.$$

On extrait alors $\hat{E}_\theta, \hat{\mathcal{H}}_\theta$ pour obtenir les champs orthogonaux à $\vec{e_r}$ en tout point, connaissant déjà $\hat{E}_z, \hat{\mathcal{H}}_z$.

$$\begin{aligned} \hat{E}_\theta &= -\frac{1}{k_3(r)^2}\left(\frac{nk_z}{r}\hat{E}_z - ik(r)\eta(r)\frac{\mathrm{d}\hat{\mathcal{H}}_z}{\mathrm{d}r}\right), \\ \hat{E}_z &= c_1 J_n(k_3(r)r) + c_2 H_n^{(2)}(k_3(r)r), \\ -\hat{\mathcal{H}}_z &= -c_3 J_n(k_3(r)r) - c_4 H_n^{(2)}(k_3(r)r), \\ \hat{\mathcal{H}}_\theta &= -\frac{1}{k_3(r)^2}\left(i\frac{k(r)}{\eta(r)}\frac{\mathrm{d}\hat{E}_z}{\mathrm{d}r} + \frac{nk_z}{r}\hat{\mathcal{H}}_z\right). \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \hat{E}_\theta = &-\frac{nk_z}{rk_3(r)^2}\left(c_1 J_n(k_3(r)r) + c_2 H_n^{(2)}(k_3(r)r)\right) \\ &+ \frac{ik(r)\eta(r)}{k_3(r)}\left(c_3 J_n'(k_3(r)r) + c_4 H_n^{(2)\prime}(k_3(r)r)\right), \\ \hat{E}_z = &\, c_1 J_n(k_3(r)r) + c_2 H_n^{(2)}(k_3(r)r), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-\hat{\mathcal{H}}_z =& -c_3 J_n(k_3(r)r) - c_4 H_n^{(2)}(k_3(r)r),\\
\hat{\mathcal{H}}_\theta =& -i\frac{k(r)}{k_3(r)\eta(r)}\left(c_1 J_n'(k_3(r)r) + c_2 H_n^{(2)\prime}(k_3(r)r)\right)\\
&- \frac{nk_z}{rk_3(r)^2}\left(c_3 J_n(k_3(r)r) + c_4 H_n^{(2)}(k_3(r)r)\right).
\end{aligned}
$$

□

Proposition 4.5. *Si $\mu(r)\epsilon(r) \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, alors les matrices $\mathbf{J}_E(r,n,k_z)$, $\mathbf{J}_{\mathcal{H}}(r,n,k_z)$ sont inversibles pour tout couple (n,k_z).*

Démonstration. Par définition des matrices,

$$
\begin{aligned}
\det(\mathbf{J}_E(r,n,k_z)) &= -\frac{ik(r)\eta(r)}{k_3(r)} J_n(k_3(r)r) J_n'(k_3(r)r),\\
\det(\mathbf{J}_{\mathcal{H}}(r,n,k_z)) &= -\frac{ik(r)}{\eta(r)k_3(r)} J_n(k_3(r)r) J_n'(k_3(r)r).
\end{aligned}
$$

D'après Abramowitz et al. 1964, p. 370 (DLMF 2019, `https://dlmf.nist.gov/10.21#i`), les zéros des fonctions de Bessel d'ordre réel $\nu > -1$ sont tous réels donc si $k_3 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ alors ces matrices sont inversibles. □

Pour les matrices $\mathbf{H}_E(r,n,k_z)$, $\mathbf{H}_{\mathcal{H}}(r,n,k_z)$, on a

$$
\begin{aligned}
\det(\mathbf{H}_E(r,n,k_z)) &= -\frac{ik(r)\eta(r)}{k_3(r)} H_n^{(2)}(k_3(r)r) H_n^{(2)\prime}(k_3(r)r),\\
\det(\mathbf{H}_{\mathcal{H}}(r,n,k_z)) &= -\frac{ik(r)}{\eta(r)k_3(r)} H_n^{(2)}(k_3(r)r) H_n^{(2)\prime}(k_3(r)r).
\end{aligned}
$$

Et on ne peut rien conclure, car les zéros peuvent être complexes (voir Sandström et al. 2007). On va donc supposer ces déterminants non nuls.

4.1.2 Expression du symbole de l'opérateur de Calderón pour une couche

Soit $r_1 = r_0 + d$. On se place dans le matériau donc $r_0 \leq r < r_1$.

Proposition 4.6. *Si on suppose que la matrice $\mathbf{H}_{\mathcal{H}}(r_1^-,n,k_z) - \mathbf{J}_{\mathcal{H}}(r_1^-,n,k_z)\mathbf{J}_E(r_0^+,n,k_z)^{-1}\mathbf{H}_E(r_0^+,n,k_z)$ est inversible pour tout (n,k_z), alors on a*

$$
\hat{\vec{E}}_t(r_1^-,n,k_z) = \hat{\mathbf{Z}}(n,k_z)\left(\hat{\vec{J}}_t(r_1^-,n,k_z)\right)
$$

où

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{Z}}(n,k_z) = &\left(\mathbf{H}_E(r_1^-,n,k_z)\mathbf{H}_E(r_0^+,n,k_z)^{-1} - \mathbf{J}_E(r_1^-,n,k_z)\mathbf{J}_E(r_0^+,n,k_z)^{-1}\right)\\
&\left(\mathbf{H}_{\mathcal{H}}(r_1^-,n,k_z)\mathbf{H}_E(r_0^+,n,k_z)^{-1} - \mathbf{J}_{\mathcal{H}}(r_1^-,n,k_z)\mathbf{J}_E(r_0^+,n,k_z)^{-1}\right)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Démonstration. On se place dans le matériau : $r_0 \leq r \leq r_1$. Dans cette couche, $\epsilon(r) \equiv \epsilon, \mu(r) \equiv \mu$.

On applique la condition aux limites du conducteur parfait $\hat{\vec{E}}(r_0, n, k_z) = 0$ dans (4.1.2a), donc

$$\mathbf{J}_E(r_0, n, k_z) \begin{bmatrix} c_1(n, k_z) \\ c_3(n, k_z) \end{bmatrix} = -\mathbf{H}_E(r_0, n, k_z) \begin{bmatrix} c_2(n, k_z) \\ c_4(n, k_z) \end{bmatrix}.$$

On peut donc exprimer les composantes tangentielles

$$\hat{\vec{E}}_t(r_1, n, k_z) = \Big(\mathbf{H}_E(r_1, n, k_z) - \mathbf{J}_E(r_1, n, k_z)\mathbf{J}_E(r_0, n, k_z)^{-1}\mathbf{H}_E(r_0, n, k_z)\Big) \begin{bmatrix} c_2(n, k_z) \\ c_4(n, k_z) \end{bmatrix},$$
$$\hat{\vec{J}}_t(r_1, n, k_z) = \Big(\mathbf{H}_{\mathcal{H}}(r_1, n, k_z) - \mathbf{J}_{\mathcal{H}}(r_1, n, k_z)\mathbf{J}_E(r_0, n, k_z)^{-1}\mathbf{H}_E(r_0, n, k_z)\Big) \begin{bmatrix} c_2(n, k_z) \\ c_4(n, k_z) \end{bmatrix}.$$

On calcule le déterminant de cette matrice

$$\det(\mathbf{H}_{\mathcal{H}}(r_1, n, k_z) - \mathbf{J}_{\mathcal{H}}(r_1, n, k_z)\mathbf{J}_E(r_0, n, k_z)^{-1}\mathbf{H}_E(r_0, n, k_z)) =$$
$$-\frac{k(r)^2}{\eta(r)^2} \frac{(H_n^{(2)}(r_1k_3)J_n'(r_0k_3) - J_n(r_1k_3)H_n^{(2)\prime}(r_0k_3))(H_n^{(2)\prime}(r_1k_3)J_n(r_0k_3) - J_n'(r_1k_3)H_n^{(2)}(r_0k_3))}{J_n'(r_0^+k_3)J_n(r_0^+k_3)}$$

Ce dernier s'annule quand $\dfrac{\mathcal{H}_n^{(2)}(r_1k_3)}{J_n(r_1k_3)} = \dfrac{\mathcal{H}_n^{(2)\prime}(r_0k_3)}{J_n'(r_0k_3)}$ ou quand $\dfrac{\mathcal{H}_n^{(2)\prime}(r_1k_3)}{J_n'(r_1k_3)} = \dfrac{\mathcal{H}_n^{(2)}(r_0k_3)}{J_n(r_0k_3)}$.
Il n'existe pas à notre connaissance de propriétés connues des fonctions de Bessel pour déduire de ces égalités des conditions sur k, k_z, r_1, r_0. On suppose donc simplement $\mathbf{H}_{\mathcal{H}}(r_1, n, k_z) - \mathbf{J}_{\mathcal{H}}(r_1, n, k_z)\mathbf{J}_E(r_0, n, k_z)^{-1}\mathbf{H}_E(r_0, n, k_z)$ inversible, la matrice $\hat{\mathbf{Z}}(n, k_z)$ telle que $\hat{\vec{E}}_t(r_1, n, k_z) = \hat{\mathbf{Z}}(n, k_z)\hat{\vec{J}}_t(r_1, n, k_z)$ est alors

$$\hat{\mathbf{Z}} = \Big(\mathbf{H}_E(r_1, n, k_z) - \mathbf{J}_E(r_1, n, k_z)\mathbf{J}_E(r_0, n, k_z)^{-1}\mathbf{H}_E(r_0, n, k_z)\Big)$$
$$\Big(\mathbf{H}_{\mathcal{H}}(r_1, n, k_z) - \mathbf{J}_{\mathcal{H}}(r_1, n, k_z)\mathbf{J}_E(r_0, n, k_z)^{-1}\mathbf{H}_E(r_0, n, k_z)\Big)^{-1}.$$

Comme on a supposé la matrice $\mathbf{H}_E(r_0, n, k_z)$ inversible, on peut simplifier par cette matrice d'où la proposition.

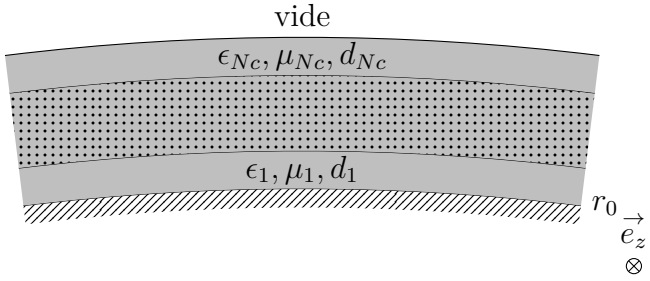
□

4.1.3 Expression de la matrice d'impédance pour plusieurs couches

Soit r_p le rayon de l'interface p, $r_p = r_0 + \sum_{i=1}^{p} d_i$. On dit que l'on se trouve dans la couche p si $r_{p-1} \leq r < r_p$.

Définition 4.7. *On définit les fonctions de* $[r_{p-1}, r_p[\times\mathbb{N}\times\mathbb{R}\times\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{J}}(r, n, k_z, \mathbf{A}) = \mathbf{J}_E(r, n, k_z) - \mathbf{A}\mathbf{J}_{\mathcal{H}}(r, n, k_z),$$
$$\mathbf{M}_{\mathbf{H}}(r, n, k_z, \mathbf{A}) = \mathbf{H}_E(r, n, k_z) - \mathbf{A}\mathbf{H}_{\mathcal{H}}(r, n, k_z).$$



Définition 4.8. *On définit la fonction de* $[r_{p-1}, r_p[\times\mathbb{N}\times\mathbb{R}\times\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

$$\mathbf{R}(r,n,k_z,\mathbf{A}) = -\mathbf{M_H}(r,n,k_z,\mathbf{A})^{-1}\mathbf{M_J}(r,n,k_z,\mathbf{A}).$$

A priori, pour (r,n,k_z) donné, $\mathbf{R}(r,n,k_z,\mathbf{A})$ n'est pas défini pour toute matrice $\mathbf{A}$. On prolonge ces définitions aux autres couches.

Définition 4.9. *On définit* $\mathbf{T}_p$ *la fonction de* $[r_{p-1}, r_p[^2\times\mathbb{N}\times\mathbb{R}\times\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_p(r,r',n,k_z,\mathbf{A}) = \\ &\Big(\mathbf{J}_E(r,n,k_z)\mathbf{M_J}(r',n,k_z,\mathbf{A})^{-1} - \mathbf{H}_E(r,n,k_z)\mathbf{M_H}(r',n,k_z,\mathbf{A})^{-1}\Big)\\ &\Big(\mathbf{J}_{\mathcal{H}}(r,n,k_z)\mathbf{M_J}(r',n,k_z,\mathbf{A})^{-1} - \mathbf{H}_{\mathcal{H}}(r,n,k_z)\mathbf{M_H}(r',n,k_z,\mathbf{A})^{-1}\Big)^{-1}\end{aligned}$$

A priori, pour (r,r',n,k_z) donné, $\mathbf{T}_p(r,r',n,k_z,\mathbf{A})$ n'est pas défini pour toute matrice $\mathbf{A}$.

Proposition 4.10. *Soient* $\hat{\vec{E}}_t, \hat{\vec{\mathcal{H}}}_t$ *tels que* $\vec{E}_t(r_p^-,n,k_z) = \hat{\mathbf{Z}}_p(n,k_z)(\hat{\vec{J}}_t(r_p^-,n,k_z)$. *Si les matrices suivantes sont inversibles*

$$\mathbf{M_J}(r_p^-,n,k_z,\hat{\mathbf{Z}}_p(n,k_z)), \qquad \mathbf{M_H}(r_p^-,n,k_z,\hat{\mathbf{Z}}_p(n,k_z)),$$

$$\mathbf{J}_{\mathcal{H}}(r_{p-1}^+,n,k_z)\mathbf{M_J}(r_p^-,n,k_z,\hat{\mathbf{Z}}_p(n,k_z))^{-1} - \mathbf{H}_{\mathcal{H}}(r_{p-1}^+,n,k_z)\mathbf{M_H}(r_p^-,n,k_z,\hat{\mathbf{Z}}_p(n,k_z))^{-1},$$

alors $\hat{\vec{E}}_t(r_{p-1}^+,n,k_z) = \mathbf{T}_p(r_{p-1}^+,r_p^-,n,k_z,\hat{\mathbf{Z}}_p(n,k_z))(\hat{\vec{J}}_t(r_{p-1}^+,n,k_z))$.
Une condition d'impédance sur le bord supérieur d'une couche détermine la condition aux limites sur le bord inférieur.

Démonstration. On se situe dans la couche p ($r_{p-1}\le r<r_p$) et l'on sait qu'il existe dans cette couche des constantes $c_i(n,k_z)$ telles que les champs vérifient

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_E(r_p,n,k_z)\begin{bmatrix}c_1(n,k_z)\\c_3(n,k_z)\end{bmatrix} + \mathbf{H}_E(r_p,n,k_z)\begin{bmatrix}c_2(n,k_z)\\c_4(n,k_z)\end{bmatrix} = \\ \hat{\mathbf{Z}}_p(n,k_z)\left(\mathbf{J}_{\mathcal{H}}(r_p,n,k_z)\begin{bmatrix}c_1(n,k_z)\\c_3(n,k_z)\end{bmatrix} + \mathbf{H}_{\mathcal{H}}(r_p,n,k_z)\begin{bmatrix}c_2(n,k_z)\\c_4(n,k_z)\end{bmatrix}\right).\end{aligned}$$

Ce qui revient à

$$\mathbf{M_J}(r_p,n,k_z,\hat{\mathbf{Z}}_p(n,k_z))\begin{bmatrix}c_1(n,k_z)\\c_3(n,k_z)\end{bmatrix} = -\mathbf{M_H}(r_p,n,k_z,\hat{\mathbf{Z}}_p(n,k_z))\begin{bmatrix}c_2(n,k_z)\\c_4(n,k_z)\end{bmatrix}.$$

On suppose que les matrices $\mathbf{M_J}(r_p, n, k_z, \hat{\mathbf{Z}}_p(n, k_z)), \mathbf{M_H}(r_p, n, k_z, \hat{\mathbf{Z}}_p(n, k_z))$ sont inversibles donc

$$\begin{bmatrix} c_2(n, k_z) \\ c_4(n, k_z) \end{bmatrix} = \mathbf{R}(r_p, n, k_z, \hat{\mathbf{Z}}_p(n, k_z)) \begin{bmatrix} c_1(n, k_z) \\ c_3(n, k_z) \end{bmatrix}.$$

On injecte ce qui précède en $r = r_{p-1}$

$$\hat{\vec{E}}_t(r_{p-1}, n, k_z) = \left(\mathbf{H}_E(r_{p-1}, n, k_z)\mathbf{R}(r_p, n, k_z, \hat{\mathbf{Z}}_p(n, k_z)) + \mathbf{J}_E(r_{p-1}, n, k_z)\right) \begin{bmatrix} c_1(n, k_z) \\ c_3(n, k_z) \end{bmatrix},$$

$$\hat{\vec{J}}_t(r_{p-1}, n, k_z) = \left(\mathbf{H}_{\mathcal{H}}(r_{p-1}, n, k_z)\mathbf{R}(r_p, n, k_z, \hat{\mathbf{Z}}_p(n, k_z)) + \mathbf{J}_{\mathcal{H}}(r_{p-1}, n, k_z))\right) \begin{bmatrix} c_1(n, k_z) \\ c_3(n, k_z) \end{bmatrix}.$$

On suppose alors que cette dernière est inversible pour tout (n, k_z).
On obtient

$$\hat{\vec{E}}_t(r_{p-1}, n, k_z) = \left(\mathbf{J}_E(r_{p-1}, n, k_z) + \mathbf{H}_E(r_{p-1}, n, k_z)\mathbf{R}(r_p, n, k_z, \hat{\mathbf{Z}}_p(n, k_z))\right) \left(\mathbf{J}_{\mathcal{H}}(r_{p-1}, n, k_z) + \mathbf{H}_{\mathcal{H}}(r_{p-1}, n, k_z)\mathbf{R}(r_p, n, k_z, \hat{\mathbf{Z}}_p(n, k_z))\right)^{-1} hat\vec{J}_t(r_{p-1}, n, k_z).$$

Comme on a supposé l'inversibilité des deux matrices $\mathbf{M}_J$, $\mathbf{M}_H$ alors on peut factoriser à droite le numérateur et le dénominateur et on a la propriété. □

Proposition 4.11. *Soient $\hat{\vec{E}}_t, \hat{\vec{\mathcal{H}}}_t$ tels que $\vec{E}_t(r_{p-1}^+, n, k_z) = \hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(n, k_z)(\hat{\vec{J}}_t(r_{p-1}^+, n, k_z)$. Si les matrices suivantes sont inversibles*

$$\mathbf{M_J}(r_{p-1}^+, n, k_z, \hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(n, k_z)), \qquad \mathbf{M_H}(r_{p-1}^+, n, k_z, \hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(n, k_z)),$$

$$\mathbf{H}_{\mathcal{H}}(r_p^-, n, k_z)\mathbf{M_H}(r_{p-1}^+, n, k_z, \hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(n, k_z))^{-1} - \mathbf{J}_{\mathcal{H}}(r_p^-, n, k_z)\mathbf{M_J}(r_{p-1}^+, n, k_z, \hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(n, k_z))^{-1},$$

alors $\hat{\vec{E}}_t(r_p^-, n, k_z) = \mathbf{T}_p(r_p^-, r_{p-1}^+, n, k_z, \hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(n, k_z))(\hat{\vec{J}}_t(r_p^-, n, k_z))$.
Une condition d'impédance sur le bord inférieur d'une couche détermine la condition aux limites sur le bord supérieur.

Démonstration. Même méthodologie que pour la proposition 4.10. □

Proposition 4.12. *Soient $\hat{\vec{E}}_t, \hat{\vec{\mathcal{H}}}_t$ tels que*

$$\hat{\vec{E}}_t(r_{p-1}^+, n, k_z) = \hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(n, k_z)(\hat{\vec{J}}_t(r_{p-1}^+, n, k_z)),$$
$$\hat{\vec{E}}_t(r_p^-, n, k_z) = \hat{\mathbf{Z}}_p(n, k_z)(\hat{\vec{J}}_t(r_p^-, n, k_z)).$$

Si les matrices suivantes sont inversibles

$$\mathbf{M_J}(r_p^-, n, k_z, \hat{\mathbf{Z}}_p(n,k_z)), \qquad \mathbf{M_J}(r_{p-1}^+, n, k_z, \hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(n,k_z)),$$
$$\mathbf{M_H}(r_p^-, n, k_z, \hat{\mathbf{Z}}_p(n,k_z)), \qquad \mathbf{M_H}(r_{p-1}^+, n, k_z, \hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(n,k_z)),$$

$$\mathbf{J}_{\mathcal{H}}(r_p^-, n, k_z)\mathbf{M_J}(r_{p-1}^+, n, k_z, \hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(n,k_z))^{-1} - \mathbf{H}_{\mathcal{H}}(r_p^-, n, k_z)\mathbf{M_H}(r_{p-1}^+, n, k_z, \hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(n,k_z))^{-1},$$
$$\mathbf{J}_{\mathcal{H}}(r_{p-1}^+, n, k_z)\mathbf{M_J}(r_p^-, n, k_z, \hat{\mathbf{Z}}_p(n,k_z))^{-1} - \mathbf{H}_{\mathcal{H}}(r_{p-1}^+, n, k_z)\mathbf{M_H}(r_p^-, n, k_z, \hat{\mathbf{Z}}_p(n,k_z))^{-1},$$

alors

$$\hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(n,k_z) = \mathbf{T}_p(r_{p-1}^+, r_p^-, n, k_z, \hat{\mathbf{Z}}_p(n,k_z)),$$
$$\hat{\mathbf{Z}}_p(n,k_z) = \mathbf{T}_p(r_p^-, r_{p-1}^+, n, k_z, \hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(n,k_z)).$$

On peut donc déterminer itérativement les matrices d'impédance. Dans notre cadre d'étude, la présence d'un conducteur parfait sur l'interface $r = r_0^+$ implique $\hat{\mathbf{Z}}_0(n,k_z) = 0$.

4.1.4 Expression des coefficients de la série de Fourier

On se place à l'interface p donc $r_{p-1} \leq r < r_{p+1}$.

Définition 4.13. *On définit les fonctions de* $\mathbb{R}\times\mathbb{N}\times\mathbb{R}\times\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

$$\mathbf{N}_E(r,n,k_z,\mathbf{A}) = \mathbf{J}_E(r,n,k_z) + \mathbf{H}_E(r,n,k_z)\mathbf{A},$$
$$\mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r,n,k_z,\mathbf{A}) = \mathbf{J}_{\mathcal{H}}(r,n,k_z) + \mathbf{H}_{\mathcal{H}}(r,n,k_z)\mathbf{A}.$$

Définition 4.14.
On définit $\mathfrak{T}_p$ *la fonction de* $[r_{p-1}, r_p]\times[r_p, r_{p+1}]\times\mathbb{N}\times\mathbb{R}\times\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

$$\mathfrak{T}_p(r,r',n,k_z,\mathbf{A}) =$$
$$-\left(\mathbf{N}_E(r',n,k_z,\mathbf{A})^{-1}\mathbf{H}_E(r,n,k_z) - \mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r',n,k_z,\mathbf{A})^{-1}\mathbf{H}_{\mathcal{H}}(r,n,k_z)\right)^{-1}$$
$$\left(\mathbf{N}_E(r',n,k_z,\mathbf{A})^{-1}\mathbf{J}_E(r,n,k_z) - \mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r',n,k_z,\mathbf{A})^{-1}\mathbf{J}_{\mathcal{H}}(r,n,k_z)\right).$$

A priori, pour r, r', n, k_z donné, $\mathfrak{T}_p(r,r',n,k_z,\mathbf{A})$ n'est pas défini pour toute matrice $\mathbf{A}$.

Proposition 4.15.
On suppose qu'il existe $\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n,k_z)$ *telle que*

$$\hat{\vec{E}}_t(r_p^+,n,k_z) = \mathbf{N}_E(r_p^+,n,k_z,\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n,k_z))\vec{C}_{p+1}(n,k_z),$$
$$\hat{\vec{J}}_t(r_p^+,n,k_z) = \mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^+,n,k_z,\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n,k_z))\vec{C}_{p+1}(n,k_z).$$

Si les matrices suivantes sont inversibles

$$\mathbf{N}_E(r_p^+,n,k_z,\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n,k_z)), \qquad \mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^+,n,k_z,\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n,k_z)),$$

$$\mathbf{N}_E(r_p^+,n,k_z,\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n,k_z))^{-1}\mathbf{H}_E(r_p^-,n,k_z) - \mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^+,n,k_z,\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n,k_z))^{-1}\mathbf{H}_{\mathcal{H}}(r_p^-,n,k_z),$$

alors

$$\hat{\vec{E}}_t(r_p^-,n,k_z) = \mathbf{N}_E(r_p^-,n,k_z,\mathfrak{T}_p(r_p^-,r_p^+,n,k_z,\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n,k_z)))\vec{C}_p(n,k_z),$$
$$\hat{\vec{J}}_t(r_p^-,n,k_z) = \mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^-,n,k_z,\mathfrak{T}_p(r_p^-,r_p^+,n,k_z,\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n,k_z)))\vec{C}_p(n,k_z).$$

Démonstration. De part et d'autre de $r = r_p$, on a

$$\hat{\vec{E}}_t(r_p^+, n, k_z) = \mathbf{N}_E(r_p^+, n, k_z, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n, k_z))\vec{C}_1^{\,+}(n, k_z),$$
$$\hat{\vec{E}}_t(r_p^-, n, k_z) = \mathbf{J}_E(r_p^-, n, k_z)\vec{C}_1^{\,-}(n, k_z) + \mathbf{H}_E(r_p^-, n, k_z)\vec{C}_2^{\,-}(n, k_z),$$

$$\hat{\vec{J}}_t(r_p^+, n, k_z) = \mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^+, n, k_z, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n, k_z))\vec{C}_1^{\,+}(n, k_z),$$
$$\hat{\vec{J}}_t(r_p^-, n, k_z) = \mathbf{J}_{\mathcal{H}}(r_p^-, n, k_z)\vec{C}_1^{\,-}(n, k_z) + \mathbf{H}_{\mathcal{H}}(r_p^-, n, k_z)\vec{C}_2^{\,-}(n, k_z).$$

Il y a continuité des champs au travers de l'interface donc

$$\mathbf{J}_E(r_p^-, n, k_z)\vec{C}_1^{\,-}(n, k_z) + \mathbf{H}_E(r_p^-, n, k_z)\vec{C}_2^{\,-}(n, k_z) = \mathbf{N}_E(r_p^+, n, k_z, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n, k_z))\vec{C}_1^{\,+}(n, k_z),$$
$$\mathbf{J}_{\mathcal{H}}(r_p^-, n, k_z)\vec{C}_1^{\,-}(n, k_z) + \mathbf{H}_{\mathcal{H}}(r_p^-, n, k_z)\vec{C}_2^{\,-}(n, k_z) = \mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^+, n, k_z, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n, k_z))\vec{C}_1^{\,+}(n, k_z),$$

donc si on suppose les matrices $\mathbf{N}_E, \mathbf{N}_H$ inversibles

$$\mathbf{N}_E(r_p^+, n, k_z, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n, k_z))^{-1}\left(\mathbf{J}_E(r_p^-, n, k_z)\vec{C}_1^{\,-}(n, k_z) + \mathbf{H}_E(r_p^-, n, k_z)\vec{C}_2^{\,-}(n, k_z)\right) =$$
$$\mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^+, n, k_z, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n, k_z))^{-1}\left(\mathbf{J}_{\mathcal{H}}(r_p^-, n, k_z)\vec{C}_1^{\,-}(n, k_z) + \mathbf{H}_{\mathcal{H}}(r_p^-, n, k_z)\vec{C}_2^{\,-}(n, k_z)\right).$$

On regroupe les termes pour obtenir une relation entre les deux vecteurs,

$$\Big(\mathbf{N}_E(r_p^+, n, k_z, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n, k_z))^{-1}\mathbf{J}_E(r_p^-, n, k_z)$$
$$-\mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^+, n, k_z, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n, k_z))^{-1}\mathbf{J}_{\mathcal{H}}(r_p^-, n, k_z)\Big)\vec{C}_1^{\,-}(n, k_z) =$$
$$-\Big(\mathbf{N}_E(r_p^+, n, k_z, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n, k_z))^{-1}\mathbf{H}_E(r_p^-, n, k_z)$$
$$+\mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^+, n, k_z, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n, k_z))^{-1}\mathbf{H}_{\mathcal{H}}(r_p^-, n, k_z)\Big)\vec{C}_2^{\,-}(n, k_z).$$

On suppose l'inversibilité de la matrice devant $\vec{C}_2^{\,-}(n, k_z)$, et alors

$$\vec{C}_2^{\,-}(n, k_z) = \mathfrak{T}_p(r_p^-, r_p^+, n, k_z, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n, k_z))\vec{C}_1^{\,-}(n, k_z).$$

□

Proposition 4.16.
On suppose qu'il existe $\hat{\mathbf{R}}_p(n, k_z)$ *telle que*

$$\hat{\vec{E}}_t(r_p^-, n, k_z) = \mathbf{N}_E(r_p^-, n, k_z, \hat{\mathbf{R}}_p(n, k_z))\vec{C}_p(n, k_z),$$
$$\hat{\vec{J}}_t(r_p^-, n, k_z) = \mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^-, n, k_z, \hat{\mathbf{R}}_p(n, k_z))\vec{C}_p(n, k_z).$$

Si les matrices suivantes sont inversibles

$$\mathbf{N}_E(r_p^-, n, k_z, \mathbf{R}_p(n, k_z)), \qquad \mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^-, n, k_z, \hat{\mathbf{R}}_p(n, k_z)),$$

$$\mathbf{N}_E(r_p^-,n,k_z,\mathbf{R}_p(n,k_z))^{-1}\mathbf{H}_E(r_p^+,n,k_z)-\mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^-,n,k_z,\hat{\mathbf{R}}_p(n,k_z))^{-1}\mathbf{H}_{\mathcal{H}}(r_p^+,n,k_z),$$

alors

$$\begin{aligned}\hat{\vec{E}}_t(r_p^+,n,k_z)&=\mathbf{N}_E(r_p^+,n,k_z,\mathfrak{T}_p(r_p^+,r_p^-,n,k_z,\hat{\mathbf{R}}_p(n,k_z)))\vec{C}_{p+1}(n,k_z),\\ \hat{\vec{E}}_t(r_p^+,n,k_z)&=\mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^+,n,k_z,\mathfrak{T}_p(r_p^+,r_p^-,n,k_z,\hat{\mathbf{R}}_p(n,k_z)))\vec{C}_{p+1}(n,k_z).\end{aligned}$$

Démonstration. Même méthodologie que pour la proposition 4.15. □

Proposition 4.17.
On suppose qu'il existe $\hat{\mathbf{R}}_p(n,k_z)$ *et* $\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n,k_z)$ *telles que*

$$\begin{cases}\hat{\vec{E}}_t(r_p^-,n,k_z)=\mathbf{N}_E(r_p^-,n,k_z,\hat{\mathbf{R}}_p(n,k_z))\vec{C}_p(n,k_z),\\ \hat{\vec{J}}_t(r_p^-,n,k_z)=\mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^-,n,k_z,\hat{\mathbf{R}}_p(n,k_z))\vec{C}_p(n,k_z),\end{cases}$$
$$\begin{cases}\vec{E}_t(r_p^+,n,k_z)=\mathbf{N}_E(r_p^+,n,k_z,\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n,k_z))\vec{C}_{p+1}(n,k_z),\\ \hat{\vec{J}}_t(r_p^+,n,k_z)=\mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^+,n,k_z,\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n,k_z))\vec{C}_{p+1}(n,k_z).\end{cases}$$

Si les matrices suivantes sont inversibles

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_E(r_p^-,n,k_z,\mathbf{R}_p(n,k_z)),&\qquad \mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^-,n,k_z,\hat{\mathbf{R}}_p(n,k_z)),\\ \mathbf{N}_E(r_p^+,n,k_z,\mathbf{R}_{p+1}(n,k_z)),&\qquad \mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^+,n,k_z,\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n,k_z)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_E(r_p^-,n,k_z,\mathbf{R}_p(n,k_z))^{-1}\mathbf{H}_E(r_p^+,n,k_z)-\mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^-,n,k_z,\hat{\mathbf{R}}_p(n,k_z))^{-1}\mathbf{H}_{\mathcal{H}}(r_p^+,n,k_z),\\ \mathbf{N}_E(r_p^+,n,k_z,\mathbf{R}_{p+1}(n,k_z))^{-1}\mathbf{H}_E(r_p^-,n,k_z)-\mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^+,n,k_z,\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n,k_z))^{-1}\mathbf{H}_{\mathcal{H}}(r_p^-,n,k_z),\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n,k_z)&=\mathfrak{T}_p(r_p^+,r_p^-,n,k_z,\hat{\mathbf{R}}_p(n,k_z)),\\ \hat{\mathbf{R}}_p(n,k_z)&=\mathfrak{T}_p(r_p^-,r_p^+,n,k_z,\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n,k_z)).\end{aligned}$$

On peut donc déterminer itérativement les matrices de réflexion. Dans notre cadre d'étude, la présence d'un conducteur parfait sur l'interface $r=r_0^+$ implique $\mathbf{R}_1(n,k_z)=-\mathbf{H}_E(r_0^+,n,k_z)^{-1}\mathbf{J}_E(r_0^+,n,k_z)$.

4.1.5 Applications numériques

On pose $(k_x,k_y)=(k_0 s,0)$ pour le plan. On compare l'impédance du plan $\hat{\mathbf{Z}}(k_x,0)$ à l'impédance du cylindre $\hat{\mathbf{Z}}(n,0)$ quand n est de l'ordre de $k_0 r_1 s$ pour de faibles courbures. On reprend la notation de Hoppe et al. 1995, p. 62 qui définit $k_t=n/r_1$. Pour une couche de matériaux sans pertes, la matrice $\hat{\mathbf{Z}}$ est imaginaire pure, donc les parties réelles ne sont pas tracées.
La figure 4.1 permet de vérifier les résultats de Hoppe et al. 1995, p. 62 (voir Figure H.2).
On voit donc que l'impédance du cylindre tend vers celle du plan quand r augmente.

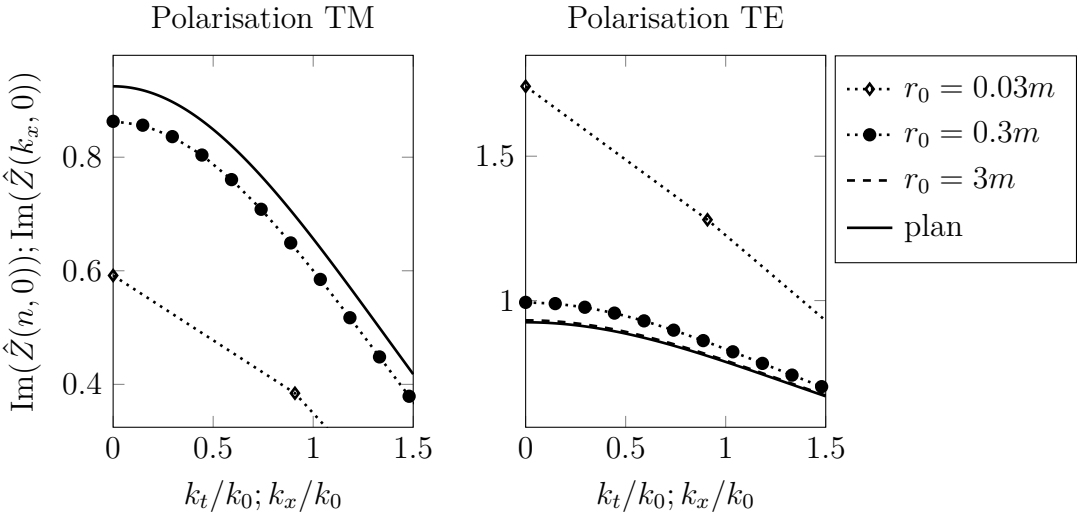


FIGURE 4.1 – $\epsilon = 6$, $\mu = 1$, $d = 0.0225$m, $f = 1$GHz

4.2 Approximation par une CIOE de l'opérateur de Calderón du cylindre

4.2.1 Expression des opérateurs $\mathcal{L}_D$, $\mathcal{L}_R$ en Fourier

Soit $C(0, r_c)$ un cylindre de centre 0, de rayon r_c et d'axe $\vec{e_z}$ et (r, θ, z) les coordonnées cylindriques d'un point de l'espace.
Soit $V = \mathcal{S}(C(0, r_c))^2$ l'espace des fonctions infiniment dérivables définies sur le cylindre et de carré intégrable.

Définition 4.18. *On définit $\mathcal{L}_D$ l'opérateur de V*

$$\mathcal{L}_D \vec{U}(r, \theta, z) = \vec{\nabla}_s \vec{\nabla}_s \cdot \vec{U}(r, \theta, z).$$

On définit $\hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}$ la fonction de $\mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(n, k_z) = -\begin{bmatrix} (n/r_c)^2 & k_z n/r_c \\ k_z n/r_c & k_z^2 \end{bmatrix}.$$

Proposition 4.19. *Soit $\vec{U} \in V$, alors*

$$\widehat{\mathcal{L}_D \vec{U}}(r_c, n, k_z) = \hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(n, k_z) \hat{\vec{U}}(r_c, n, k_z).$$

Démonstration. Par définition de $\mathcal{L}_D$, on a

$$\mathcal{L}_D \vec{U} = \vec{\nabla}_s \vec{\nabla}_s \cdot \vec{U}.$$

On utilise les expressions en coordonnées cylindriques des opérateurs différentiels (voir annexe C) :

$$\vec{\nabla}_s \cdot \vec{U}(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta}(r, \theta, z) + \frac{\partial U_z}{\partial z}(r, \theta, z),$$

$$\vec{\nabla}_s f(r,\theta,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\theta,z)\vec{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}(r,\theta,z)\vec{e_z}.$$

Or d'après la définition de la θ-série z-transformée de Fourier

$$\vec{U}(r,\theta,z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} \hat{\vec{U}}(r,n,k_z)e^{in\theta+ik_z z}\mathrm{d}k_z,$$

les opérateurs en Fourier sont

$$\widehat{\vec{\nabla}_s \cdot \vec{U}}(r,n,k_z) = \frac{in}{r}\hat{U}_\theta(r,n,k_z) + ik_z\hat{U}_z(r,n,k_z),$$
$$\widehat{\vec{\nabla}_s f}(r,n,k_z) = \frac{in}{r}\hat{f}(r,n,k_z)\vec{e_\theta} + ik_z\hat{f}(r,n,k_z)\vec{e_z},$$

donc

$$\widehat{\mathcal{L}_D\vec{U}}(r,n,k_z) = \left(-\frac{n^2}{r^2}\vec{e_\theta} - \frac{nk_z}{r}\vec{e_z}\right)\hat{U}_\theta(r,n,k_z) + \left(-\frac{nk_z}{r}\vec{e_\theta} - k_z^2\vec{e_z}\right)\hat{U}_z(r,n,k_z).$$

□

Définition 4.20. *On définit $\mathcal{L}_R$ l'opérateur de V*

$$\mathcal{L}_R\vec{U}(r,\theta,z) = \vec{\nabla}_s \wedge (\nabla_s \wedge \vec{U})(r,\theta,z).$$

On définit $\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}$ la fonction de $\mathbb{N}\times\mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(n,k_z) = \begin{bmatrix} k_z^2 & -k_z n/r_c \\ -k_z n/r_c & (n/r_c)^2 \end{bmatrix}.$$

Proposition 4.21. *Soit $\vec{U} \in V$, alors*

$$\widehat{\mathcal{L}_R\vec{U}}(r_c,n,k_z) = \hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(n,k_z)\hat{\vec{U}}(r_c,n,k_z).$$

Démonstration. Par définition de $\mathcal{L}_R$, on a

$$\mathcal{L}_R\vec{U} = \vec{\nabla}_s \wedge (\nabla_s \wedge \vec{U}).$$

On utilise les expressions en coordonnées cylindriques des opérateurs différentiels (voir annexe C)

$$\nabla_s \wedge \vec{U}(r,\theta,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial U_z}{\partial\theta}(r,\theta,z) - \frac{\partial U_\theta}{\partial z}(r,\theta,z),$$
$$\vec{\nabla}_s \wedge f(r,\theta,z) = \frac{\partial f}{\partial z}(r,\theta,z)\vec{e_\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}(r,\theta,z)\vec{e_z},$$

donc comme pour l'opérateur $\mathcal{L}_D$,

$$\widehat{\nabla_s \wedge \vec{U}}(r,n,k_z) = \frac{in}{r}\hat{U}_z(r,n,k_z) - ik_z\hat{U}_\theta(r,n,k_z),$$
$$\widehat{\vec{\nabla}_s \wedge f}(r,n,k_z) = ik_z\hat{f}(r,n,k_z)\vec{e_\theta} - \frac{in}{r}\hat{f}(r,n,k_z)\vec{e_z},$$

donc

$$\widehat{\mathcal{L}_R\vec{U}}(r,n,k_z) = \left(k_z^2\vec{e_\theta} - \frac{nk_z}{r}\vec{e_z}\right)\hat{U}_\theta(r,n,k_z) + \left(-\frac{nk_z}{r}\vec{e_\theta} + \frac{n^2}{r^2}\vec{e_z}\right)\hat{U}_z(r,n,k_z).$$

□

4.2.2 Expression de la matrice d'impédance approchée par une CI

Tout comme dans le cas du plan infini, on peut donc définir $\hat{\mathbf{Z}}_{IBC}$ l'opérateur matriciel associé à la condition d'impédance d'ordre élevée. Par exemple,

$$\hat{\mathbf{Z}}_{CI3}(n,k_z) = \left(\mathbf{I} + b_1\frac{\hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(n,k_z)}{k_0^2} - b_2\frac{\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(n,k_z)}{k_0^2}\right)^{-1} \left(a_0\mathbf{I} + a_1\frac{\hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(n,k_z)}{k_0^2} - a_2\frac{\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(n,k_z)}{k_0^2}\right). \tag{4.2.1}$$

4.3 Choix des coefficients de la CI3 par moindres carrés sur l'impédance

Dans la section précédente, nous avons exprimé les matrices $\hat{\mathbf{Z}}$ et la matrice $\hat{\mathbf{R}}$ en fonction de l'empilement. Nous allons montrer que nous pouvons choisir deux manières de calculer les coefficients de la CIOE CI3 (ce qui s'étend facilement aux CIOE dérivées de cette dernière).

4.3.1 Choix de la fonction J_Z

Ce premier choix consiste à minimiser l'erreur entre le le symbole de l'opérateur de Calderón et le multiplicateur de Fourier matriciel associé à la CIOE.

Définition 4.22. *On définit $\mathbf{H}_{CI3}$ la fonction de $\mathbb{N}\times\mathbb{R}\times\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_{4\times5}(\mathbb{C})$ telle que*

$$\mathbf{H}_{CI3}(n,k_z,\mathbf{Z}) = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(n,k_z)_{11} & -\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(n,k_z)_{11} & -\left(\hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(n,k_z)\mathbf{Z}\right)_{11} & \left(\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(n,k_z)\mathbf{Z}\right)_{11} \\ 0 & \hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(n,k_z)_{12} & -\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(n,k_z)_{12} & -\left(\hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(n,k_z)\mathbf{Z}\right)_{12} & \left(\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(n,k_z)\mathbf{Z}\right)_{12} \\ 0 & \hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(n,k_z)_{21} & -\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(n,k_z)_{21} & -\left(\hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(n,k_z)\mathbf{Z}\right)_{21} & \left(\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(n,k_z)\mathbf{Z}\right)_{21} \\ 1 & \hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(n,k_z)_{22} & -\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(n,k_z)_{22} & -\left(\hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(n,k_z)\mathbf{Z}\right)_{22} & \left(\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(n,k_z)\mathbf{Z}\right)_{22} \end{bmatrix}.$$

On définit b la fonction de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^4$ telle que

$$b(\mathbf{Z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} \\ \mathbf{Z}_{12} \\ \mathbf{Z}_{21} \\ \mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix}.$$

Proposition 4.23. *Soient $X = (a_0,a_1,a_2,b_1,b_2)^t$, (n,k_z) fixé et $\hat{\mathbf{Z}}_{ex}$ l'opérateur d'impédance exact du cylindre. Supposons qu'il existe un unique X minimisant la distance entre ces deux matrices alors*

$$\underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \left\|\hat{\mathbf{Z}}_{CI3}(n,k_z,X) - \hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n,k_z)\right\| = \underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \left\|\mathbf{H}_{CI3}(n,k_z,\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n,k_z))X - b(\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n,k_z))\right\|.$$

Démonstration. C'est la même méthodologie que pour le plan. On rappelle que dans la section précédente, on a introduit

$$\hat{\mathbf{Z}}_{CI3}(n,k_z) = \left(\mathbf{I} + b_1\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{D}}}(n,k_z) - b_2\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{R}}}(n,k_z)\right)^{-1} \left(a_0\mathbf{I} + a_1\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{D}}}(n,k_z) - a_2\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{R}}}(n,k_z)\right).$$

On pose $\hat{\mathbf{Z}}_D(n,k_z,X) = \mathbf{I} + b_1\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{D}}}(n,k_z) - b_2\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{R}}}(n,k_z)$ et $\hat{\mathbf{Z}}_N(n,k_z,X) = a_0\mathbf{I} + a_1\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{D}}}(n,k_z) - a_2\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{R}}}(n,k_z)$ donc $\underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \left\|\hat{\mathbf{Z}}_{CI3}(n,k_z,X) - \hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n,k_z)\right\|$

$$\begin{aligned}
&= \underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \left\|\hat{\mathbf{Z}}_D(n,k_z,X)^{-1}\hat{\mathbf{Z}}_N(n,k_z,X) - \hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n,k_z)\right\|,\\
&= \underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \left\|\hat{\mathbf{Z}}_D(n,k_z,X)^{-1}\left(\hat{\mathbf{Z}}_N(n,k_z,X) - \hat{\mathbf{Z}}_D(n,k_z,X)\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n,k_z)\right)\right\|,\\
&= \underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \left\|\hat{\mathbf{Z}}_N(n,k_z,X) - \hat{\mathbf{Z}}_D(n,k_z,X)\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n,k_z)\right\|,\\
&= \underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \left\|\hat{\mathbf{Z}}_N(n,k_z,X) - \left(b_1\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{D}}}(n,k_z) - b_2\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{R}}}(n,k_z)\right)\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n,k_z) - \hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n,k_z)\right\|,\\
&= \underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \left\|\mathbf{H}_{CI3}(n,k_z,\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n,k_z))X - b(\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n,k_z))\right\|.
\end{aligned}$$

□

Afin de calculer numériquement les coefficients, on tronque la série de Fourier à N_n termes et l'on considère que k_z appartient à un domaine discret de taille N_{k_z}. Il existe donc $N_nN_{k_z}$ couples tels que $(n_i,k_{zj}) = (n,k_z)_{(j-1)N_n+i}$.

Définition 4.24. *On définit* $\mathbf{A}_{CI3}$ *la matrice de* $\mathcal{M}_{4N_nN_{k_z}\times 5}(\mathbb{C})$ *telle que*

$$\mathbf{A}_{CI3} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{CI3}(n_1,k_{z1},\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n_1,k_{z1})) \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{CI3}(n_i,k_{zj},\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n_i,k_{zj})) \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{CI3}(n_{N_n},k_{zN_{k_z}},\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n_{N_n},k_{zN_{k_z}})) \end{bmatrix}.$$

On définit g *le vecteur colonne de* $\mathbb{C}^{4N_nN_{k_z}}$ *tel que*

$$g = \begin{bmatrix} b(\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n_1,k_{z1})) \\ \vdots \\ b(\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n_i,k_{zj})) \\ \vdots \\ b(\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n_{N_n},k_{zN_{k_z}})) \end{bmatrix}.$$

On peut alors calculer les coefficients de la CI3.

Définition 4.25. *On définit*

$$\begin{aligned} J_Z :\ & \mathbb{C}^5 \to \mathbb{R} \\ & X \mapsto \|\mathbf{A}_{CI3}X - g\|^2. \end{aligned}$$

Théorème 4.26 (Minimisation sans contraintes pour la CI3)**.** *Les coefficients de la CIOE sont solutions du problème*
Trouver $X^* \in \mathbb{C}^5$ *tel que*

$$X^* = \underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} J_Z(X).$$

Proposition 4.27. *Si* $\overline{\mathbf{A}_{CI3}^t}\mathbf{A}_{CI3}$ *est inversible, alors*

$$X^* = (\overline{\mathbf{A}_{CI3}^t}\mathbf{A}_{CI3})^{-1}\overline{\mathbf{A}_{CI3}^t}g.$$

Démonstration. Même démonstration que pour le théorème 3.34. □

Nous n'avons pas réussi à démontrer que cette matrice était définie pour tout empilement et toute incidence.

Théorème 4.28 (Minimisation avec contraintes pour la CI3)**.** *Soit* $\mathrm{CSU}_{\mathrm{CI3}}^3$ *le sous-espace de* $\mathbb{C}^5$ *issu de la définition 2.31, alors les coefficients de la CIOE respectant les CSU sont solutions du problème*
Trouver $X^* \in \mathbb{C}^5$ *tel que*

$$X^* = \underset{X\in\mathrm{CSU}_{\mathrm{CI3}}^3}{\operatorname{argmin}} J_Z(X).$$

4.4 Choix des coefficients de la CI3 par moindres carrés sur les coefficients de la série de Fourier

Soient $\mathbf{M_J}$ et $\mathbf{M_H}$ les fonctions introduites à la définition 4.7 et $\hat{\mathbf{R}}$ la fonction définie à la définition 4.8.

Définition 4.29. *On définit les fonctions* $\hat{\mathbf{R}}_{ex}, \hat{\mathbf{R}}_{CI3}$ *de* $\mathbb{N}\times\mathbb{R}\to\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ *telles que*

$$\hat{\mathbf{R}}_{ex}(n,k_z) = \hat{\mathbf{R}}(n,k_z,\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n,k_z)),$$
$$\hat{\mathbf{R}}_{CI3}(n,k_z) = \hat{\mathbf{R}}(n,k_z,\hat{\mathbf{Z}}_{CI3}(n,k_z)),$$

où $\hat{\mathbf{Z}}_{ex}, \hat{\mathbf{Z}}_{CI3}$ *sont des fonctions définies à la proposition 4.12 et à l'équation* (4.2.1).

4.4.1 Choix de la fonction J_R

On utilise les fonctions $\mathbf{N}_E, \mathbf{N}_H$ introduites à la définition 4.13.

Définition 4.30. *On définit* $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ *les fonctions de* $\mathbb{N}\times\mathbb{R}\times\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ *telles que*

$$\mathbf{A}_0(n,k_z,\mathbf{R}) = \mathbf{N}_E(r_c^+,n,k_z,\mathbf{R}),$$
$$\mathbf{A}_1(n,k_z,\mathbf{R}) = \hat{\mathbf{L_D}}(n,k_z)\mathbf{N}_E(r_c^+,n,k_z,\mathbf{R}),$$
$$\mathbf{A}_2(n,k_z,\mathbf{R}) = -\hat{\mathbf{L_R}}(n,k_z)\mathbf{N}_E(r_c^+,n,k_z,\mathbf{R}),$$
$$\mathbf{B}_1(n,k_z,\mathbf{R}) = \hat{\mathbf{L_D}}(n,k_z)\mathbf{N}_H(r_c^+,n,k_z,\mathbf{R}),$$
$$\mathbf{B}_2(n,k_z,\mathbf{R}) = -\hat{\mathbf{L_R}}(n,k_z)\mathbf{N}_H(r_c^+,n,k_z,\mathbf{R}).$$

On définit $\widetilde{\mathbf{H}}_{CI3}$ *la fonction de* $\mathbb{N}\times\mathbb{R}\times\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\to\mathcal{M}_{4\times5}(\mathbb{C})$ *telle que*

$$\widetilde{\mathbf{H}}_{CI3}(n,k_z,\mathbf{R}) =$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0(n,k_z,\mathbf{R})_{11} & \mathbf{A}_1(n,k_z,\mathbf{R})_{11} & \mathbf{A}_2(n,k_z,\mathbf{R})_{11} & \mathbf{B}_1(n,k_z,\mathbf{R})_{11} & \mathbf{B}_2(n,k_z,\mathbf{R})_{11} \\ \mathbf{A}_0(n,k_z,\mathbf{R})_{12} & \mathbf{A}_1(n,k_z,\mathbf{R})_{12} & \mathbf{A}_2(n,k_z,\mathbf{R})_{12} & \mathbf{B}_1(n,k_z,\mathbf{R})_{12} & \mathbf{B}_2(n,k_z,\mathbf{R})_{12} \\ \mathbf{A}_0(n,k_z,\mathbf{R})_{21} & \mathbf{A}_1(n,k_z,\mathbf{R})_{21} & \mathbf{A}_2(n,k_z,\mathbf{R})_{21} & \mathbf{B}_1(n,k_z,\mathbf{R})_{21} & \mathbf{B}_2(n,k_z,\mathbf{R})_{21} \\ \mathbf{A}_0(n,k_z,\mathbf{R})_{22} & \mathbf{A}_1(n,k_z,\mathbf{R})_{22} & \mathbf{A}_2(n,k_z,\mathbf{R})_{22} & \mathbf{B}_1(n,k_z,\mathbf{R})_{22} & \mathbf{B}_2(n,k_z,\mathbf{R})_{22} \end{bmatrix}.$$

On définit $\widetilde{b}$ *la fonction de* $\mathbb{N}\times\mathbb{R}\times\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\to\mathbb{C}^4$ *telle que*

$$\widetilde{b}(n,k_z,\mathbf{R}) = -\begin{bmatrix} \mathbf{N}_H(r_c^+,n,k_z,\mathbf{R})_{11} \\ \mathbf{N}_H(r_c^+,n,k_z,\mathbf{R})_{12} \\ \mathbf{N}_H(r_c^+,n,k_z,\mathbf{R})_{21} \\ \mathbf{N}_H(r_c^+,n,k_z,\mathbf{R})_{22} \end{bmatrix}.$$

Proposition 4.31. *Soient* $X=(a_0,a_1,a_2,b_1,b_2)^t\in\mathbb{C}^5$, (n,k_z) *fixé et* $\hat{\mathbf{R}}_{ex}$ *la matrice définie en 4.29.*
Supposons qu'il existe un unique X *qui minimise la distance entre ces deux matrices, alors*

$$\operatorname*{argmin}_{X\in\mathbb{C}^5}\left\|\hat{\mathbf{R}}_{CI3}(n,k_z,X)-\hat{\mathbf{R}}_{ex}(n,k_z)\right\| = \operatorname*{argmin}_{X\in\mathbb{C}^5}\left\|\widetilde{\mathbf{H}}_{CI3}(n,k_z,\hat{\mathbf{R}}_{ex}(n,k_z))X-\widetilde{b}(n,k_z,\hat{\mathbf{R}}_{ex}(n,k_z))\right\|.$$

Démonstration. C'est la même méthodologie que pour l'impédance.

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{argmin}_{X\in\mathbb{C}^5}\left\|\hat{\mathbf{R}}_{CI3}(n,k_z,X)-\hat{\mathbf{R}}_{ex}(n,k_z)\right\| \\
&= \operatorname*{argmin}_{X\in\mathbb{C}^5}\left\|-\mathbf{M}_{\mathbf{H}}(r_c^+,n,k_z,\hat{\mathbf{Z}}_{CI3})^{-1}\mathbf{M}_{\mathbf{J}}(r_c^+,n,k_z,\hat{\mathbf{Z}}_{CI3})-\hat{\mathbf{R}}_{ex}(n,k_z)\right\|, \\
&= \operatorname*{argmin}_{X\in\mathbb{C}^5}\left\|-\mathbf{M}_{\mathbf{H}}(r_c^+,n,k_z,\hat{\mathbf{Z}}_{CI3})^{-1}\left(\mathbf{M}_{\mathbf{J}}(r_c^+,n,k_z,\hat{\mathbf{Z}}_{CI3})+\mathbf{M}_{\mathbf{H}}(r_c^+,n,k_z,\hat{\mathbf{Z}}_{CI3})\hat{\mathbf{R}}_{ex}(n,k_z)\right)\right\|, \\
&= \operatorname*{argmin}_{X\in\mathbb{C}^5}\left\|\mathbf{M}_{\mathbf{J}}(r_c^+,n,k_z,\hat{\mathbf{Z}}_{CI3})+\mathbf{M}_{\mathbf{H}}(r_c^+,n,k_z,\hat{\mathbf{Z}}_{CI3})\hat{\mathbf{R}}_{ex}(n,k_z)\right\|.
\end{aligned}$$

D'après la définition 4.7 des fonctions $\mathbf{M}_{\mathbf{J}},\mathbf{M}_{\mathbf{H}}$,

$$\begin{aligned}
&= \operatorname*{argmin}_{X\in\mathbb{C}^5}\Big\|\left(\mathbf{J}_E(r_c^+,n,k_z)-\hat{\mathbf{Z}}_{CI3}(n,k_z)\mathbf{J}_H(r_c^+,n,k_z)\right) \\
&\quad+\left(\mathbf{H}_E(r_c^+,n,k_z)-\hat{\mathbf{Z}}_{CI3}(n,k_z)\mathbf{H}_H(r_c^+,n,k_z)\right)\hat{\mathbf{R}}_{ex}(n,k_z)\Big\|.
\end{aligned}$$

D'après la définition de $\hat{\mathbf{Z}}_{CI3}$,

$$\begin{aligned}
&= \operatorname*{argmin}_{X\in\mathbb{C}^5}\Big\|\hat{\mathbf{Z}}_D(n,k_z,X)^{-1}\left(\hat{\mathbf{Z}}_D(n,k_z,X)\mathbf{J}_E(r_c^+,n,k_z)-\hat{\mathbf{Z}}_N(n,k_z,X)\mathbf{J}_H(r_c^+,n,k_z)\right) \\
&\quad+\hat{\mathbf{Z}}_D(n,k_z,X)^{-1}\left(\hat{\mathbf{Z}}_D(n,k_z,X)\mathbf{H}_E(r_c^+,n,k_z)-\hat{\mathbf{Z}}_N(n,k_z,X)\mathbf{H}_H(r_c^+,n,k_z)\right)\hat{\mathbf{R}}_{ex}(n,k_z)\Big\|, \\
&= \operatorname*{argmin}_{X\in\mathbb{C}^5}\Big\|\left(\hat{\mathbf{Z}}_D(n,k_z,X)\mathbf{J}_E(r_c^+,n,k_z)-\hat{\mathbf{Z}}_N(n,k_z,X)\mathbf{J}_H(r_c^+,n,k_z)\right) \\
&\quad+\left(\hat{\mathbf{Z}}_D(n,k_z,X)\mathbf{H}_E(r_c^+,n,k_z)-\hat{\mathbf{Z}}_N(n,k_z,X)\mathbf{H}_H(r_c^+,n,k_z)\right)\hat{\mathbf{R}}_{ex}(n,k_z)\Big\|.
\end{aligned}$$

D'après la définition 4.13 des fonctions $\mathbf{N}_E,\mathbf{N}_H$,

$$= \operatorname*{argmin}_{X\in\mathbb{C}^5}\left\|\hat{\mathbf{Z}}_N(n,k_z,X)\mathbf{N}_E(r_c^+,n,k_z,\hat{\mathbf{R}}_{ex}(n,k_z))+\hat{\mathbf{Z}}_D(n,k_z,X)\mathbf{N}_H(r_c^+,n,k_z,\hat{\mathbf{R}}_{ex}(n,k_z))\right\|$$

et l'on conclut d'après la définition des fonctions $\hat{\mathbf{Z}}_D,\hat{\mathbf{Z}}_N$. □

On tronque la série de Fourier à N_n termes et on se dote de N_{k_z} k_z. Il existe donc $N_n N_{k_z}$ couples tels que $(n_i, k_{zj}) = (n, k_z)_{(j-1)N_n+i}$.

Définition 4.32. *On définit* $\widetilde{\mathbf{A}}_{CI3}$ *la matrice de* $\mathcal{M}_{4N_nN_{k_z}\times 5}(\mathbb{C})$ *telle que*

$$\widetilde{\mathbf{A}}_{CI3} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{H}}_{CI3}(n_1, k_{z1}, \hat{\mathbf{R}}_{ex}(n_1, k_{z1})) \\ \vdots \\ \widetilde{\mathbf{H}}_{CI3}(n_i, k_{zj}, \hat{\mathbf{R}}_{ex}(n_i, k_{zj})) \\ \vdots \\ \widetilde{\mathbf{H}}_{CI3}(n_{N_n}, k_{zN_{k_z}}, \hat{\mathbf{R}}_{ex}(n_{N_n}, k_{zN_{k_z}})) \end{bmatrix}.$$

On définit $\widetilde{g}$ *le vecteur colonne* $\mathbb{C}^{4N_nN_{k_z}}$ *tel que*

$$\widetilde{g} = \begin{bmatrix} \widetilde{b}(n_1, k_{z1}, \hat{\mathbf{R}}_{ex}(n_1, k_{z1})) \\ \vdots \\ \widetilde{b}(n_i, k_{zj}, \hat{\mathbf{R}}_{ex}(n_i, k_{zj})) \\ \vdots \\ \widetilde{b}(n_{N_n}, k_{zN_{k_z}}, \hat{\mathbf{R}}_{ex}(n_{N_n}, k_{zN_{k_z}})) \end{bmatrix}.$$

On peut alors calculer les coefficients de la CI3 :

Définition 4.33. *On définit la fonctionnelle* J_R

$$J_R(X) = \left\| \widetilde{\mathbf{A}}_{CI3} X - \widetilde{g} \right\|.$$

Définition 4.34 (Minimisation sans contraintes pour la CI3)**.** *Les coefficients de la CIOE sont solutions du problème*
Trouver $X^* \in \mathbb{C}^5$ *tel que*

$$X^* = \underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} J_R(X).$$

Proposition 4.35. *Si* $\overline{\widetilde{\mathbf{A}}_{CI3}^{\,t}}\widetilde{\mathbf{A}}_{CI3}$ *est inversible alors*

$$X^* = (\overline{\widetilde{\mathbf{A}}_{CI3}^{\,t}}\widetilde{\mathbf{A}}_{CI3})^{-1}\overline{\widetilde{\mathbf{A}}_{CI3}^{\,t}}\widetilde{g}.$$

Démonstration. Même méthode que pour la proposition 4.27 sur l'impédance. □

Nous n'avons pas réussi à démontrer que cette matrice était définie pour tout empilement et toute incidence.

Définition 4.36 (Minimisation avec contraintes pour la CI3)**.** *Soit* $\mathrm{CSU}^3_{\mathrm{CI3}}$ *le sous-espace de* $\mathbb{C}^5$ *issu de la définition 2.31. Alors les coefficients de la CIOE respectant les CSU sont solutions du problème*
Trouver $X^* \in \mathbb{C}^5$ *tel que*

$$X^* = \underset{X\in\mathrm{CSU}^3_{\mathrm{CI3}}}{\operatorname{argmin}} J_R(X).$$

4.5 Résultats numériques

Lors des calculs numériques, les opérateurs différentiels sont divisés par k_0^2 pour respecter les conventions des codes internes existants.
Ainsi la CI3 s'exprime

$$\left(\mathcal{I} + b_1\frac{\mathcal{L}_D}{k_0^2} - b_2\frac{\mathcal{L}_R}{k_0^2}\right)\vec{E}_t = \left(a_0\mathcal{I} + a_1\frac{\mathcal{L}_D}{k_0^2} - a_2\frac{\mathcal{L}_R}{k_0^2}\right)\vec{J}$$

et donc la matrice d'impédance associée est

$$\hat{\mathbf{Z}}_{CI3}(n,k_z) = \left(\mathbf{I} + \frac{b_1}{k_0^2}\hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(n,k_z) - \frac{b_2}{k_0^2}\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(n,k_z)\right)^{-1} \left(a_0\mathbf{I} + \frac{a_1}{k_0^2}\hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(n,k_z) - \frac{a_2}{k_0^2}\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(n,k_z)\right).$$

Il est évident que la CI3 n'est pas une bonne approximation du multiplicateur de Fourier de l'opérateur de Calderón, par exemple quand $(n,k_z) = (0,0)$.
Une CIOE plus intéressante, que l'on nomme CI6 et qui est inspirée de Hoppe et al. 1995, p. 60, est alors

$$\left(\mathcal{I} + c_1\frac{\mathcal{L}_D}{k_0^2} - c_2\frac{\mathcal{L}_R}{k_0^2}\right)\vec{E}_t = \left(\mathrm{diag}\,(a_1,a_2) + b_1\frac{\mathcal{L}_D}{k_0^2} - b_2\frac{\mathcal{L}_R}{k_0^2}\right)\vec{J}$$

La figure 4.2 trace les valeurs des termes diagonaux de la matrice $\hat{\mathbf{Z}}$ quand les coefficients sont calculés en minimisant J_Z. La figure 4.3 trace les valeurs des termes diagonaux de la matrice $\hat{\mathbf{Z}}$ quand les coefficients sont calculés en minimisant J_R.
On prend une incidence normale au cylindre ($k_z = 0$), donc les matrices d'impédance exactes et approchées sont diagonales. On fait varier n de 0 à $\lceil k_0(r_0+d)\rceil$. On trace sur ces figures les parties imaginaires des termes diagonaux pour chaque n, les parties réelles étant nulles. Les coefficients sont calculés sans contraintes.

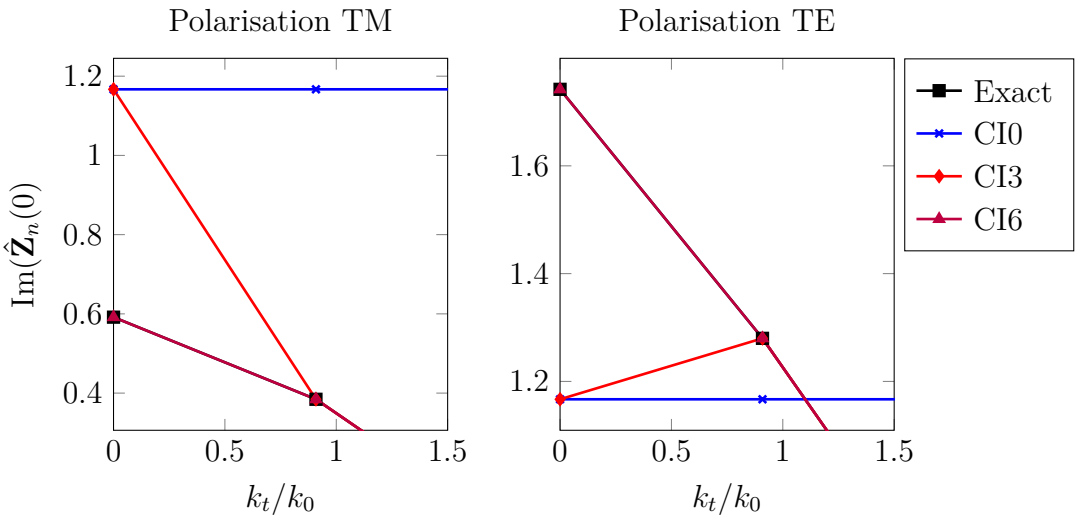


FIGURE 4.2 – Minimisation de J_Z : Partie imaginaire des termes diagonaux des matrices d'impédance pour l'empilement $\epsilon = 6$, $\mu = 1$, $d = 0.0225$m, $f = 1$GHz, $r_0 = 0.03$m en fonction de $k_t = n/(r_0 + d)$.

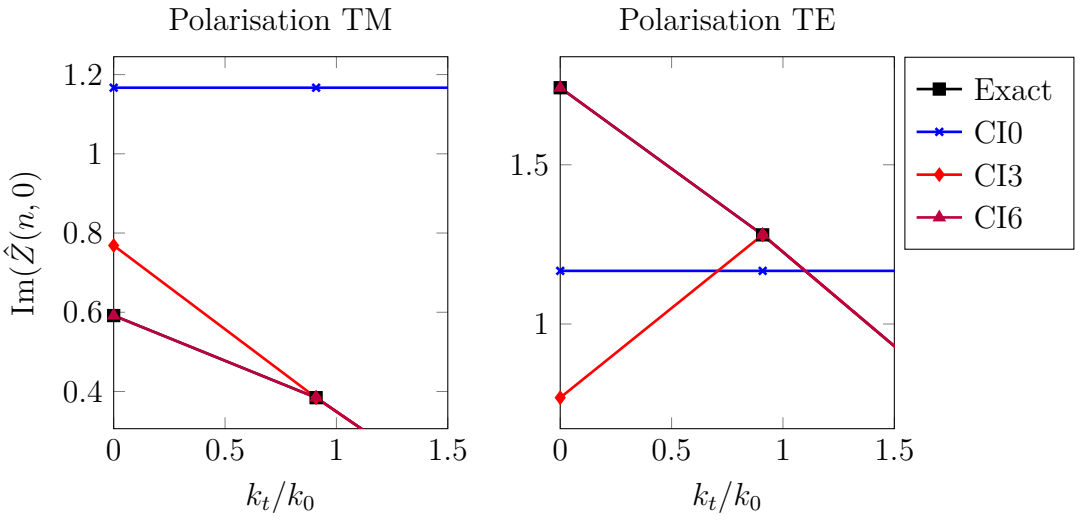


FIGURE 4.3 – Minimisation de J_R : Partie imaginaire des termes diagonaux des matrices d'impédance pour l'empilement $\epsilon = 6$, $\mu = 1$, $d = 0.0225$m, $f = 1$GHz, $r_0 = 0.03$m en fonction de $k_t = n/(r_0 + d)$.

On voit donc bien que les deux méthodes donnent des résultats différents, mais dans les deux cas, la CI3 est une mauvaise approximation tandis que le calcul des coefficients de la CI6 par la minimisation de J_R donne la meilleure approximation de l'impédance.

Cependant cette CIOE ne sera pas retenue car son implémentation dans le code équation intégrale nécessite une modification de ce dernier et nous n'avons pas de CSU.

CI0	
a0	-2.278E-18 +1.167E+00i

CI3	
a0	-2.278E-18 +1.167E+00i
a1	-2.188E-13 +1.796E+02i
a2	-5.276E-14 +1.035E+02i
b1	1.792E+02 +2.511E-13i
b2	-6.250E+02 +1.176E-13i

CI6	
a1	-4.863E-16 +5.917E-01i
a2	4.817E-16 +1.742E+00i
b1	-1.915E-13 -1.912E+01i
b2	-5.186E-14 +5.844E+01i
c1	-1.735E+02 +5.055E-13i
c2	-8.484E+01 -4.292E-13i

TABLE 4.1 – Coefficients associés à la figure 4.2

CI0	
a0	6.765E-16 +1.167E+00i

CI3	
a0	-7.266E-17 +7.685E-01i
a1	-4.077E-13 +3.173E+02i
a2	-3.555E-14 +7.228E+01i
b1	4.234E+02 +3.168E-13i
b2	-2.509E+02 -6.071E-14i

CI6	
a1	-4.552E-16 +5.917E-01i
a2	1.872E-15 +1.742E+00i
b1	-8.695E-13 -1.912E+01i
b2	-5.139E-14 +5.844E+01i
c1	-1.735E+02 +1.647E-12i
c2	-8.484E+01 -4.285E-13i

TABLE 4.2 – Coefficients associés à la figure 4.3

Les tableaux 4.3 contiennent les valeurs des erreurs relatives au carré de $\hat{\mathbf{Z}}$. Plus précisément, l'expression de ces erreurs est

$$\text{TM} : \frac{\sum_{i=1}^{N_n}\sum_{j=1}^{N_{k_z}} |\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n_i,k_{zj})_{11} - \hat{\mathbf{Z}}_{ap}(n_i,k_{zj})_{11}|^2}{\sum_{i=1}^{N_n}\sum_{j=1}^{N_{k_z}} |\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n_i,k_{zj})_{11}|^2},$$

$$\text{TE} : \frac{\sum_{i=1}^{N_n}\sum_{j=1}^{N_{k_z}} |\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n_i,k_{zj})_{22} - \hat{\mathbf{Z}}_{ap}(n_i,k_{zj})_{22}|^2}{\sum_{i=1}^{N_n}\sum_{j=1}^{N_{k_z}} |\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n_i,k_{zj})_{22}|^2},$$

$$\text{complète} : \frac{\sum_{p=1}^{2}\sum_{q=1}^{2}\sum_{i=1}^{N_n}\sum_{j=1}^{N_{k_z}} |\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n_i,k_{zj})_{pq} - \hat{\mathbf{Z}}_{ap}(n_i,k_{zj})_{pq}|^2}{\sum_{p=1}^{2}\sum_{q=1}^{2}\sum_{i=1}^{N_n}\sum_{j=1}^{N_{k_z}} |\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n_i,k_{zj})_{pq}|^2}.$$

Les tableaux 4.4 contiennent les valeurs des erreurs relatives au carré sur $\hat{\mathbf{R}}$ dont

CIOE	Minimisation J_R			Minimisation J_Z		
	TM	TE	complète	TM	TE	complète
CI6	1.62E-01	3.38E-04	8.23E-02	1.17E-02	5.60E-04	6.23E-03
CI3	4.30E-01	3.99E-01	4.15E-01	6.82E-02	1.71E-01	1.19E-01
CI0	5.15E+00	1.16E+00	3.18E+00	5.15E+00	1.16E+00	3.18E+00

TABLE 4.3 – Erreur relative sur les matrices d'impédance $\hat{\mathbf{Z}}$.

l'expression est

$$\text{TM} : \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_n}\sum_{j=1}^{N_{kz}} |\hat{\mathbf{R}}_{ex}(n_i,k_{zj})_{11} - \hat{\mathbf{R}}_{ap}(n_i,k_{zj})_{11}|^2}{\sum_{i=1}^{N_n}\sum_{j=1}^{N_{kz}} |\hat{\mathbf{R}}_{ex}(n_i,k_{zj})_{11}|^2}},$$

$$\text{TE} : \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_n}\sum_{j=1}^{N_{kz}} |\hat{\mathbf{R}}_{ex}(n_i,k_{zj})_{22} - \hat{\mathbf{R}}_{ap}(n_i,k_{zj})_{22}|^2}{\sum_{i=1}^{N_n}\sum_{j=1}^{N_{kz}} |\hat{\mathbf{R}}_{ex}(n_i,k_{zj})_{22}|^2}},$$

somme : TE + TM.

CIOE	Minimisation J_R			Minimisation J_Z		
	TM	TE	somme	TM	TE	somme
CI6	1.50E-04	2.56E-03	2.71E-03	1.03E-02	2.69E-01	2.79E-01
CI3	3.31E-01	2.33E-01	5.64E-01	3.00E-01	7.14E-01	1.01E+00
CI0	1.56E-01	1.73E+00	1.88E+00	1.56E-01	1.73E+00	1.88E+00

TABLE 4.4 – Erreur relative sur les matrices de réflexion $\hat{\mathbf{R}}$.

Conclusion

Cette géométrie a pu montrer la limite de la CI3 pour approcher l'impédance exacte et l'on a introduit une meilleure CIOE, mais nous n'avons pas de CSU pour cette dernière.

Chapitre 5

Calcul des coefficients pour une sphère

Sommaire

Introduction 102
5.1 Les harmoniques sphériques vectorielles 102
5.2 Opérateur de Calderón pour une sphère 104
5.2.1 Expressions des champs tangentiels dans chaque couche . 104
5.2.2 Expression de la matrice d'impédance pour une couche . . 106
5.2.3 Expression de la matrice d'impédance pour plusieurs couches 107
5.2.4 Expression des coefficients de la série de Fourier 109
5.2.5 Applications numériques 112
5.3 Approximation par une CIOE de l'opérateur de Calderón de la sphère 113
5.3.1 Expression des opérateurs LD,LR en Fourier 113
5.3.2 Expression de la matrice d'impédance approchée par la CI3 115
5.4 Choix 1 du calcul des coefficients de la CI3 115
5.4.1 Expression de la fonctionnelle 115
5.5 Choix 2 du calcul des coefficients de la CI3 117
5.5.1 Expression de la fonctionnelle 117
5.6 Résultats numériques 119
Conclusion 120

Introduction

Après le cylindre, nous présentons la sphère, qui possède une courbure dans deux directions. Cette géométrie présente des résultats similaires au plan et au cylindre, car elle possède une courbure, comme pour le cylindre, et fera donc intervenir des fonctions de Bessel, mais possède une invariance par rotation en plus, comme pour le plan.
Nous rappelons d'abord des résultats connus sur les fonctions spéciales usuelles (J.-C. Nédélec 2001).

5.1 Les harmoniques sphériques vectorielles

Définition 5.1 (Harmonique sphérique d'ordre n et de degré m)**.** *Soit $\mathbb{P}_n^m(x)$ le polynôme associé de Legendre (voir Abramowitz et al. 1964, Chapitre. 8 ou équivalent DLMF 2019, `https://dlmf.nist.gov/14.21#i.p1`) d'ordre n et de degré m. On appelle harmoniques sphériques d'ordre n et de degré m les fonctions de $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telles que*

$$Y_{m,n}(\theta,\phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} e^{im\phi}\mathbb{P}_n^m(\cos\theta).$$

Proposition 5.2. *Les harmoniques sphériques $Y_{m,n}$ sont solutions de*

$$\Delta_s u(\theta,\phi) = 0, \qquad \forall(\theta,\phi) \in [0,\pi]\times[0,2\pi].$$

Proposition 5.3. *Soit S la sphère unité. Les harmoniques sphériques forment une base orthonormale de $L^2(S)$.*

Démonstration. Voir J.-C. Nédélec 2001, p. 14 □

Définition 5.4. *On appelle fonctions de Bessel sphériques d'ordre n les fonctions de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ solution de*

$$z^2\frac{\mathrm{d}^2u(z)}{\mathrm{d}z^2} + 2z\frac{\mathrm{d}u(z)}{\mathrm{d}z} + \Big(z^2 - n(n+1)\Big)\,u(z) = 0.$$

Ces fonctions sont détaillées dans Abramowitz et al. 1964, p. 437 ou DLMF 2019, `https://dlmf.nist.gov/10.47`. On note j_n la fonction de Bessel sphérique de première espèce et $h_n^{(2)}$ la fonction de Hankel sphérique de deuxième espèce.

Proposition 5.5. *Soit z_n une fonction de Bessel sphérique d'ordre n et $Y_{m,n}$ une harmonique sphérique d'ordre n et de degré m, alors les fonctions $(r,\theta,\phi) \mapsto z_n(k(r)r)Y_{m,n}(\theta,\phi)$ sont solutions de*

$$\Delta u(r,\theta,\phi) + k^2 u(r,\theta,\phi) = 0, \qquad \forall(r,\theta,\phi) \in \mathbb{R}\times[0,\pi]\times[0,2\pi].$$

Démonstration. Voir J.-C. Nédélec 2001, section. 2.6.1. □

Définition 5.6. *On définit l'opérateur tilde agissant sur les fonctions dérivables tel que*
Pour tout $f \in C^1(\mathbb{C})$,

$$\widetilde{f}(z) = f(z) + zf'(z), \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Définition 5.7. *Soit z_n une fonction de Bessel sphérique d'ordre n et $Y_{m,n}$ une harmonique sphérique d'ordre n et de degré m. On appelle harmoniques sphériques vectorielles (ou vecteurs harmoniques sphériques) les fonctions $\vec{M}_{m,n}, \vec{N}_{m,n}$ telles que*

$$\vec{M}^{z_n}_{m,n}(r,\theta,\phi) := \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{r} z_n(k(r)r) Y_{m,n}(\theta,\phi)\right), \tag{5.1.1}$$
$$= z_n(k(r)r) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{im}{\sin\theta} Y_{mn}(\theta,\phi) \\ -\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\theta}(\theta,\phi) \end{bmatrix},$$

$$\vec{N}^{z_n}_{m,n}(r,\theta,\phi) := \frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{M}^{z_n}_{m,n}}{k}(r,\theta,\phi), \tag{5.1.2}$$
$$= \frac{1}{k(r)r} \begin{bmatrix} z_n(k(r)r) n(n+1) Y_{mn}(\theta,\phi) \\ \widetilde{z_n}(k(r)r) \frac{\partial Y_{mn}}{\partial\theta}(\theta,\phi) \\ \widetilde{z_n}(k(r)r) \frac{im}{\sin\theta} Y_{mn}(\theta,\phi) \end{bmatrix}.$$

Proposition 5.8. *Ces fonctions sont solutions de*

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{U}(r,\theta,\phi) - k^2 \vec{U}(r,\theta,\phi) = 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{U}(r,\theta,\phi) = 0. \end{cases}$$

Démonstration. Voir J.-C. Nédélec 2001, Théorème. 5.3.1 et sa démonstration ou l'annexe G. □

Proposition 5.9.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{M}^{z_n}_{m,n}(r,\theta,\phi) = k \vec{N}^{z_n}_{m,n}(r,\theta,\phi),$$
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{N}^{z_n}_{m,n}(r,\theta,\phi) = k \vec{M}^{z_n}_{m,n}(r,\theta,\phi).$$

Démonstration. La première se déduit de la définition de $\vec{N}^{z_n}_{m,n}$, la seconde de la propriété précédente. □

Définition 5.10. *On définit les fonctions de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}^2$*

$$\vec{U}_{m,n}(\theta,\phi) = \begin{bmatrix} \frac{im}{\sin\theta} Y_{mn}(\theta,\phi) \\ -\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\theta}(\theta,\phi) \end{bmatrix}, \tag{5.1.3}$$

$$\vec{U}_{m,n}^{\perp}(\theta,\phi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial Y_{mn}}{\partial\theta}(\theta,\phi) \\ \frac{im}{\sin\theta} Y_{mn}(\theta,\phi) \end{bmatrix}. \tag{5.1.4}$$

Proposition 5.11. *Les parties tangentielles des vecteurs harmoniques sphériques peuvent s'écrire :*

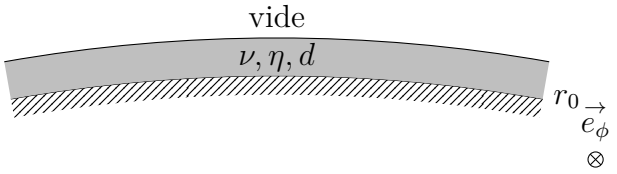
$$\vec{M}^{z_n}_{m,n_t}(r,\theta,\phi) = z_n(k(r)r) \vec{U}_{m,n}(\theta,\phi),$$
$$\vec{N}^{z_n}_{m,n_t}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{k(r)r} \widetilde{z_n}(k(r)r) \vec{U}_{m,n}^{\perp}(\theta,\phi).$$

On en déduit les propriétés supplémentaires

Proposition 5.12.

$$\vec{e_r} \wedge \vec{M^{z_n}_{m,n_t}}(r,\theta,\phi) = k(r) r z_n(k(r)r) \vec{U_{m,n}}^{\perp}(\theta,\phi),$$
$$\vec{e_r} \wedge \vec{N^{z_n}_{m,n_t}}(r,\theta,\phi) = -\frac{1}{k(r)r} \widetilde{z_n}(k(r)r) \vec{U_{m,n}}(\theta,\phi).$$

5.2 Expressions exactes des matrices d'impédance et des matrices de réflexion pour une sphère



On exprime les équations de Maxwell dans le matériau en coordonnées sphériques. Les solutions des équations de Maxwell sont développables en série de Mie

Proposition 5.13. *Il existe* $(a_{mn}, c_{mn}, d_{mn}, d_{mn})$ *constantes par morceaux en* r *telles que les champs sont*

$$\vec{E}(r,\theta,\phi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{mn} \vec{M^{j_n}_{m,n}}(r,\theta,\phi) + b_{mn} \vec{N^{j_n}_{m,n}}(r,\theta,\phi) + c_{mn} \vec{M^{h_n^{(2)}}_{m,n}}(r,\theta,\phi) + d_{mn} \vec{N^{h_n^{(2)}}_{m,n}}(r,\theta,\phi),$$

$$\vec{\mathcal{H}}(r,\theta,\phi) = \frac{i}{\eta(r)} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{mn} \vec{N^{j_n}_{m,n}}(r,\theta,\phi) + b_{mn} \vec{M^{j_n}_{m,n}}(r,\theta,\phi) + c_{mn} \vec{N^{h_n^{(2)}}_{m,n}}(r,\theta,\phi) + d_{mn} \vec{M^{h_n^{(2)}}_{m,n}}(r,\theta,\phi).$$

Démonstration. On renvoie à Cheng et al. 1993. □

5.2.1 Expressions des champs tangentiels dans chaque couche

Définition 5.14. *On définit les matrices* $\mathbf{j}_E(r,n), \mathbf{h}_E(r,n), \mathbf{j}_{\mathcal{H}}(r,n), \mathbf{h}_{\mathcal{H}}(r,n)$ *où* $k(r), \eta(r)$ *sont constants par morceaux*

$$\mathbf{j}_E(r,n) = \begin{bmatrix} j_n(k(r)r) & 0 \\ 0 & \widetilde{j_n}(k(r)r) \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{h}_E(r,n) = \begin{bmatrix} h_n^{(2)}(k(r)r) & 0 \\ 0 & \widetilde{h_n^{(2)}}(k(r)r) \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{j}_{\mathcal{H}}(r,n) = \frac{i}{k(r)\eta(r)r} \begin{bmatrix} -\widetilde{j_n}(k(r)r) & 0 \\ 0 & (k(r)r)^2 j_n(k(r)r) \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{h}_{\mathcal{H}}(r,n) = \frac{i}{k(r)\eta(r)r} \begin{bmatrix} -\widetilde{h_n^{(2)}}(k(r)r) & 0 \\ 0 & (k(r)r)^2 h_n^{(2)}(k(r)r) \end{bmatrix}.$$

En utilisant les fonctions définies précédemment, on a les expressions des coordonnées tangentielles de $\vec{E}, \vec{J} = \vec{e_r} \wedge \vec{\mathcal{H}}$.

Proposition 5.15.

$$\vec{E}_t(r,\theta,\phi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \begin{bmatrix} \vec{U_{m,n}}(\theta,\phi) & \vec{U_{m,n}}^{\perp}(\theta,\phi) \end{bmatrix} \left(\mathbf{j}_E(r,n) \begin{bmatrix} a_{mn} \\ b_{mn} \end{bmatrix} + \mathbf{h}_E(r,n) \begin{bmatrix} c_{mn} \\ d_{mn} \end{bmatrix} \right),$$
$$\vec{J}_t(r,\theta,\phi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \begin{bmatrix} \vec{U_{m,n}}(\theta,\phi) & \vec{U_{m,n}}^{\perp}(\theta,\phi) \end{bmatrix} \left(\mathbf{j}_{\mathcal{H}}(r,n) \begin{bmatrix} a_{mn} \\ b_{mn} \end{bmatrix} + \mathbf{h}_{\mathcal{H}}(r,n) \begin{bmatrix} c_{mn} \\ d_{mn} \end{bmatrix} \right).$$

Démonstration. On exprime les champs tangentiels

$$\vec{E}_t(r,\theta,\phi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{mn} j_n(k(r)r)\vec{U_{m,n}}(\theta,\phi) + b_{mn}\frac{\widetilde{j_n}(k(r)r)}{k(r)r}\vec{U_{m,n}}^{\perp}(\theta,\phi)$$
$$+ c_{mn}h_n^{(2)}(k(r)r)\vec{U_{m,n}}(\theta,\phi) + d_{mn}\frac{\widetilde{j_n}(k(r)r)}{k(r)r}\vec{U_{m,n}}^{\perp}(\theta,\phi),$$

$$\vec{J}_t(r,\theta,\phi) = \frac{i}{\eta(r)}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} -a_{mn}\frac{\widetilde{j_n}(k(r)r)}{k(r)r}\vec{U_{m,n}}(\theta,\phi) + b_{mn}k(r)r j_n(k(r)r)\vec{U_{m,n}}^{\perp}(\theta,\phi)$$
$$- \frac{\widetilde{h_n^{(2)}}(k(r)r)}{k(r)r}c_{mn}\vec{U_{m,n}}(\theta,\phi) + k(r)r h_n^{(2)}(k(r)r)d_{mn}\vec{U_{m,n}}^{\perp}(\theta,\phi).$$

Puis en réorganisant les termes, on a

$$\vec{E}_t(r,\theta,\phi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \begin{bmatrix} \vec{U_{m,n}}(\theta,\phi) & \vec{U_{m,n}}^{\perp}(\theta,\phi) \end{bmatrix}$$
$$\left(\begin{bmatrix} j_n(k(r)r) & 0 \\ 0 & \widetilde{j_n}(k(r)r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{mn} \\ b_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_n^{(2)}(k(r)r) & 0 \\ 0 & \widetilde{h_n^{(2)}}(k(r)r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{mn} \\ d_{mn} \end{bmatrix} \right),$$

$$\vec{J}_t(r,\theta,\phi) = \frac{i}{k(r)\eta(r)r}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \begin{bmatrix} \vec{U_{m,n}}(\theta,\phi) & \vec{U_{m,n}}^{\perp}(\theta,\phi) \end{bmatrix}$$
$$\left(\begin{bmatrix} -\widetilde{j_n}(k(r)r) & 0 \\ 0 & (k(r)r)^2 j_n(k(r)r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{mn} \\ b_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\widetilde{h_n^{(2)}}(k(r)r) & 0 \\ 0 & (k(r)r)^2 h_n^{(2)}(k(r)r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{mn} \\ d_{mn} \end{bmatrix} \right).$$

□

On remarque que les paramètres ϵ, μ (et donc k, η) sont constants par morceaux. Sur une interface d'équation $r = r_p$ entre deux matériaux, il y a donc un saut de valeurs pour ces matrices : $\lim_{\delta\to 0} \mathbf{j}_E(r_p+\delta,n) - \mathbf{j}_E(r_p-\delta,n) \neq 0$.

Proposition 5.16. *Si $\mu(r)\epsilon(r) \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, alors les matrices $\mathbf{j}_E(r,n)$, $\mathbf{j}_{\mathcal{H}}(r,n)$ sont inversibles pour tout n.*

Démonstration. Par définition des matrices,

$$\det(\mathbf{j}_E(r,n)) = j_n(k(r)r)\widetilde{j_n}(k(r)r),$$
$$\det(\mathbf{j}_{\mathcal{H}}(r,n)) = -\frac{1}{\eta(r)^2} j_n(k(r)r)\widetilde{j_n}$$

D'après Abramowitz et al. 1964, p. 370 ou DLMF 2019, `https://dlmf.nist.gov/10.58`, les zéros des fonctions de Bessel d'ordre réel $\nu > -1$ sont tous réels, or les fonctions de Bessel sphériques d'ordre n sont des fonctions de Bessel d'ordre $n + 1/2$ donc si $k(r) \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ alors ces matrices sont inversibles. □

Pour les matrices $\mathbf{h}_E(r,n)$, $\mathbf{h}_{\mathcal{H}}(r,n)$, on a

$$\det(\mathbf{h}_E(r,n)) = h_n^{(2)}(k(r)r)\widetilde{h_n^{(2)}}(k(r)r),$$
$$\det(\mathbf{h}_{\mathcal{H}}(r,n)) = -\frac{1}{\eta(r)^2} h_n^{(2)}(k(r)r)\widetilde{h_n^{(2)}}.$$

On ne peut rien conclure, car les zéros peuvent être complexes (voir Sandström et al. 2007). On va donc supposer ces déterminants non nuls.

5.2.2 Expression de la matrice d'impédance pour une couche

Soit $r_1 = r_0 + d$. On se place dans le matériau donc $r_0 \leq r < r_1$.

Proposition 5.17. *Supposons que la matrice* $\mathbf{h}_{\mathcal{H}}(r_1^-,n) - \mathbf{j}_{\mathcal{H}}(r_1^-,n)\mathbf{j}_E(r_0^+,n)^{-1}\mathbf{h}_E(r_0^+,n)$ *est inversible pour tout* n*, alors*

$$\hat{\vec{E}}_t(r_1^-,n) = \hat{\mathbf{Z}}(n)\hat{\vec{J}}_t(r_1^-,n)$$

où

$$\hat{\mathbf{Z}}(n) = \left(\mathbf{h}_E(r_1^-,n)\mathbf{h}_E(r_0^+,n)^{-1} - \mathbf{j}_E(r_1^-,n)\mathbf{j}_E(r_0^+,n)^{-1}\right) \left(\mathbf{h}_{\mathcal{H}}(r_1^-,n)\mathbf{h}_E(r_0^+,n)^{-1} - \mathbf{j}_{\mathcal{H}}(r_1^-,n)\mathbf{j}_E(r_0^+,n)^{-1}\right)^{-1}.$$

Démonstration. On applique la condition aux limites du conducteur parfait $\hat{\vec{E}}(r_0,n) = 0$ dans (5.15). Comme les harmoniques sphériques forment une base de $L^2(S(r_0))$, chaque terme doit être nul, donc par identification

$$\mathbf{j}_E(r_0,n)\begin{bmatrix} a_{nm} \\ b_{nm} \end{bmatrix} = -\mathbf{h}_E(r_0,n)\begin{bmatrix} c_{nm} \\ d_{nm} \end{bmatrix}.$$

On peut donc exprimer les composantes tangentielles

$$\hat{\vec{E}}_t(r_1,n) = \left(\mathbf{h}_E(r_1,n) - \mathbf{j}_E(r_1,n)\mathbf{j}_E(r_0,n)^{-1}\mathbf{h}_E(r_0,n)\right)\begin{bmatrix} c_{nm} \\ d_{nm} \end{bmatrix},$$
$$\hat{\vec{J}}_t(r_1,n) = \left(\mathbf{h}_{\mathcal{H}}(r_1,n) - \mathbf{j}_{\mathcal{H}}(r_1,n)\mathbf{j}_E(r_0,n)^{-1}\mathbf{h}_E(r_0,n)\right)\begin{bmatrix} c_{nm} \\ d_{nm} \end{bmatrix}.$$

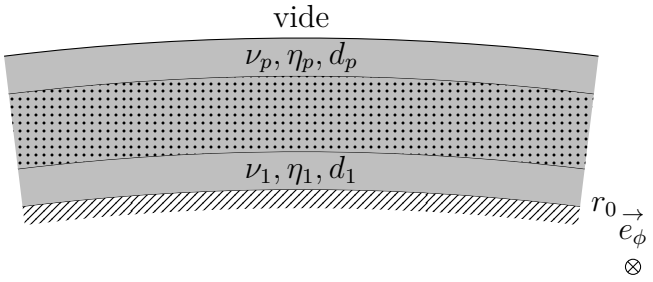
On suppose donc $\mathbf{h}_{\mathcal{H}}(r_1,n)-\mathbf{j}_{\mathcal{H}}(r_1,n)\mathbf{j}_E(r_0,n)^{-1}\mathbf{h}_E(r_0,n)$ inversible, la matrice $\hat{\mathbf{Z}}(n)$ telle que $\hat{\vec{E}}_t(r_1,n)=\hat{\mathbf{Z}}(n)\vec{J}(r_1,n)$ est alors

$$\hat{\mathbf{Z}}=\Big(\mathbf{h}_E(r_1,n)-\mathbf{j}_E(r_1,n)\mathbf{j}_E(r_0,n)^{-1}\mathbf{h}_E(r_0,n)\Big)\\ \Big(\mathbf{h}_{\mathcal{H}}(r_1,n)-\mathbf{j}_{\mathcal{H}}(r_1,n)\mathbf{j}_E(r_0,n)^{-1}\mathbf{h}_E(r_0,n)\Big)^{-1}.$$

Comme on a supposé la matrice $\mathbf{h}_E(r_0,n)$ inversible, on a la proposition.

□

5.2.3 Expression de la matrice d'impédance pour plusieurs couches



Soit r_p le rayon de l'interface p, $r_p=r_0+\sum_{i=1}^{p}d_i$. On dit que l'on se trouve dans la couche p si $r_{p-1}\leq r\leq r_p$.

Définition 5.18. *On définit les fonctions de* $[r_{p-1},r_p[\times\mathbb{N}\times\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{j}}(r,n,\mathbf{Z})=\mathbf{j}_E(r,n)-\mathbf{Z}\mathbf{j}_{\mathcal{H}}(r,n),$$
$$\mathbf{M}_{\mathbf{h}}(r,n,\mathbf{Z})=\mathbf{h}_E(r,n)-\mathbf{Z}\mathbf{h}_{\mathcal{H}}(r,n).$$

Définition 5.19. *On définit la fonction de* $[r_{p-1},r_p[\times\mathbb{N}\times\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

$$\hat{\mathbf{R}}(r,n,\mathbf{Z})=-\mathbf{M}_{\mathbf{h}}(r,n,\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{M}_{\mathbf{j}}(r,n,\mathbf{Z}).$$

A priori, pour r,n donné, $\hat{\mathbf{R}}(r,n,\mathbf{Z})$ n'est pas défini pour toute matrice $\mathbf{Z}$.
On prolonge ces définitions aux autres couches.

Définition 5.20. *On définit* $\mathbf{T}_p$ *la fonction de* $[r_{p-1},r_p[^2\times\mathbb{N}\times\mathbb{R}\times\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

$$\mathbf{T}_p(r,r',n,\mathbf{A})=\\ \Big(\mathbf{j}_E(r,n)\mathbf{M}_{\mathbf{j}}(r',n,\mathbf{A})^{-1}-\mathbf{h}_E(r,n)\mathbf{M}_{\mathbf{h}}(r',n,\mathbf{A})^{-1}\Big)\\ \Big(\mathbf{j}_{\mathcal{H}}(r,n)\mathbf{M}_{\mathbf{j}}(r',n,\mathbf{A})^{-1}-\mathbf{h}_{\mathcal{H}}(r,n)\mathbf{M}_{\mathbf{h}}(r',n,\mathbf{A})^{-1}\Big)^{-1}.$$

A priori, pour r,r',n donné, $\mathbf{T}_p(r,r',n,\mathbf{A})$ n'est pas défini pour toute matrice $\mathbf{A}$.

Proposition 5.21. *Soient* $\hat{\vec{E}}, \hat{\vec{\mathcal{H}}}$ *tels que* $\vec{E}_t(r_p^-, n) = \hat{\mathbf{Z}}_p(n)\vec{J}_t(r_p^-, n)$.
Si les matrices suivantes sont inversibles

$$\mathbf{M_j}(r_p^-, n, \hat{\mathbf{Z}}_p(n)), \qquad \mathbf{M_h}(r_p^-, n, \hat{\mathbf{Z}}_p(n)),$$

$$\mathbf{j}_{\mathcal{H}}(r_{p-1}^+, n)\mathbf{M_j}(r_p^-, n, \hat{\mathbf{Z}}_p(n))^{-1} - \mathbf{h}_{\mathcal{H}}(r_{p-1}^+, n)\mathbf{M_h}(r_p^-, n, \hat{\mathbf{Z}}_p(n))^{-1},$$

alors $\hat{\vec{E}}_t(r_{p-1}^+, n) = \mathbf{T}_p(r_{p-1}^+, r_p^-, n, \hat{\mathbf{Z}}_p(n))\hat{\vec{J}}_t(r_{p-1}^+, n)$.
Une condition d'impédance sur le bord supérieur d'une couche détermine la condition aux limites sur le bord inférieur.

Démonstration. On se situe dans la couche p ($r_{p-1} \leq r \leq r_p$). On utilise la relation en $r = r_p^-$:

$$\mathbf{j}_E(r_p^-, n)\begin{bmatrix} a_{nm} \\ b_{nm} \end{bmatrix} + \mathbf{h}_E(r_p^-, n)\begin{bmatrix} c_{nm} \\ d_{nm} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{Z}}_p(n)\left(\mathbf{j}_{\mathcal{H}}(r_p^-, n)\begin{bmatrix} a_{nm} \\ b_{nm} \end{bmatrix} + \mathbf{h}_{\mathcal{H}}(r_p^-, n)\begin{bmatrix} c_{nm} \\ d_{nm} \end{bmatrix}\right).$$

Ce qui revient à

$$\mathbf{M_j}(r_p^-, n, \hat{\mathbf{Z}}_p(n))\begin{bmatrix} a_{nm} \\ b_{nm} \end{bmatrix} = -\mathbf{M_h}(r_p^-, n, \hat{\mathbf{Z}}_p(n))\begin{bmatrix} c_{nm} \\ d_{nm} \end{bmatrix}.$$

On suppose que les matrices $\mathbf{M_j}(r_p^-, n, \hat{\mathbf{Z}}_p(n)), \mathbf{M_h}(r_p^-, n, \hat{\mathbf{Z}}_p(n))$ sont inversibles donc

$$\begin{bmatrix} c_{nm} \\ d_{nm} \end{bmatrix} = \mathbf{R}(r_p^-, n, \hat{\mathbf{Z}}_p(n))\begin{bmatrix} a_{nm} \\ b_{nm} \end{bmatrix}.$$

On injecte ce qui précède en $r = r_{p-1}^+$

$$\hat{\vec{E}}_t(r_{p-1}^+, n) = \left(\mathbf{h}_E(r_{p-1}^+, n)\mathbf{R}(r_p^-, n, \hat{\mathbf{Z}}_p(n)) + \mathbf{j}_E(r_{p-1}^+, n)\right)\begin{bmatrix} a_{nm} \\ b_{nm} \end{bmatrix}$$
$$\hat{\vec{J}}_t(r_{p-1}^+, n) = \left(\mathbf{h}_{\mathcal{H}}(r_{p-1}^+, n)\mathbf{R}(r_p^-, n, \hat{\mathbf{Z}}_p(n)) + \mathbf{j}_{\mathcal{H}}(r_{p-1}^+, n)\right)\begin{bmatrix} a_{nm} \\ b_{nm} \end{bmatrix}.$$

On suppose alors que $\mathbf{h}_{\mathcal{H}}(r_{p-1}^+, n)\mathbf{R}(r_p^-, n, \hat{\mathbf{Z}}_p(n)) + \mathbf{j}_{\mathcal{H}}(r_{p-1}^+, n))$ est inversible pour tout (n) :

$$\hat{\vec{E}}_t(r_{p-1}^+, n) = \left(\mathbf{j}_E(r_{p-1}^+, n) + \mathbf{h}_E(r_{p-1}^+, n)\mathbf{R}(r_p^-, n, \hat{\mathbf{Z}}_p(n))\right) \left(\mathbf{j}_{\mathcal{H}}(r_{p-1}^+, n) + \mathbf{h}_{\mathcal{H}}(r_{p-1}^+, n)\mathbf{R}(r_p^-, n, \hat{\mathbf{Z}}_p(n))\right)^{-1} \hat{\vec{J}}_t(r_{p-1}^+, n).$$

Comme on a supposé l'inversibilité des deux matrices $\mathbf{M}_j$, $\mathbf{M}_h$ alors on a la propriété. □

Proposition 5.22. *Soient* $\hat{\vec{E}}, \hat{\vec{\mathcal{H}}}$ *tels que* $\hat{\vec{E}}_t(r_{p-1}^+, n) = \hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(n)\hat{\vec{J}}_t(r_{p-1}^+, n)$.
Si les matrices suivantes sont inversibles

$$\mathbf{M_j}(r_{p-1}^+, n, \hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(n)), \qquad \mathbf{M_h}(r_{p-1}^+, n, \hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(n)),$$

$$\mathbf{h}_{\mathcal{H}}(r_p^-, n)\mathbf{M_h}(r_{p-1}^+, n, \hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(n))^{-1} - \mathbf{j}_{\mathcal{H}}(r_p^-, n)\mathbf{M_j}(r_{p-1}^+, n, \hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(n))^{-1},$$

alors $\hat{\vec{E}}_t(r_p^-, n) = \mathbf{T}_p(r_p^-, r_{p-1}^+, n, \hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(n))\hat{\vec{J}}_t(r_p^-, n)$.
Une condition d'impédance sur le bord inférieur d'une couche détermine la condition aux limites sur le bord supérieur.

Démonstration. Même méthodologie que pour la proposition 5.21. □

Proposition 5.23. *Soient* $\hat{\vec{E}}, \hat{\vec{\mathcal{H}}}$ *tels que*

$$\hat{\vec{E}}_t(r_{p-1}^+, n) = \hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(n)\hat{\vec{J}}_t(r_{p-1}^+, n),$$
$$\hat{\vec{E}}_t(r_p^-, n) = \hat{\mathbf{Z}}_p(n)\hat{\vec{J}}_t(r_p^-, n).$$

Si les matrices suivantes sont inversibles

$$\mathbf{M_j}(r_p^-, n, \hat{\mathbf{Z}}_p(n)), \qquad \mathbf{M_j}(r_{p-1}^+, n, \hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(n)),$$
$$\mathbf{M_h}(r_p^-, n, \hat{\mathbf{Z}}_p(n)), \qquad \mathbf{M_h}(r_{p-1}^+, n, \hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(n)),$$

$$\mathbf{j}_{\mathcal{H}}(r_p^-, n)\mathbf{M_j}(r_{p-1}^+, n, \hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(n))^{-1} - \mathbf{h}_{\mathcal{H}}(r_p^-, n)\mathbf{M_h}(r_{p-1}^+, n, \hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(n))^{-1},$$
$$\mathbf{j}_{\mathcal{H}}(r_{p-1}^+, n)\mathbf{M_j}(r_p^-, n, \hat{\mathbf{Z}}_p(n))^{-1} - \mathbf{h}_{\mathcal{H}}(r_{p-1}^+, n)\mathbf{M_h}(r_p^-, n, \hat{\mathbf{Z}}_p(n))^{-1},$$

alors

$$\hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(n) = \mathbf{T}_p(r_{p-1}^+, r_p^-, n, \hat{\mathbf{Z}}_p(n)),$$
$$\hat{\mathbf{Z}}_p(n) = \mathbf{T}_p(r_p^-, r_{p-1}^+, n, \hat{\mathbf{Z}}_{p-1}(n)).$$

On peut donc déterminer itérativement les matrices d'impédance. Dans notre cadre d'étude, la présence d'un conducteur parfait sur l'interface $r = r_0^+$ implique $\hat{\mathbf{Z}}_0(n) = 0$.

5.2.4 Expression des coefficients de la série de Fourier

On se place à l'interface p donc $r_{p-1} \leq r < r_{p+1}$.

Définition 5.24. *On définit les fonctions de* $\mathbb{R} \times \mathbb{N} \times \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

$$\mathbf{N}_E(r, n, \mathbf{A}) = \mathbf{j}_E(r, n) + \mathbf{h}_E(r, n)\mathbf{A},$$
$$\mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r, n, \mathbf{A}) = \mathbf{j}_{\mathcal{H}}(r, n) + \mathbf{h}_{\mathcal{H}}(r, n)\mathbf{A}.$$

Définition 5.25. *On définit* $\mathfrak{T}_p$ *la fonction de* $[r_{p-1}, r_p[\times[r_p, r_{p+1}[\times\mathbb{N}\times\mathbb{R}\times\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

$$\mathfrak{T}_p(r, r', n, \mathbf{A}) = - \left(\mathbf{N}_E(r', n, \mathbf{A})^{-1}\mathbf{h}_E(r, n) - \mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r', n, \mathbf{A})^{-1}\mathbf{h}_{\mathcal{H}}(r, n)\right)^{-1} \left(\mathbf{N}_E(r', n, \mathbf{A})^{-1}\mathbf{j}_E(r, n) - \mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r', n, \mathbf{A})^{-1}\mathbf{j}_{\mathcal{H}}(r, n)\right).$$

A priori, pour r, r', n donné, $\mathfrak{T}_p(r, r', n, \mathbf{A})$ n'est pas défini pour toute matrice $\mathbf{A}$.

Proposition 5.26. *On suppose qu'il existe* $\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n)$ *telle que*

$$\hat{\vec{E}}_t(r_p^+, n) = \mathbf{N}_E(r_p^+, n, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n))\vec{C}_{p+1}(n),$$
$$\hat{\vec{J}}_t(r_p^+, n) = \mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^+, n, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n))\vec{C}_{p+1}(n).$$

Si les matrices suivantes sont inversibles

$$\mathbf{N}_E(r_p^+, n, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n)), \qquad \mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^+, n, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n)),$$

$$\mathbf{N}_E(r_p^+, n, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n))^{-1}\mathbf{h}_E(r_p^-, n) - \mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^+, n, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n))^{-1}\mathbf{h}_{\mathcal{H}}(r_p^-, n),$$

alors

$$\hat{\vec{E}}_t(r_p^-, n) = \mathbf{N}_E(r_p^-, n, \mathfrak{T}_p(r_p^-, r_p^+, n, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n)))\vec{C}_p(n),$$
$$\hat{\vec{J}}_t(r_p^-, n) = \mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^-, n, \mathfrak{T}_p(r_p^-, r_p^+, n, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n)))\vec{C}_p(n).$$

Démonstration. De part et d'autre de $r = r_p$, on a

$$\hat{\vec{E}}_t(r_p^+, n) = \mathbf{N}_E(r_p^+, n, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n))\vec{C}_1^+(n),$$
$$\hat{\vec{E}}_t(r_p^-, n) = \mathbf{j}_E(r_p^-, n)\vec{C}_1^-(n) + \mathbf{h}_E(r_p^-, n)\vec{C}_2^-(n),$$
$$\hat{\vec{J}}_t(r_p^+, n) = \mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^+, n, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n))\vec{C}_1^+(n),$$
$$\hat{\vec{J}}_t(r_p^-, n) = \mathbf{j}_{\mathcal{H}}(r_p^-, n)\vec{C}_1^-(n) + \mathbf{h}_{\mathcal{H}}(r_p^-, n)\vec{C}_2^-(n).$$

Il y a continuité des champs au travers de l'interface donc

$$\mathbf{j}_E(r_p^-, n)\vec{C}_1^-(n) + \mathbf{h}_E(r_p^-, n)\vec{C}_2^-(n) = \mathbf{N}_E(r_p^+, n, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n))\vec{C}_1^+(n),$$
$$\mathbf{j}_{\mathcal{H}}(r_p^-, n)\vec{C}_1^-(n) + \mathbf{h}_{\mathcal{H}}(r_p^-, n)\vec{C}_2^-(n) = \mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^+, n, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n))\vec{C}_1^+(n),$$

donc si on suppose les matrices $\mathbf{N}_E, \mathbf{N}_H$ inversibles

$$\mathbf{N}_E(r_p^+, n, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n))^{-1}\left(\mathbf{j}_E(r_p^-, n)\vec{C}_1^-(n) + \mathbf{h}_E(r_p^-, n)\vec{C}_2^-(n)\right) = \mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^+, n, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n))^{-1}\left(\mathbf{j}_{\mathcal{H}}(r_p^-, n)\vec{C}_1^-(n) + \mathbf{h}_{\mathcal{H}}(r_p^-, n)\vec{C}_2^-(n)\right).$$

Factorisons :

$$\left(\mathbf{N}_E(r_p^+, n, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n))^{-1}\mathbf{j}_E(r_p^-, n) - \mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^+, n, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n))^{-1}\mathbf{j}_{\mathcal{H}}(r_p^-, n)\right)\vec{C}_1^-(n) = -\left(\mathbf{N}_E(r_p^+, n, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n))^{-1}\mathbf{h}_E(r_p^-, n) + \mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^+, n, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n))^{-1}\mathbf{h}_{\mathcal{H}}(r_p^-, n)\right)\vec{C}_2^-(n).$$

On suppose l'inversibilité de cette dernière et alors

$$\vec{C}_2^-(n) = \mathfrak{T}_p(r_p^-, r_p^+, n, \hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n))\vec{C}_1^-(n).$$

□

Proposition 5.27. *On suppose qu'il existe* $\hat{\mathbf{R}}_p(n)$ *telle que*

$$\begin{aligned}\hat{\vec{E}}_t(r_p^-,n) &= \mathbf{N}_E(r_p^-,n,\hat{\mathbf{R}}_p(n))\vec{C}_p(n),\\ \hat{\vec{J}}_t(r_p^-,n) &= \mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^-,n,\hat{\mathbf{R}}_p(n))\vec{C}_p(n).\end{aligned}$$

Si les matrices suivantes sont inversibles

$$\mathbf{N}_E(r_p^-,n,\mathbf{R}_p(n)), \qquad \mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^-,n,\hat{\mathbf{R}}_p(n)),$$

$$\mathbf{N}_E(r_p^-,n,\mathbf{R}_p(n))^{-1}\mathbf{h}_E(r_p^+,n)-\mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^-,n,\hat{\mathbf{R}}_p(n))^{-1}\mathbf{h}_{\mathcal{H}}(r_p^+,n),$$

alors

$$\begin{aligned}\hat{\vec{E}}_t(r_p^+,n) &= \mathbf{N}_E(r_p^+,n,\mathfrak{T}_p(r_p^+,r_p^-,n,\hat{\mathbf{R}}_p(n)))\vec{C}_{p+1}(n),\\ \hat{\vec{J}}_t(r_p^+,n) &= \mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^+,n,\mathfrak{T}_p(r_p^+,r_p^-,n,\hat{\mathbf{R}}_p(n)))\vec{C}_{p+1}(n).\end{aligned}$$

Démonstration. Même méthodologie que pour la proposition 5.26. □

Proposition 5.28. *On suppose qu'il existe* $\hat{\mathbf{R}}_p(n)$ *et* $\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n)$ *telles que*

$$\begin{cases}\hat{\vec{E}}_t(r_p^-,n) = \mathbf{N}_E(r_p^-,n,\hat{\mathbf{R}}_p(n))\vec{C}_p(n),\\ \hat{\vec{J}}_t(r_p^-,n) = \mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^-,n,\hat{\mathbf{R}}_p(n))\vec{C}_p(n),\end{cases}$$
$$\begin{cases}\hat{\vec{E}}_t(r_p^+,n) = \mathbf{N}_E(r_p^+,n,\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n))\vec{C}_{p+1}(n),\\ \hat{\vec{J}}_t(r_p^+,n) = \mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^+,n,\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n))\vec{C}_{p+1}(n).\end{cases}$$

Si les matrices suivantes sont inversibles

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_E(r_p^-,n,\mathbf{R}_p(n)), &\qquad \mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^-,n,\hat{\mathbf{R}}_p(n)),\\ \mathbf{N}_E(r_p^+,n,\mathbf{R}_{p+1}(n)), &\qquad \mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^+,n,\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_E(r_p^-,n,\mathbf{R}_p(n))^{-1}\mathbf{h}_E(r_p^+,n)-\mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^-,n,\hat{\mathbf{R}}_p(n))^{-1}\mathbf{h}_{\mathcal{H}}(r_p^+,n),\\ \mathbf{N}_E(r_p^+,n,\mathbf{R}_{p+1}(n))^{-1}\mathbf{h}_E(r_p^-,n)-\mathbf{N}_{\mathcal{H}}(r_p^+,n,\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n))^{-1}\mathbf{h}_{\mathcal{H}}(r_p^-,n),\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n) &= \mathfrak{T}_p(r_p^+,r_p^-,n,\hat{\mathbf{R}}_p(n)),\\ \hat{\mathbf{R}}_p(n) &= \mathfrak{T}_p(r_p^-,r_p^+,n,\hat{\mathbf{R}}_{p+1}(n)).\end{aligned}$$

On peut donc déterminer itérativement les matrices de réflexion. Dans notre cadre d'étude, la présence d'un conducteur parfait sur l'interface $r = r_0^+$ implique $\mathbf{R}_1(n) = -\mathbf{h}_E(r_0^+,n)^{-1}\mathbf{j}_E(r_0^+,n)$.

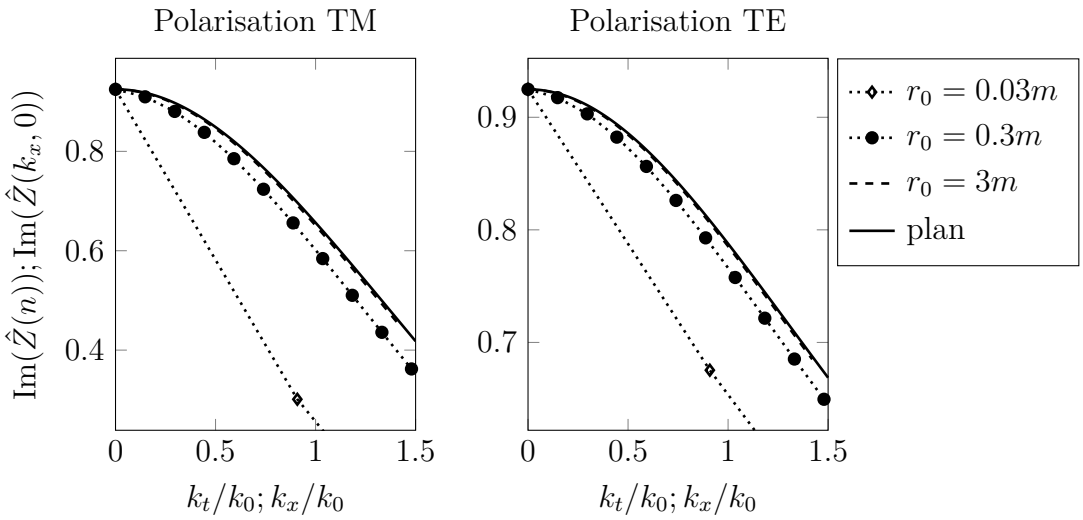


FIGURE 5.1 – $\epsilon = 6$, $\mu = 1$, $d = 0.0225$m, $f = 1$GHz

5.2.5 Applications numériques

On pose $(k_x, k_y) = (k_0 s, 0)$ pour le plan. On compare l'impédance du plan $\hat{\mathbf{Z}}(k_x, 0)$ à l'impédance de la sphère $\hat{\mathbf{Z}}(n)$ quand n est de l'ordre de $k_0 r_1 s$. On reprend la notation de HOPPE et al. 1995, p. 62 qui définit $k_t = n/r_1$.
Pour une couche de matériaux sans pertes, la matrice $\hat{\mathbf{Z}}$ est imaginaire pure, donc les parties réelles ne sont pas tracées.
On trace dans la figure 5.1 les parties imaginaires des coefficients diagonaux de ces matrices.
On voit donc que l'impédance de la sphère tend vers celle du plan quand r augmente.

5.3 Approximation de la matrice d'impédance pour une sphère par une CIOE

5.3.1 Expression des opérateurs $\mathcal{L}_D, \mathcal{L}_R$ en Fourier

Soit $S(0, r_s)$ une sphère de centre 0, de rayon r_s et (r, θ, ϕ) les coordonnées sphériques d'un point de l'espace.
Soit $V = \mathcal{S}(S(0, r_s)^2$ l'espace des fonctions infiniment dérivables définies sur cette sphère et de carré intégrable.

Définition 5.29. *On définit $\mathcal{L}_D$ l'opérateur de V tel que*

$$\mathcal{L}_D \vec{U}(r_s, \theta, \phi) = \vec{\nabla}_s \vec{\nabla}_s \cdot \vec{U}(r_s, \theta, \phi).$$

On définit $\hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}$ la fonction de $\mathbb{N} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(n) = -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{n(n+1)}{r_s^2} \end{bmatrix}.$$

Proposition 5.30. *Soit $\vec{E}_t$ dans V donc il existe $a_{nm}, b_{nm}, c_{nm}, d_{nm}$ tels que*

$$\vec{E}_t(r_s, \theta, \phi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left[\vec{U_{m,n}}(\theta, \phi) \quad \vec{U_{m,n}}^{\perp}(\theta, \phi)\right] \left(\mathbf{j}_E(r_s, n) \begin{bmatrix} a_{mn} \\ b_{mn} \end{bmatrix} + \mathbf{h}_E(r_s, n) \begin{bmatrix} c_{mn} \\ d_{mn} \end{bmatrix}\right),$$

alors

$$\mathcal{L}_D \vec{E}_t(r_s, \theta, \phi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left[\vec{U_{m,n}}(\theta, \phi) \quad \vec{U_{m,n}}^{\perp}(\theta, \phi)\right] \hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(n) \left(\mathbf{j}_E(r_s, n) \begin{bmatrix} a_{mn} \\ b_{mn} \end{bmatrix} + \mathbf{h}_E(r_s, n) \begin{bmatrix} c_{mn} \\ d_{mn} \end{bmatrix}\right).$$

Démonstration. Par définition de $\mathcal{L}_D$, on a

$$\mathcal{L}_D \vec{E}_t = \vec{\nabla}_s \vec{\nabla}_s \cdot \vec{E}_t.$$

De plus,

$$\vec{E}_t(r_s, \theta, \phi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \Big((a_{mn} j_n(kr_s) + c_{mn} h_n(kr_s)) \vec{U_{m,n}}(\theta, \phi) + (b_{mn} \tilde{j_n}(kr_s) + d_{mn} \tilde{h_n}(kr_s)) \vec{U_{m,n}}^{\perp}(\theta, \phi) \Big).$$

On rappelle les expressions des vecteurs (voir (5.1.3), (5.1.4)) dans la base sphérique $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\phi})$:

$$\vec{U_{m,n}}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{im}{\sin\theta} \mathbb{P}_n^m(\cos(\theta)) e^{im\phi} \\ -\dfrac{\partial \mathbb{P}_n^m(\cos(\theta))}{\partial\theta} e^{im\phi} \end{bmatrix}, \quad \vec{U_{m,n}}^{\perp}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\partial \mathbb{P}_n^m(\cos(\theta))}{\partial\theta} e^{im\phi} \\ \dfrac{im}{\sin\theta} \mathbb{P}_n^m(\cos(\theta)) e^{im\phi} \end{bmatrix}.$$

On commence par calculer la divergence surfacique (cf annexe C) en sphérique.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_s \cdot \vec{U_{m,n}}(r_s,\theta,\phi) &= \frac{1}{r_s\sin(\theta)}\frac{\partial(\sin(\theta)\vec{U_{m,n_\theta}})}{\partial\theta} + \frac{1}{r_s\sin(\theta)}\frac{\partial(\vec{U_{m,n_\phi}})}{\partial\phi},\\ &= \frac{ime^{im\phi}}{r_s\sin(\theta)}\left(\frac{\partial\mathbb{P}_n^m(\cos(\theta))}{\partial\theta} - \frac{\partial\mathbb{P}_n^m(\cos(\theta))}{\partial\theta}\right),\\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{L}_D\vec{U_{m,n}}(r_s,\theta,\phi) = 0.$$

Calculons maintenant l'action de $\mathcal{L}_D$ sur $\vec{U_{m,n}}^{\perp}$.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_s \cdot \vec{U_{m,n}}^{\perp}(r_s,\theta,\phi) &= \frac{1}{r_s\sin(\theta)}\frac{\partial(\sin(\theta)\vec{U_{m,n_\theta}}^{\perp})}{\partial\theta} + \frac{1}{r_s\sin(\theta)}\frac{\partial(\vec{U_{m,n_\phi}}^{\perp})}{\partial\phi},\\ &= \frac{e^{im\phi}}{r_s\sin(\theta)}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial\mathbb{P}_n^m(\cos(\theta))}{\partial\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin\theta}\mathbb{P}_n^m(\cos(\theta))\right),\end{aligned}$$

or les fonctions de Legendre sont solutions de l'équation différentielle éponyme, donc

$$\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial\mathbb{P}_n^m(\cos(\theta))}{\partial\theta}\right) + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{\sin(\theta)^2}\right)\mathbb{P}_n^m(\cos(\theta) = 0.$$

Nous déduisons

$$\vec{\nabla}_s \cdot \vec{U_{m,n}}^{\perp}(r_s,\theta,\phi) = -\frac{n(n+1)}{r_s}\mathbb{P}_n^m(\cos(\theta))e^{im\phi}.$$

Enfin d'après la définition du gradient surfacique en coordonnées sphériques,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_s\vec{\nabla}_s \cdot \vec{U_{m,n}}^{\perp}(r_s,\theta,\phi) &= -\frac{n(n+1)}{r_s}\left(\frac{1}{r_s}\frac{\partial\mathbb{P}_n^m(\cos(\theta))}{\partial\theta}e^{im\phi}\vec{e_\theta} + \frac{1}{r_s\sin(\theta)}\frac{\partial e^{im\phi}}{\partial\phi}\mathbb{P}_n^m(\cos(\theta))\vec{e_\phi}\right),\\ &= -\frac{n(n+1)}{r_s^2}\vec{U_{m,n}}^{\perp}(r_s,\theta,\phi).\end{aligned}$$

□

Définition 5.31. *On définit $\mathcal{L}_R$ l'opérateur de V tel que*

$$\mathcal{L}_R\vec{U}(r_s,\theta,\phi) = \vec{\nabla}_s \wedge \vec{\nabla}_s \wedge \vec{U}(r_s,\theta,\phi).$$

On définit $\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}$ la fonction de $\mathbb{N} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(n) = \begin{bmatrix}\frac{n(n+1)}{r_s^2} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Proposition 5.32. *Soit $\vec{E}_t$ dans V. Il existe $(a_{nm}, b_{nm}, c_{nm}, d_{nm})$ tels que*

$$\vec{E}_t(r_s,\theta,\phi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \left[\vec{U_{m,n}}(\theta,\phi) \quad \vec{U_{m,n}}^{\perp}(\theta,\phi)\right] \left(\mathbf{j}_E(r_s,n)\begin{bmatrix}a_{mn}\\ b_{mn}\end{bmatrix} + \mathbf{h}_E(r_s,n)\begin{bmatrix}c_{mn}\\ d_{mn}\end{bmatrix}\right),$$

alors

$$\mathcal{L}_R\vec{E}_t(r_s,\theta,\phi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \left[\vec{U_{m,n}}(\theta,\phi) \quad \vec{U_{m,n}}^{\perp}(\theta,\phi)\right] \hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(n) \left(\mathbf{j}_E(r_s,n)\begin{bmatrix}a_{mn}\\ b_{mn}\end{bmatrix} + \mathbf{h}_E(r_s,n)\begin{bmatrix}c_{mn}\\ d_{mn}\end{bmatrix}\right).$$

Démonstration. On reprend exactement la même méthode que pour $\mathcal{L}_D$. □

5.3.2 Expression de la matrice d'impédance approchée par la CI3

Tout comme dans le cas du plan infini, on peut donc définir $\hat{\mathbf{Z}}_{IBC}$ l'opérateur matriciel associé à la condition d'impédance :

$$\hat{\mathbf{Z}}_{CI3}(n) = \left(\mathbf{I} + b_1\frac{\hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(n)}{k_0^2} - b_2\frac{\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(n)}{k_0^2}\right)^{-1}\left(a_0\mathbf{I} + a_1\frac{\hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(n)}{k_0^2} - a_2\frac{\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(n)}{k_0^2}\right). \tag{5.3.1}$$

5.4 Choix des coefficients de la CI3 par moindres carrés sur l'impédance

5.4.1 Expression de la fonctionnelle

Définition 5.33. *On définit $\mathbf{H}_{CI3}$ la fonction de $\mathbb{N}\times\mathbb{R}\times\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_{4\times5}(\mathbb{C})$ telle que*

$$\mathbf{H}_{CI3}(n,\mathbf{Z}) = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(n)_{11} & -\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(n)_{11} & -\left(\hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(n)\mathbf{Z}\right)_{11} & \left(\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(n)\mathbf{Z}\right)_{11}\\ 0 & \hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(n)_{12} & -\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(n)_{12} & -\left(\hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(n)\mathbf{Z}\right)_{12} & \left(\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(n)\mathbf{Z}\right)_{12}\\ 0 & \hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(n)_{21} & -\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(n)_{21} & -\left(\hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(n)\mathbf{Z}\right)_{21} & \left(\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(n)\mathbf{Z}\right)_{21}\\ 1 & \hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(n)_{22} & -\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(n)_{22} & -\left(\hat{\mathbf{L}_\mathbf{D}}(n)\mathbf{Z}\right)_{22} & \left(\hat{\mathbf{L}_\mathbf{R}}(n)\mathbf{Z}\right)_{22} \end{bmatrix}.$$

On définit b la fonction de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_{4\times1}(\mathbb{C})$ telle que

$$b(\mathbf{Z}) = \begin{bmatrix}\mathbf{Z}_{11}\\ \mathbf{Z}_{12}\\ \mathbf{Z}_{21}\\ \mathbf{Z}_{22}\end{bmatrix}.$$

Proposition 5.34. *Soit $X = (a_0, a_1, a_2, b_1, b_2)^t$, n fixé et $\hat{\mathbf{Z}}_{ex}$ l'opérateur d'impédance exact du cylindre.*
On suppose qu'il existe un unique X qui minimise la distance entre ces deux matrices, alors

$$\underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \left\|\hat{\mathbf{Z}}_{CI3}(n,X) - \hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n)\right\| = \underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \left\|\mathbf{H}_{CI3}(n,\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n))X - b(\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n))\right\|^2.$$

Démonstration. C'est la même méthodologie que pour le plan. On rappelle que dans la section précédente, on a introduit

$$\hat{\mathbf{Z}}_{CI3}(n) = \left(\mathbf{I} + b_1\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{D}}}(n) - b_2\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{R}}}(n)\right)^{-1}\left(a_0\mathbf{I} + a_1\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{D}}}(n) - a_2\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{R}}}(n)\right).$$

On pose $\hat{\mathbf{Z}}_D(n,X) = \mathbf{I} + b_1\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{D}}}(n) - b_2\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{R}}}(n)$ et $\hat{\mathbf{Z}}_N(n,X) = a_0\mathbf{I} + a_1\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{D}}}(n) - a_2\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{R}}}(n)$ donc $\underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \left\|\hat{\mathbf{Z}}_{CI3}(n,X) - \hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n)\right\|$

$$\begin{aligned}
&= \underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \left\|\hat{\mathbf{Z}}_D(n,X)^{-1}\hat{\mathbf{Z}}_N(n,X) - \hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n)\right\|, \\
&= \underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \left\|\hat{\mathbf{Z}}_D(n,X)^{-1}\left(\hat{\mathbf{Z}}_N(n,X) - \hat{\mathbf{Z}}_D(n,X)\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n)\right)\right\|, \\
&= \underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \left\|\hat{\mathbf{Z}}_N(n,X) - \hat{\mathbf{Z}}_D(n)\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n,X)\right\| \\
&= \underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \left\|\hat{\mathbf{Z}}_N(n,X) - \left(b_1\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{D}}}(n) - b_2\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{R}}}(n)\right)\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n) - \hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n)\right\|, \\
&= \underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \left\|\mathbf{H}_{CI3}(n,\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n))X - b(\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n))\right\|.
\end{aligned}$$

□

Pour des considérations numériques, nous tronquons la série de Mie à N_n termes.

Définition 5.35. *On définit* $\mathbf{A}_{CI3}$ *la matrice de* $\mathcal{M}_{4N_n\times 5}(\mathbb{C})$ *telle que*

$$\mathbf{A}_{CI3} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{CI3}(n_1,\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n_1)) \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{CI3}(n_i,\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n_i)) \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{CI3}(n_{N_n},k_z,\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n_{N_n},k_z)) \end{bmatrix}.$$

On définit g *la matrice de* $\mathcal{M}_{4N_n\times 1}(\mathbb{C})$ *telle que*

$$g = \begin{bmatrix} b(\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n_1)) \\ \vdots \\ b(\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n_i)) \\ \vdots \\ b(\hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n_{N_n},k_z)) \end{bmatrix}.$$

On peut alors calculer les coefficients de la CI3

Définition 5.36. *On définit la fonctionnelle* J_Z

$$J_Z(X) = \|\mathbf{A}_{CI3}X - g\|^2.$$

Définition 5.37 (Minimisation sans contraintes pour la CI3)**.** *Les coefficients de la CIOE sont solutions du problème*
Trouver $X^* \in \mathbb{C}^5$ *tel que*

$$X^* = \underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} J_Z(X).$$

Proposition 5.38. *Si* $\overline{\mathbf{A}_{CI3}^t}\mathbf{A}_{CI3}$ *est inversible, alors*

$$X^* = (\overline{\mathbf{A}_{CI3}^t}\mathbf{A}_{CI3})^{-1}\overline{\mathbf{A}_{CI3}^t}g.$$

Démonstration. Même démonstration que pour le théorème 3.34. □

Nous n'avons pas réussi à démontrer que cette matrice était définie pour tout empilement et toute incidence.

Définition 5.39 (Minimisation avec contraintes pour la CI3)**.** *Soit* $\mathrm{CSU}_{\mathrm{CI3}}^3$ *le sous-espace de* $\mathbb{C}^5$ *issu de la définition 2.31, alors les coefficients de la CIOE respectant les CSU sont solutions du problème*
Trouver $X^* \in \mathbb{C}^5$ *tel que*

$$X^* = \underset{X \in \mathrm{CSU}_{\mathrm{CI3}}^3}{\operatorname{argmin}} J_Z(X).$$

5.5 Choix des coefficients de la CI3 par moindres carrés sur les coefficients de la série de Fourier

Soient $\mathbf{M}_j$ et $\mathbf{M}_h$ les fonctions introduites à la définition 5.18 et $\hat{\mathbf{R}}$ la fonction définie à la définition 5.19.

Définition 5.40. *On définit les fonctions* $\hat{\mathbf{R}}_{ex}, \hat{\mathbf{R}}_{CI3}$ *de* $\mathbb{N}\times \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ *telles que*

$$\hat{\mathbf{R}}_{ex}(n) = \hat{\mathbf{R}}(n, \hat{\mathbf{Z}}_{ex}(n)),$$
$$\hat{\mathbf{R}}_{CI3}(n) = \hat{\mathbf{R}}(n, \hat{\mathbf{Z}}_{CI3}(n)),$$

où $\hat{\mathbf{Z}}_{ex}, \hat{\mathbf{Z}}_{CI3}$ *sont des fonctions définies à la proposition 5.23 et à l'équation* (5.3.1).

5.5.1 Expression de la fonctionnelle

On utilise les fonctions $\mathbf{N}_E, \mathbf{N}_H$ introduites à la définition 5.24.

Définition 5.41. *On définit* $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ *les fonctions de* $\mathbb{N} \times \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ *telles que*

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_0(n, \mathbf{R}) &= \mathbf{N}_E(r_c^+, n, \mathbf{R}),\\
\mathbf{A}_1(n, \mathbf{R}) &= \hat{\mathbf{L}_{\mathbf{D}}}(n)\mathbf{N}_E(r_c^+, n, \mathbf{R}),\\
\mathbf{A}_2(n, \mathbf{R}) &= -\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{R}}}(n)\mathbf{N}_E(r_c^+, n, \mathbf{R}),\\
\mathbf{B}_1(n, \mathbf{R}) &= \hat{\mathbf{L}_{\mathbf{D}}}(n)\mathbf{N}_H(r_c^+, n, \mathbf{R}),\\
\mathbf{B}_2(n, \mathbf{R}) &= -\hat{\mathbf{L}_{\mathbf{R}}}(n)\mathbf{N}_H(r_c^+, n, \mathbf{R}).
\end{aligned}$$

On définit $\widetilde{\mathbf{H}}_{CI3}$ *la fonction de* $\mathbb{N} \times \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{C})$ *telle que*

$$\widetilde{\mathbf{H}}_{CI3}(n, \mathbf{R}) =$$
$$\begin{bmatrix}
\mathbf{A}_0(n,\mathbf{R})_{11} & \mathbf{A}_1(n,\mathbf{R})_{11} & \mathbf{A}_2(n,\mathbf{R})_{11} & \mathbf{B}_1(n,\mathbf{R})_{11} & \mathbf{B}_2(n,\mathbf{R})_{11}\\
\mathbf{A}_0(n,\mathbf{R})_{12} & \mathbf{A}_1(n,\mathbf{R})_{12} & \mathbf{A}_2(n,\mathbf{R})_{12} & \mathbf{B}_1(n,\mathbf{R})_{12} & \mathbf{B}_2(n,\mathbf{R})_{12}\\
\mathbf{A}_0(n,\mathbf{R})_{21} & \mathbf{A}_1(n,\mathbf{R})_{21} & \mathbf{A}_2(n,\mathbf{R})_{21} & \mathbf{B}_1(n,\mathbf{R})_{21} & \mathbf{B}_2(n,\mathbf{R})_{21}\\
\mathbf{A}_0(n,\mathbf{R})_{22} & \mathbf{A}_1(n,\mathbf{R})_{22} & \mathbf{A}_2(n,\mathbf{R})_{22} & \mathbf{B}_1(n,\mathbf{R})_{22} & \mathbf{B}_2(n,\mathbf{R})_{22}
\end{bmatrix}.$$

On définit $\widetilde{b}$ *la fonction de* $\mathbb{N} \times \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{C})$ *telle que*

$$\widetilde{b}(n, \mathbf{R}) = - \begin{bmatrix} \mathbf{N}_H(r_c^+, n, \mathbf{R})_{11} \\ \mathbf{N}_H(r_c^+, n, \mathbf{R})_{12} \\ \mathbf{N}_H(r_c^+, n, \mathbf{R})_{21} \\ \mathbf{N}_H(r_c^+, n, \mathbf{R})_{22} \end{bmatrix}.$$

Proposition 5.42. *Soit* $X = (a_0, a_1, a_2, b_1, b_2)^t$*,* (n) *fixé et* $\hat{\mathbf{R}}_{ex}$ *la matrice définie en 5.40, alors*

$$\underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \left\| \hat{\mathbf{R}}_{CI3}(n, X) - \hat{\mathbf{R}}_{ex}(n) \right\| = \underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \left\| \widetilde{\mathbf{H}}_{CI3}(n, \hat{\mathbf{R}}_{ex}(n))X - \widetilde{b}(n, \hat{\mathbf{R}}_{ex}(n)) \right\|.$$

Démonstration. C'est la même méthodologie que pour l'impédance. On rappelle de la section précédente

$$\hat{\mathbf{Z}}_{CI3}(n) = \left(\mathbf{I} + b_1 \hat{\mathbf{L}_{\mathbf{D}}}(n) - b_2 \hat{\mathbf{L}_{\mathbf{R}}}(n)\right)^{-1} \left(a_0 \mathbf{I} + a_1 \hat{\mathbf{L}_{\mathbf{D}}}(n) - a_2 \hat{\mathbf{L}_{\mathbf{R}}}(n)\right).$$

On pose $\hat{\mathbf{Z}}_D(n, X) = \mathbf{I} + b_1 \hat{\mathbf{L}_{\mathbf{D}}}(n) - b_2 \hat{\mathbf{L}_{\mathbf{R}}}(n)$ et $\hat{\mathbf{Z}}_N(n, X) = a_0 \mathbf{I} + a_1 \hat{\mathbf{L}_{\mathbf{D}}}(n) - a_2 \hat{\mathbf{L}_{\mathbf{R}}}(n)$ donc

$$\begin{aligned}
&\underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \left\| \hat{\mathbf{R}}_{CI3}(n, X) - \hat{\mathbf{R}}_{ex}(n) \right\| \\
&= \underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \left\| -\mathbf{M}_h(r_s^+, n, \hat{\mathbf{Z}}_{CI3})^{-1} \mathbf{M}_j(r_s^+, n, \hat{\mathbf{Z}}_{CI3}) - \hat{\mathbf{R}}_{ex}(n) \right\|, \\
&= \underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \left\| -\mathbf{M}_h(r_s^+, n, \hat{\mathbf{Z}}_{CI3})^{-1} \left(\mathbf{M}_j(r_s^+, n, \hat{\mathbf{Z}}_{CI3}) + \mathbf{M}_h(r_s^+, n, \hat{\mathbf{Z}}_{CI3}) \hat{\mathbf{R}}_{ex}(n)\right) \right\|, \\
&= \underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \left\| \mathbf{M}_j(r_s^+, n, \hat{\mathbf{Z}}_{CI3}) + \mathbf{M}_h(r_s^+, n, \hat{\mathbf{Z}}_{CI3}) \hat{\mathbf{R}}_{ex}(n) \right\|.
\end{aligned}$$

D'après la définition 5.18 des fonctions $\mathbf{M}_j, \mathbf{M}_h$,

$$\begin{aligned}
&= \underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \Big\| \left(\mathbf{J}_E(r_s^+, n) - \hat{\mathbf{Z}}_{CI3}(n) \mathbf{J}_H(r_s^+, n)\right) \\
&\qquad + \left(\mathbf{H}_E(r_s^+, n) - \hat{\mathbf{Z}}_{CI3}(n) \mathbf{H}_H(r_s^+, n)\right) \hat{\mathbf{R}}_{ex}(n) \Big\|.
\end{aligned}$$

D'après la définition de $\hat{\mathbf{Z}}_{CI3}$,

$$\begin{aligned}
&= \underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \Big\| \hat{\mathbf{Z}}_D(n)^{-1} \left(\hat{\mathbf{Z}}_D(n) \mathbf{J}_E(r_s^+, n) - \hat{\mathbf{Z}}_N(n) \mathbf{J}_H(r_s^+, n)\right) \\
&\qquad + \hat{\mathbf{Z}}_D(n)^{-1} \left(\hat{\mathbf{Z}}_D(n) \mathbf{H}_E(r_s^+, n) - \hat{\mathbf{Z}}_N(n) \mathbf{H}_H(r_s^+, n)\right) \hat{\mathbf{R}}_{ex}(n) \Big\|, \\
&= \underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \Big\| \left(\hat{\mathbf{Z}}_D(n) \mathbf{J}_E(r_s^+, n) - \hat{\mathbf{Z}}_N(n) \mathbf{J}_H(r_s^+, n)\right) \\
&\qquad + \left(\hat{\mathbf{Z}}_D(n) \mathbf{H}_E(r_s^+, n) - \hat{\mathbf{Z}}_N(n) \mathbf{H}_H(r_s^+, n)\right) \hat{\mathbf{R}}_{ex}(n) \Big\|.
\end{aligned}$$

D'après la définition 5.24 des fonctions $\mathbf{N}_E, \mathbf{N}_H$,

$$= \underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} \left\| \hat{\mathbf{Z}}_N(n) \mathbf{N}_E(r_s^+, n, \hat{\mathbf{R}}_{ex}(n)) + \hat{\mathbf{Z}}_D(n) \mathbf{N}_H(r_s^+, n, \hat{\mathbf{R}}_{ex}(n)) \right\|,$$

et on conclut d'après la définition des fonctions $\hat{\mathbf{Z}}_D, \hat{\mathbf{Z}}_N$. □

On tronque la série de Mie à N_n termes.

Définition 5.43. *On définit* $\widetilde{\mathbf{A}}_{CI3}$ *la matrice de* $\mathcal{M}_{4N_n\times 5}(\mathbb{C})$ *telle que*

$$\widetilde{\mathbf{A}}_{CI3} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{H}}_{CI3}(n_1, \hat{\mathbf{R}}_{ex}(n_1)) \\ \vdots \\ \widetilde{\mathbf{H}}_{CI3}(n_i, \hat{\mathbf{R}}_{ex}(n_i)) \\ \vdots \\ \widetilde{\mathbf{H}}_{CI3}(n_{N_n}, \hat{\mathbf{R}}_{ex}(n_{N_n})) \end{bmatrix}.$$

On définit $\widetilde{g}$ *le vecteur colonne* $\mathbb{C}^{4N_n}$ *telle que*

$$\widetilde{g} = \begin{bmatrix} \widetilde{b}(n_1, \hat{\mathbf{R}}_{ex}(n_1)) \\ \vdots \\ \widetilde{b}(n_i, \hat{\mathbf{R}}_{ex}(n_i)) \\ \vdots \\ \widetilde{b}(n_{N_n}, \hat{\mathbf{R}}_{ex}(n_{N_n})) \end{bmatrix}.$$

On peut alors calculer les coefficients de la CI3

Définition 5.44. *On définit la fonctionnelle* J_R

$$J_R(X) = \left\| \widetilde{\mathbf{A}}_{CI3} X - \widetilde{g} \right\|.$$

Définition 5.45 (Minimisation sans contraintes pour la CI3)**.** *Les coefficients de la CIOE sont solutions du problème*
Trouver $X^* \in \mathbb{C}^5$ *tel que*

$$X^* = \underset{X\in\mathbb{C}^5}{\operatorname{argmin}} J_R(X).$$

Proposition 5.46. *Si* $\overline{\widetilde{\mathbf{A}}_{CI3}^{\,t}}\widetilde{\mathbf{A}}_{CI3}$ *est inversible, alors*

$$X^* = (\overline{\widetilde{\mathbf{A}}_{CI3}^{\,t}}\widetilde{\mathbf{A}}_{CI3})^{-1}\overline{\widetilde{\mathbf{A}}_{CI3}^{\,t}}\widetilde{g}.$$

Démonstration. Même méthode que pour la proposition 5.38 sur l'impédance. □

Nous n'avons pas réussi à démontrer que cette matrice était définie pour tout empilement et toute incidence.

Définition 5.47 (Minimisation avec contraintes pour la CI3)**.** *Soit* $\mathrm{CSU}^3_{\mathrm{CI3}}$ *le sous-espace de* $\mathbb{C}^5$ *issu de la définition 2.31, alors les coefficients de la CIOE respectant les CSU sont solutions du problème*
Trouver $X^* \in \mathbb{C}^5$ *tel que*

$$X^* = \underset{X\in\mathrm{CSU}^3_{\mathrm{CI3}}}{\operatorname{argmin}} J_R(X).$$

5.6 Résultats numériques

La figure 5.2 trace les valeurs des termes diagonaux de la matrice $\hat{\mathbf{Z}}$ quand les coefficients sont calculés en minimisant J_Z sans contraintes. On remarque alors que la CI3 semble être une bonne approximation.

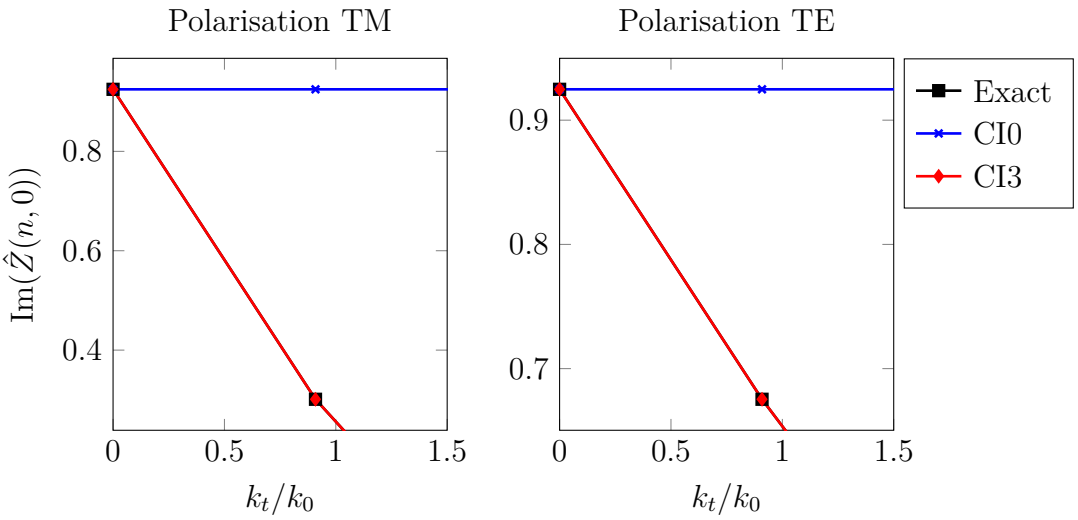


FIGURE 5.2 – Minimisation de J_Z : Partie imaginaire des termes diagonaux des matrices d'impédance pour l'empilement $\epsilon = 6$, $\mu = 1$, $d = 0.0225$m, $f = 1$GHz, $r_0 = 0.03$m en fonction de $k_t = n/(r_0 + d)$.

CI0	
a0	-1.066E-15 +9.248E-01i

CI3	
a0	-1.066E-15 +9.248E-01i
a1	-3.522E-16 +2.691E-01i
a2	3.476E-16 -2.689E-02i
b1	-3.604E-01 -1.028E-15i
b2	-2.635E-01 -1.162E-15i

TABLE 5.1 – Coefficients associés à la figure 5.2

Conclusion

Nous avons montré comment calculer les coefficients dans le cas d'un objet sphérique en minimisant au sens des moindres carrés la différence entre les coefficients de Mie exacts et approchés.

Chapitre 6

Contribution des CIOE dans une formulation équation intégrale

Sommaire

Introduction 122
6.1 Espaces fonctionnels 122
6.2 Équations intégrales 122
6.2.1 EFIE 123
6.2.2 MFIE 123
6.3 Discrétisation de la surface de l'objet 123
6.3.1 Fonctions de Raviart-Thomas phi Hdiv-conforme 124
6.4 Fonctions de projections 124
6.4.1 Fonctions de Nédélec p Hrot-conforme 124
6.4.2 Fonctions de Bendali q 125
6.5 Matrices de projections 126
6.6 Matrice de changement d'espace 127
6.7 Forme variationnelle des équations intégrales 128
6.8 Contribution de la CIOE dans la discrétisation de la forme variationnelle 128
6.8.1 Discrétisation des opérateurs LD, LR 129
6.8.2 Contribution de la CIOE à l'EFIE 130
6.8.3 Contribution de la CIOE à la MFIE 130
6.9 Forme finale du système linéaire 131
6.10 Résultats numériques 132

Introduction

Nous pouvons donc aborder la dernière partie de notre problème pour évaluer la pertinence de notre démarche. En effet, c'est en calculant les champs électromagnétiques tangentiels sur la surface de notre objet et en les comparant avec des résultats de référence que nous déterminerons si les CIOE, dont les paramètres ont été déterminés sur des objets modèles, permettent de calculer des SER concordantes avec les résultats de références.
Les équations intégrales sont des méthodes bien éprouvées pour résoudre les équations de Maxwell, tel que l'a démontré J.-C. Nédélec 2001. Le cours de Bendali 2014 est aussi une introduction très abordable aux équations intégrales.
Ce chapitre rappelle quelques résultats connus et montre la contribution des CIOE.

6.1 Espaces fonctionnels

Les équations intégrales sont résolues grâce à la méthode des éléments finis de frontière. Nous rappelons le théorème de trace le plus important pour résoudre les équations de Maxwell par équations intégrales.

Définition 6.1. *Pour toute fonction* $\vec{U}(\vec{x}) \in \mathrm{H}_{\mathrm{rot}}(\Omega_h), \vec{\nabla} \wedge \vec{U}(\vec{x}) \in L^2(\Omega)$.
Pour toute fonction $\vec{U}(\vec{x}) \in \mathrm{H}_{\mathrm{rot}}^{-1/2}(\Gamma), \vec{\nabla}_s \wedge \vec{U}(\vec{x}) \in L^2(\Gamma)$.
Pour toute fonction $\vec{U}(\vec{x}) \in \mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1/2}(\Gamma), \vec{\nabla}_s \cdot \vec{U}(\vec{x}) \in L^2(\Gamma)$.

Théorème 6.2 (Théorème de trace de $\mathrm{H}_{\mathrm{rot}}$)**.** *L'opérateur* γ_t *qui pour tout* $\vec{v} \in \mathrm{H}_{\mathrm{rot}}(\Omega)$ *associe ses composantes tangentielles* $\vec{v}_t$ *sur* Γ *est continu et surjectif de* $\mathrm{H}_{\mathrm{rot}}(\Omega)$ *vers* $\mathrm{H}_{\mathrm{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$ *et l'opérateur* γ_t' *qui pour tout* $\vec{v} \in \mathrm{H}_{\mathrm{rot}}\Omega$ *associe* $\vec{n} \wedge \vec{v}$ *sur* Γ *est continu et surjectif de* $\mathrm{H}_{\mathrm{rot}}(\Omega)$ *vers* $\mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1/2}(\Gamma)$.

Démonstration. Voir la démonstration de J.-C. Nédélec 2001, Théorème 5.4.2, page 209. □

6.2 Équations intégrales

La démonstration de ces formules dépasse le cadre de cette thèse et nous renvoyons à J. C. Nédélec 1980, § 5.6.
Soit k_0 le nombre d'onde dans le vide. Soit G la fonction de Green définie en tout point extérieur à Γ telle que

$$G(\vec{z}) = \frac{e^{-ik_0|\vec{z}|}}{4\pi|\vec{z}|}.$$

On définit $g(\vec{x}, \vec{y}) := G(\vec{x} - \vec{y})$.
Soit $\vec{E}_t^{inc}$, $\vec{\mathcal{H}}_t^{inc}$ le champ incident tangentiel à Γ. On définit sur la surface Γ, les traces tangentielles des champs $\vec{J} = \vec{n} \wedge \vec{\mathcal{H}}$, $\vec{K} = \vec{n} \wedge \vec{E}$.
En utilisant le théorème de représentation intégrale (voir J.-C. Nédélec 2001, Théorème 5.5.1), on obtient les équations intégrales suivantes

6.2.1 EFIE

Proposition 6.3. *Soit* Γ *une surface régulière.* $\vec{J}, \vec{K}$ *sont solutions des équations intégrales en champ électrique (electric field integral equation (EFIE)) s'il existe* $(\vec{J}, \vec{K}) \in \mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1/2}(\Gamma)^2$ *tels que*

$$\vec{E}_t^{inc}(\vec{x}) = \frac{\vec{E}_t(\vec{x})}{2} - \int_\Gamma \vec{\nabla} g(\vec{x}-\vec{y}) \wedge \vec{K}(\vec{y}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{y}) + \frac{i}{k}\vec{\nabla} \int_\Gamma g(\vec{x}-\vec{y}) \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{y})(\vec{x}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{y}) + ik \int_\Gamma g(\vec{x}-\vec{y}) \vec{J}(\vec{y}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{y}).$$

6.2.2 MFIE

Proposition 6.4. *Soit* Γ *une surface régulière.* $\vec{J}, \vec{K}$ *sont solutions des équations intégrales en champ magnétique (magnetic field integral equation (MFIE)) s'il existe* $(\vec{J}, \vec{K}) \in \mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1/2}(\Gamma)^2$ *tels que*

$$\vec{\mathcal{H}}^{inc}(\vec{x}) = \frac{\vec{\mathcal{H}}_t(\vec{x})}{2} - \int_\Gamma \vec{\nabla} g(\vec{x}-\vec{y}) \wedge \vec{J}(\vec{y}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{y}) - \frac{i}{k}\vec{\nabla} \int_\Gamma g(\vec{x}-\vec{y}) \vec{\nabla} \cdot \vec{K}(\vec{y}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{y}) - ik \int_\Gamma g(\vec{x}-\vec{y}) \vec{K}(\vec{y}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{y}).$$

6.3 Discrétisation de la surface de l'objet

La méthode numérique utilisée au CEA est basée sur l'article de Medgyesi-Mitschang et al. 1985. Nous rappelons cette méthode en conservant les notations de Stupfel 2015.

Soit Γ_h une triangulation de Γ en N_e éléments triangulaires. Soit $N = \frac{3}{2}N_e$ le nombre d'arêtes du maillage. On désigne par $\vec{n}$ la normale unitaire sortante du maillage, non définie aux nœuds et arêtes du maillage.
Soit T un triangle défini par un nœud N_1 et deux vecteurs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$. On rappelle la relation entre l'aire du triangle et ces vecteurs

$$2|T| = |\vec{e_1} \wedge \vec{e_2}|$$

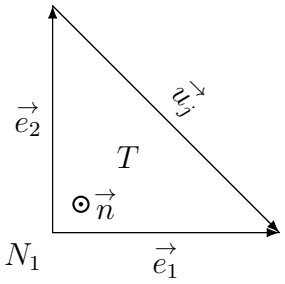


Figure 6.1 – Triangles, arêtes et nœuds définis par l'arête $\vec{u_j}$

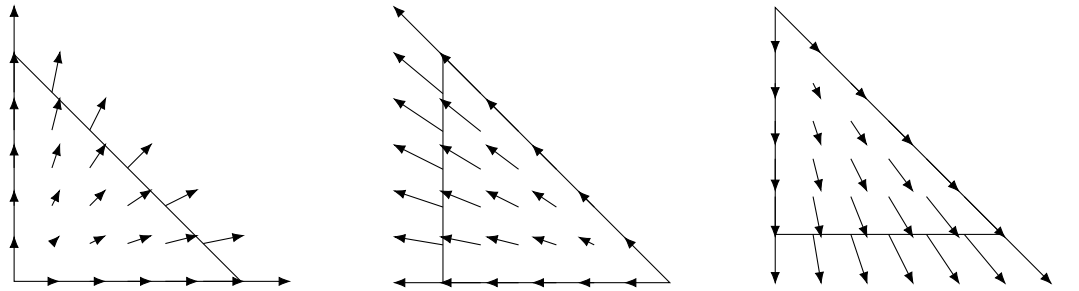
On se place dans le repère local au triangle, on fait donc le changement de coordonnées suivant :

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^3 &\to [0,1]^2\\ (x_1,x_2,x_3) &\mapsto (\xi_1,\xi_2),\end{aligned}$$

tel que $\vec{x} = \vec{N_1} + \xi_1\vec{e_1} + \xi_2\vec{e_2}$.

6.3.1 Fonctions de Raviart-Thomas $\vec{\phi}$ $\mathrm{H_{div}}$-conforme

Ces fonctions ont été introduites par Raviart et al. 1977. Nous présentons ici les fonctions Raviart-Thomas de degré 0, c'est-à-dire telles que les degrés de liberté soient au milieu de chaque arête (voir Raviart et al. 1977, eq. (3.10)).



$$\vec{\phi_1} = \frac{\xi_1}{2|T|}\vec{e_1} + \frac{\xi_2}{2|T|}\vec{e_2}, \qquad \vec{\phi_2} = \frac{\xi_1 - 1}{2|T|}\vec{e_1} + \frac{\xi_2}{2|T|}\vec{e_2}, \qquad \vec{\phi_3} = \frac{\xi_1}{2|T|}\vec{e_1} + \frac{\xi_2 - 1}{2|T|}\vec{e_2}.$$

Figure 6.2 – Fonctions $\vec{\phi_j}$ locales

Proposition 6.5. *Les fonctions $\vec{\phi_j}$ sont dans $\mathrm{H_{div}}(\Gamma_h)$.*

Démonstration. Concernant la relation de compatibilité $\mathrm{H_{div}}$, nous renvoyons à la propriété I.5 en annexe. □

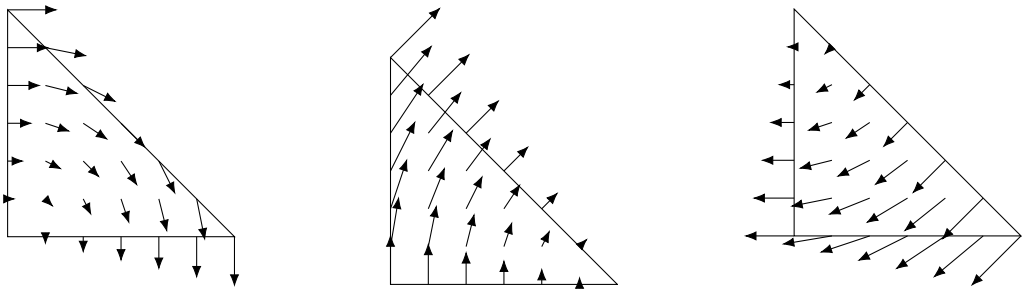
Définition 6.6. *Pour tout $\vec{U} \in \mathrm{H_{div}}(\Gamma_h)$, alors*

$$\vec{U} \in \mathrm{Vect}\left\{\vec{\phi_1},\ldots,\vec{\phi_N}\right\} \Leftrightarrow \exists \underline{u} = (u_1,\cdots,u_N)^t \in \mathbb{R}^N, \vec{U}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{N} u_j\vec{\phi_j}(\vec{x}).$$

6.4 Fonctions de projections

6.4.1 Fonctions de Nédelec $\vec{p}$ $\mathrm{H_{rot}}$-conforme

Une première famille est celle des $\vec{p_j} = -\vec{n} \wedge \vec{\phi_j}$, où $\vec{n}$ est la normale extérieure au maillage.



$$\vec{p_1} = \frac{\xi_2}{2|T|}\vec{e_1} - \frac{\xi_1}{2|T|}\vec{e_2}, \qquad \vec{p_2} = \frac{\xi_2}{2|T|}\vec{e_1} + \frac{1-\xi_1}{2|T|}\vec{e_2}, \qquad \vec{p_3} = \frac{\xi_2 - 1}{2|T|}\vec{e_1} - \frac{\xi_1}{2|T|}\vec{e_2}.$$

FIGURE 6.3 – Fonctions $\vec{p_j}$ locales

Proposition 6.7. *Les fonctions $\vec{p_j}$ sont dans $\mathrm{H}_{\mathrm{rot}}(\Gamma_h)$.*

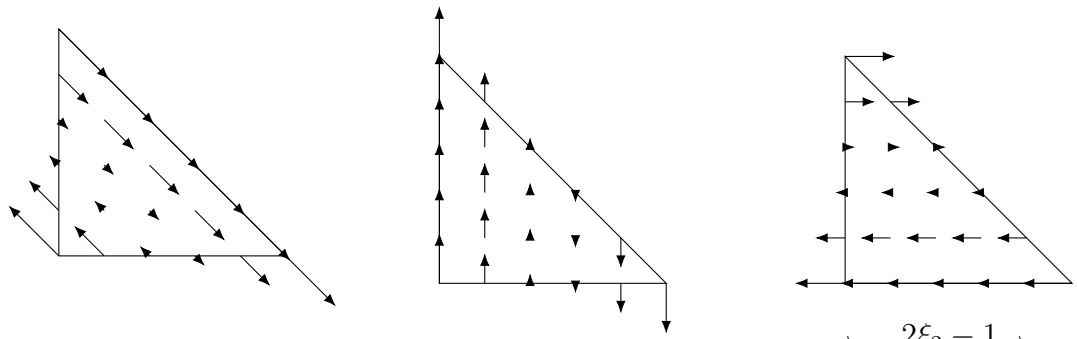
Démonstration. Nous renvoyons au travail de J. C. NÉDÉLEC 1980 (voir Annexe prop. I.7). □

Définition 6.8. *Pour tout $\vec{V} \in \mathrm{H}_{\mathrm{rot}}(\Gamma_h)$, alors*

$$\vec{V} \in \mathrm{Vect}\left\{\vec{p_1}, \ldots, \vec{p_N}\right\} \Leftrightarrow \exists \underline{v} = (v_1, \cdots, v_N)^t \in \mathbb{R}^N, \vec{V}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{N} v_j \vec{p_j}(\vec{x}).$$

6.4.2 Fonctions de Bendali $\vec{q}$

Ces fonctions ont été introduites par BENDALI et al. 1999, eq. 28. Elles sont linéairement indépendantes. En accord avec l'article de STUPFEL 2015, annexe B, nous les divisions par 2 fois l'aire de l'élément. Ainsi, la matrice de passage (définie plus tard) sera plus simple.



$$\vec{q_1} = \frac{1-2(\xi_1+\xi_2)}{2|T|}(\vec{e_2} - \vec{e_1}), \qquad \vec{q_2} = \frac{1-2\xi_1}{2|T|}\vec{e_2}, \qquad \vec{q_3} = \frac{2\xi_2 - 1}{2|T|}\vec{e_1}.$$

FIGURE 6.4 – Fonctions $\vec{q_j}$ locales

Proposition 6.9. *Les fonctions $\vec{q_j}$ ne sont ni dans $\mathrm{H}_{\mathrm{rot}}(\Gamma)$ ni dans $\mathrm{H}_{\mathrm{div}}(\Gamma)$.*

Démonstration. Nous renvoyons à l'annexe I pour la démonstration des propriétés de compatibilité suivantes.

Pour être dans $\mathrm{H_{div}}$, le saut de la composante normale de $\vec{q_j}$ à travers l'arête $\vec{u}_j$ doit être nul (voir la propriété I.5).
Pour être dans $\mathrm{H_{rot}}$, le saut de la composante tangentielle de $\vec{q_j}$ à travers l'arête $\vec{u}_j$ doit être nul (voir la propriété I.7).
Or puisque nous divisons par l'aire du triangle alors que la longueur de l'arête est commune aux deux triangles, nous introduisons forcément un saut dès lors que ces deux triangles ne sont pas d'aires égales. On remarque cependant qu'en dehors de ce saut, si l'on calcule la divergence surfacique de cette fonction à l'intérieur d'un triangle, elle est nulle. □

Proposition 6.10. *Les fonctions $\vec{q_j}$ forment une base de $L^2(\Gamma_h)$.*

Définition 6.11. *Pour tout $\vec{W} \in L^2(\Gamma_h)$, alors*

$$\vec{W} \in \mathrm{Vect}\left\{\vec{q_1}, \ldots, \vec{q_N}\right\} \Leftrightarrow \exists \underline{w} = (w_1, \cdots, w_N)^t \in \mathbb{R}^N, \vec{W}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{N} w_j \vec{q_j}(\vec{x}).$$

6.5 Matrices de projections

Nous allons souvent réaliser le produit scalaire entre ces fonctions. On note donc

Définition 6.12. *Soient $f \in \mathrm{Vect}\left\{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_N}\right\}$ et $g \in \mathrm{Vect}\left\{\vec{g_1}, \ldots, \vec{g_N}\right\}$, on définit la matrice $\mathbf{G}^{fg}$ telle que*

$$\mathbf{G}^{fg}_{ij} = \int_{\Gamma_h} \vec{f_i}(\vec{x}) \cdot \vec{g_j}(\vec{x}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}).$$

Proposition 6.13.

$$\mathbf{G}^{\phi\phi} = \mathbf{G}^{pp}$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du produit mixte $a \cdot (b \wedge c) = c \cdot (a \wedge b)$ et que les fonctions de bases soient tangentes à la surface.

$$\begin{aligned} \vec{p_j} \cdot \vec{p_i} &= (\vec{n} \wedge \vec{\phi_j}) \cdot (\vec{n} \wedge \vec{\phi_i}), \\ &= \vec{\phi_i} \cdot ((\vec{n} \wedge \vec{\phi_j}) \wedge \vec{n}), \\ &= \vec{\phi_i} \cdot \vec{\phi_j}. \end{aligned}$$

□

Définition 6.14. *On désigne par $\mathbf{M}$ la matrice $\mathbf{G}^{\phi\phi} = \mathbf{G}^{pp}$.*

On rappelle les décompositions sur ces familles de fonctions.

$$\vec{U}(\vec{x}) = \sum_{j}^{N} u_j \vec{\phi_j}(\vec{x}), \qquad \vec{V}(\vec{x}) = \sum_{j}^{N} v_j \vec{p_j}(\vec{x}), \qquad \vec{W}(\vec{x}) = \sum_{j}^{N} w_j \vec{q_j}(\vec{x}).$$

Proposition 6.15. *Pour toute fonction $\vec{W} \in L^2(\Gamma_h) \cap \mathrm{Vect}\left\{(\vec{q_j})_j\right\}$, il existe $\vec{U} \in L^2(\Gamma_h) \cap \mathrm{Vect}\left\{(\vec{\phi_j})_j\right\}$ telle que avec*

$$\underline{u} = \mathbf{G}^{\phi q} \underline{w}.$$

Proposition 6.16. *Pour toute fonction* $\vec{W} \in L^2(\Gamma_h) \cap \mathrm{Vect}\left\{(\vec{q_j})_j\right\}$, *il existe* $\vec{V} \in L^2(\Gamma_h) \cap \mathrm{Vect}\left\{(\vec{p_j})_j\right\}$ *telle que*

$$\underline{v} = \mathbf{G}^{pq}\underline{w}.$$

Démonstration. Soit $\vec{W}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{N} w_j \vec{q_j}(\vec{x}) \in L^2(\Gamma_h)$.
On définit alors deux éléments de $L^2(\Gamma_h)$:

$$\vec{U}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{N} u_j \vec{\phi_j}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_h} \vec{W}(\vec{y}) \cdot \vec{\phi_j}(\vec{y}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{y}) \vec{\phi_j}(\vec{x}),$$
$$\vec{V}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{N} v_j \vec{p_j}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_h} \vec{W}(\vec{y}) \cdot \vec{p_j}(\vec{y}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{y}) \vec{p_j}(\vec{x}).$$

Les deux propriétés se déduisent en injectant $\vec{W}$ dans $\vec{U}$ et $\vec{V}$. □

6.6 Matrice de changement d'espace

Soit $\vec{U}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N} u_j \vec{\phi_j}(\vec{x}) \in \mathrm{H_{div}}(\Gamma_h)$. Soit $\vec{V}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N} v_j \vec{p_j}(\vec{x}) \in \mathrm{H_{rot}}(\Gamma_h)$
Pour utiliser la CIOE CI3, nous devons appliquer les opérateurs $\mathcal{L}_D$ et $\mathcal{L}_R$ sur un même objet. Or l'espace fonctionnel usuel $\mathrm{H_{div}}$ ne permet pas d'appliquer $\mathcal{L}_R$.
On veut déterminer une relation pour passer de $\mathrm{H_{div}}$ à $\mathrm{H_{rot}}$.

Définition 6.17. *On définit* $\mathbf{P}$ *la matrice*

$$\mathbf{P} = (\mathbf{G}^{qp})^{-1}\mathbf{G}^{q\phi}.$$

Proposition 6.18. *La projection de* $\mathrm{H_{div}}$ *vers* $\mathrm{H_{rot}}$ *est*

$$\Pi(\vec{\phi_i}) = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{P}_{ji} \vec{p_j}.$$

Démonstration. Soit $\vec{W}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N} w_j \vec{q_j} \in L^2(\Gamma_h)$.
On définit

$$\vec{U} = \sum_{i=1}^{N} u_j \vec{\phi_j}(\vec{x}) \qquad \text{où } u_i = \int_{\Gamma_h} \vec{W}(\vec{x}) \cdot \vec{\phi_i}(\vec{x}),$$
$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{N} v_j \vec{p_j}(\vec{x}) \qquad \text{où } v_i = \int_{\Gamma_h} \vec{W}(\vec{x}) \cdot \vec{p_i}(\vec{x}).$$

On a donc

$$\underline{u} = \mathbf{G}^{\phi q}\underline{w}, \qquad \underline{v} = \mathbf{G}^{pq}\underline{w}.$$

D'après Stupfel 2015, annexe B la matrice $\mathbf{G}^{pq} = 1/3\mathbf{I}$ donc elle est inversible et $\underline{u} = \mathbf{G}^{\phi q}(\mathbf{G}^{pq})^{-1}\underline{v}$. On peut identifier $\underline{u} = \mathbf{P}^t\underline{v}$.

□

6.7 Forme variationnelle des équations intégrales

Nous ne remontrerons pas l'obtention des équations intégrales. Nous renvoyons à J.-C. Nédélec 2001, Section 5.5, p. 234.
Nous rappelons notamment le théorème de trace (Theorem 5.4.2, p. 209) qui est déterminant dans les choix de discrétisations. Ce dernier stipule que si $\vec{E}, \vec{\mathcal{H}} \in \mathrm{H}_{\mathrm{rot}}(\Omega)$ alors $\vec{n} \wedge \vec{\mathcal{H}}, \vec{n} \wedge \vec{E} \in \mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1/2}(\Gamma)$.
Les équations intégrales s'énoncent alors :
Soit g la fonction de Green. Étant donné $(k, \vec{E}^{inc}, \vec{\mathcal{H}}^{inc})$, on cherche $\vec{J} = \vec{n} \wedge \vec{\mathcal{H}}, \vec{K} = \vec{n} \wedge \vec{E} \in \mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ tels que pour tout $\vec{\phi} \in \mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1/2}(\Gamma)$,
l'EFIE s'exprime telle que

$$
\begin{aligned}
(6.7.1)\quad \int_\Gamma \vec{E}_t^{inc}(\vec{x}) \cdot \vec{\phi}(\vec{x}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}) &= \frac{1}{2} \int_\Gamma \vec{E}_t(\vec{x}) \cdot \vec{\phi}(\vec{x}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}) \\
&\quad - \int_\Gamma \left(\int_\Gamma \vec{\nabla} g(\vec{x} - \vec{y}) \wedge \vec{K}(\vec{y}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{y}) \right) \cdot \vec{\phi}(\vec{x}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}) \\
&\quad - \frac{i}{k} \int_\Gamma \left(\int_\Gamma g(\vec{x} - \vec{y}) \vec{\nabla}_s \cdot \vec{J}(\vec{y}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{y}) \right) \vec{\nabla}_s \cdot \vec{\phi}(\vec{x}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}) \\
&\quad + ik \int_\Gamma \left(\int_\Gamma g(\vec{x} - \vec{y}) \vec{J}(\vec{y}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{y}) \right) \cdot \vec{\phi}(\vec{x}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}),
\end{aligned}
$$

et la MFIE s'exprime telle que

$$
\begin{aligned}
(6.7.2)\quad \int_\Gamma \vec{\mathcal{H}}_t^{inc}(\vec{x}) \cdot \vec{\phi}(\vec{x}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}) &= \frac{1}{2} \int_\Gamma \vec{\mathcal{H}}_t(\vec{x}) \cdot \vec{\phi}(\vec{x}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}) \\
&\quad - \int_\Gamma \left(\int_\Gamma \vec{\nabla} g(\vec{x} - \vec{y}) \wedge \vec{J}(\vec{y}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{y}) \right) \cdot \vec{\phi}(\vec{x}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}) \\
&\quad + \frac{i}{k} \int_\Gamma \left(\int_\Gamma g(\vec{x} - \vec{y}) \vec{\nabla}_s \cdot \vec{K}(\vec{y}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{y}) \right) \vec{\nabla}_s \cdot \vec{\phi}(\vec{x}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}) \\
&\quad - ik \int_\Gamma \left(\int_\Gamma g(\vec{x} - \vec{y}) \vec{K}(\vec{y}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{y}) \right) \cdot \vec{\phi}(\vec{x}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}).
\end{aligned}
$$

Ceci est l'expression continue de la formulation variationnelle des équations intégrales. Dans la suite nous approcherons cette forme variationnelle à l'aide des familles de fonction présentées précédemment.
De plus, par abus de notation, nous omettrons le $-1/2$ dans l'espace $\mathrm{H}_{\mathrm{div}}^{-1/2}(\Gamma) \equiv \mathrm{H}_{\mathrm{div}}(\Gamma)$.

6.8 Contribution de la CIOE dans la discrétisation de la forme variationnelle

On prend comme fonction test $\vec{\phi}_i$, la fonction de base associée à l'arête i qui appartient à $\mathrm{H}_{\mathrm{div}}(\Gamma_h)$. On décompose $\vec{J}, \vec{K} \in \mathrm{H}_{\mathrm{div}}(\Gamma)$ sur les fonctions de base $\vec{\phi}_j \in \mathrm{H}_{\mathrm{div}}(\Gamma_h)$.

$$
\vec{J} \simeq \sum_{j=1}^{N} I_j \vec{\phi}_j, \qquad\qquad \vec{K} \simeq \sum_{j=1}^{N} k_j \vec{\phi}_j.
$$

Il reste alors à trouver une bonne approximation de $\vec{E_t}$ et $\vec{\mathcal{H}_t}$ pour exprimer $\frac{1}{2}\int_{\Gamma_h} \vec{E_t}(\vec{x}) \cdot \vec{\phi_i}(\vec{x}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{x})$ et $\frac{1}{2}\int_{\Gamma_h} \vec{\mathcal{H}_t}(\vec{x}) \cdot \vec{\phi_i}(\vec{x}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{x})$ en fonction des inconnues $\vec{J}, \vec{K}$.
Selon la CIOE employée, cette décomposition ne sera pas la même. Notre but est alors de trouver une formulation qui se comporte bien quand on déduit d'une CIOE une autre plus simple. C'est-à-dire que la formulation intégrale déterminée avec la CI3 doit être équivalente à la formulation intégrale déterminée avec la CI0 quand les coefficients a_1, a_2, b_1, b_2 sont nuls. En effet, à cause des opérateurs différentiels, nous ne représenterons pas $\vec{E_t}$ et $\vec{\mathcal{H}_t}$ à l'aide d'une seule famille, mais potentiellement plusieurs familles. Nous préciserons lesquelles dans la suite.

6.8.1 Discrétisation des opérateurs $\mathcal{L}_D, \mathcal{L}_R$

Les CIOE font intervenir les opérateurs différentiels $\mathcal{L}_D$, $\mathcal{L}_R$. On introduit donc les matrices $\mathbf{L_D}, \mathbf{L_R}$ correspondantes.
Comme les $\vec{\phi_j}$ sont dans $\mathrm{H_{div}}$, on peut appliquer directement la divergence surfacique.

Définition 6.19 (Discrétisation de l'opérateur $\mathcal{L}_D$)**.** *On définit la matrice* $\mathbf{L_D}$ *telle que*

$$\mathbf{L_D}_{ij} = -\int_{\Gamma_h} \vec{\nabla}_s \cdot \vec{\phi_j}(\vec{x}) \vec{\nabla}_s \cdot \vec{\phi_i}(\vec{x}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}).$$

Par définition on a $\mathbf{L_D}_{ij} = \int_{\Gamma_h} \mathcal{L}_D(\vec{\phi_j})(\vec{x}) \cdot \vec{\phi_i}(\vec{x}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{x})$.
De plus, par définition des fonctions $\vec{\phi_j}$, on ne peut pas définir $\int_{\Gamma_h} \mathcal{L}_R(\vec{\phi_i})(\vec{x}) \cdot \vec{\phi_j}(\vec{x}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{x})$ puisqu'elles ne sont pas dans $\mathrm{H_{rot}}$.
Notons que ce problème peut être résolu en prenant en compte les sauts engendrés par cet opérateur sur les fonctions de Raviart-Thomas (Soudais 2017) ou d'utiliser d'autres sous-espaces de $\mathrm{H_{div}}(\Gamma)$, par exemple les fonctions de Buffa-Christiansen (Yan et al. 2013) mais ces approches n'ont pas étés considérées.
On projette alors les fonctions $\vec{\phi_j}$ sur les fonctions $\vec{p_j}$ grâce aux $\vec{q_j}$.

Définition 6.20 (Discrétisation de l'opérateur $\mathcal{L}_R$)**.** *Soit* $\mathbf{P}$ *la matrice introduite à la définition 6.17. Alors on définit la matrice*

$$\mathbf{L_R} = -\mathbf{P}^t \mathbf{L_D} \mathbf{P}.$$

Proposition 6.21. *Cette matrice approche l'action de* $\mathcal{L}_R$ *sur les* $\vec{\phi_j}$*.*

Démonstration. Cette propriété est démontrée par Stupfel 2015, eq. (17). On projette les fonctions $\vec{\phi_j}$ sur les fonctions $\vec{p_j}$.

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_h} \vec{\phi_i}(\vec{x}) \cdot \mathcal{L}_R(\vec{\phi_j})(\vec{x}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}) &\simeq \int_{\Gamma_h} \Pi(\vec{\phi_i})(\vec{x}) \cdot \mathcal{L}_R(\Pi(\vec{\phi_j}))(\vec{x}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}), \\ &= \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \mathbf{P}_{ni} \mathbf{P}_{mj} \int_{\Gamma_h} \vec{p_n}(\vec{x}) \cdot \mathcal{L}_R(\vec{p_m})) \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}),\end{aligned}$$

$$= -\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} \mathbf{P}_{ni}\mathbf{P}_{mj} \int_{\Gamma_h} \vec{\phi_n}(\vec{x}) \cdot \mathcal{L}_D(\vec{\phi_m}))\mathrm{d}\Gamma(\vec{x}),$$
$$= -\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} \mathbf{P}_{ni}\mathbf{P}_{mj}\mathbf{L}_{\mathbf{D}nm}.$$

□

6.8.2 Contribution de la CIOE à l'EFIE

On déduit de la CIOE que

$$\frac{1}{2}\int_{\Gamma_h} \vec{E}_t(\vec{x}) \cdot \vec{\phi_i}(\vec{x})\mathrm{d}\Gamma(\vec{x}) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_h} \Big((a_0\mathcal{I} + a_1\mathcal{L}_D - a_2\mathcal{L}_R)\,\vec{J}(\vec{x}) - (b_1\mathcal{L}_D - b_2\mathcal{L}_R)\,\vec{E}_t(\vec{x})\Big) \cdot \vec{\phi_i}(\vec{x})\mathrm{d}\Gamma(\vec{x}).$$

Nous rappelons de J.-C. Nédélec 2001, Théorème 5.4.2, p. 209 que $(\vec{E}, \vec{\mathcal{H}}) \in \mathrm{H}_{\mathrm{rot}}(\Omega)$ donc $(\vec{K} = \vec{n} \wedge \vec{E}, \vec{J} = \vec{n} \wedge \vec{\mathcal{H}}) \in \mathrm{H}_{\mathrm{div}}(\Gamma)$ et $(\vec{E}_t, \vec{\mathcal{H}}_t) \in \mathrm{H}_{\mathrm{rot}}(\Gamma)$. Cependant, nous avons choisis (voir Stupfel 2015, eq. 10, p. 1660) d'approcher $\vec{E}_t$ dans $\mathrm{H}_{\mathrm{div}}(\Gamma_h)$ pour le décomposer sur les fonctions de Raviart-Thomas. Ainsi

$$\simeq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\int_{\Gamma_h} \Big((a_0\mathcal{I} + a_1\mathcal{L}_D - a_2\mathcal{L}_R)\, I_j\vec{\phi_j}(\vec{x}) - (b_1\mathcal{L}_D - b_2\mathcal{L}_R)\, e_j\vec{\phi_j}(\vec{x})\Big) \cdot \vec{\phi_i}(\vec{x})\mathrm{d}\Gamma(\vec{x}),$$

ce qui s'exprime matriciellement

$$= \frac{1}{2}\left(\left(a_0\mathbf{G}^{\phi\phi} + a_1\mathbf{L}_{\mathbf{D}} - a_2\mathbf{L}_{\mathbf{R}}\right)\underline{I} - (b_1\mathbf{L}_{\mathbf{D}} - b_2\mathbf{L}_{\mathbf{R}})\,\underline{e}\right).$$

Or comme $\vec{K} = \vec{n} \wedge \vec{E}$, alors

$$\sum_{j=1}^{N} e_j\vec{n} \wedge \vec{\phi_j} \simeq \sum_{j=1}^{N} k_j\vec{\phi_j},$$

et on a la relation entre les composantes de l'approximation de ces deux vecteurs

$$\underline{e} \simeq \mathbf{P}\underline{k}.$$

Donc la contribution des CIOE à l'EFIE est

$$\frac{1}{2}\int_{\Gamma_h} \vec{E}_t(\vec{x}) \cdot \vec{\phi_i}(\vec{x})\mathrm{d}\Gamma(\vec{x}) \simeq \frac{1}{2}\left((a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{L}_{\mathbf{D}} - a_2\mathbf{L}_{\mathbf{R}})\,\underline{I} - (b_1\mathbf{L}_{\mathbf{D}} - b_2\mathbf{L}_{\mathbf{R}})\,\mathbf{P}\underline{k}\right).$$

6.8.3 Contribution de la CIOE à la MFIE

On commence par remarquer que

$$\frac{1}{2}\int_{\Gamma_h} \vec{\mathcal{H}}_t(\vec{x}) \cdot \vec{\phi_i}(\vec{x})\mathrm{d}\Gamma(\vec{x}) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_h} \vec{J}(\vec{x}) \cdot (\vec{n} \wedge \vec{\phi_i})(\vec{x})\mathrm{d}\Gamma(\vec{x}),$$

dont on déduit à l'aide de la CIOE que

$$= \frac{1}{2a_0}\int_{\Gamma_h}\Big((\mathcal{I}+b_1\mathcal{L}_D-b_2\mathcal{L}_R)\,\vec{E}_t(\vec{x}) - (a_1\mathcal{L}_D-a_2\mathcal{L}_R)\,\vec{J}(\vec{x})\Big)\cdot(\vec{n}\wedge\vec{\phi}_i)(\vec{x})\mathrm{d}\Gamma(\vec{x}).$$

Nous remplaçons $\vec{E}_t$ par $-\vec{n}\wedge\vec{K}$ ce qui va simplifier la discrétisation

$$= \frac{1}{2a_0}\int_{\Gamma_h}\Big(-(\mathcal{I}+b_1\mathcal{L}_D-b_2\mathcal{L}_R)\,(\vec{n}\wedge\vec{K}(\vec{x})) - (a_1\mathcal{L}_D-a_2\mathcal{L}_R)\,\vec{J}(\vec{x})\Big)\cdot(\vec{n}\wedge\vec{\phi}_i)(\vec{x})\mathrm{d}\Gamma(\vec{x}),$$

nous approchons $\vec{K}$ dans $\mathrm{H}_{\mathrm{div}}(\Gamma_h)$ mais nous avons choisi d'approcher $\vec{J}$ dans $\mathrm{H}_{\mathrm{rot}}(\Gamma_h)$ au lieu de $\mathrm{H}_{\mathrm{div}}(\Gamma_h)$

$$\simeq \frac{1}{2a_0}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Gamma_h}\Big(-(\mathcal{I}+b_1\mathcal{L}_D-b_2\mathcal{L}_R)\,k_j(\vec{n}\wedge\vec{\phi}_j(\vec{x})) - (a_1\mathcal{L}_D-a_2\mathcal{L}_R)\,I'_j(\vec{n}\wedge\vec{\phi}_j(\vec{x}))\Big)\cdot(\vec{n}\wedge\vec{\phi}_i)(\vec{x})\mathrm{d}\Gamma(\vec{x}).$$

En remarquant que $\vec{n}\wedge\vec{\phi}_i\cdot\vec{n}\wedge\vec{\phi}_j=\vec{\phi}_i\cdot\vec{\phi}_j$ et $\displaystyle\int_\Gamma\mathcal{L}_R(\vec{n}\wedge\vec{\phi})\cdot(\vec{n}\wedge\vec{\psi})=-\int_\Gamma\mathcal{L}_D(\vec{\phi})\cdot\vec{\psi}$, on déduit

$$\simeq \frac{1}{2a_0}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Gamma_h}\Big(-(\mathcal{I}+b_2\mathcal{L}_D-b_1\mathcal{L}_R)\,k_j\vec{\phi}_j(\vec{x}) - (a_2\mathcal{L}_D-a_1\mathcal{L}_R)\,I'_j\vec{\phi}_j(\vec{x})\Big)\cdot\vec{\phi}_i(\vec{x})\mathrm{d}\Gamma(\vec{x}),$$

ce qui s'exprime matriciellement

$$= \frac{1}{2a_0}\Big(-\Big(\mathbf{G}^{\phi\phi}+b_2\mathbf{L_D}-b_1\mathbf{L_R}\Big)\,\underline{k}-(a_2\mathbf{L_D}-a_1\mathbf{L_R})\,\underline{I'}\Big),$$
$$\simeq -\frac{1}{2a_0}\left((\mathbf{M}+b_2\mathbf{L_D}-b_1\mathbf{L_R})\,\underline{k}+(a_2\mathbf{L_D}-a_1\mathbf{L_R})\,\mathbf{P}\underline{I}\right).$$

Donc la contribution des CIOE à la MFIE est

$$\frac{1}{2}\int_{\Gamma_h}\vec{\mathcal{H}}_t(\vec{x})\cdot\vec{\phi}_i(\vec{x})\mathrm{d}\Gamma(\vec{x})\simeq -\frac{1}{2a_0}\left((\mathbf{M}+b_2\mathbf{L_D}-b_1\mathbf{L_R})\,\underline{k}+(a_2\mathbf{L_D}-a_1\mathbf{L_R})\,\mathbf{P}\underline{I}\right).$$

6.9 Forme finale du système linéaire

Définition 6.22. *On définit les matrices* $\mathbf{S}$, $\widetilde{\mathbf{S}}$ *telles que*

$$S_{pq} = ik\int_{\Gamma_h}\left(\int_{\Gamma_h}g(\vec{x}-\vec{y})\vec{\phi}_p(\vec{y})\mathrm{d}\Gamma(\vec{y})\right)\cdot\vec{\phi}_q(\vec{x})\mathrm{d}\Gamma(\vec{x}) + \frac{i}{k}\int_{\Gamma_h}\left(\int_{\Gamma_h}g(\vec{x}-\vec{y})\vec{\nabla}\cdot\vec{\phi}_p(\vec{y})\mathrm{d}\Gamma(\vec{y})\right)\vec{\nabla}\cdot\vec{\phi}_q(\vec{x})\mathrm{d}\Gamma(\vec{x}),$$
$$\widetilde{S}_{pq} = \int_{\Gamma_h}\left(\int_{\Gamma_h}\vec{\nabla}g(\vec{x}-\vec{y})\wedge\vec{\phi}_p(\vec{y})\mathrm{d}\Gamma(\vec{y})\right)\cdot\vec{\phi}_q(\vec{x})\mathrm{d}\Gamma(\vec{x}).$$

Proposition 6.23. *Les matrices* $\mathbf{S}$ *et* $\widetilde{\mathbf{S}}$ *sont symétriques.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des propriétés de l'intégrale et de la parité de la fonction de Green. □

Le second membre est obtenu en projetant le champ incident

$$b_i^E = \int_{\Gamma_h} \vec{E}_t^{inc}(\vec{x}) \cdot \vec{\phi}_i(\vec{x}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}),$$
$$b_i^H = \int_{\Gamma_h} \vec{\mathcal{H}}_t^{inc}(\vec{x}) \cdot \vec{\phi}_i(\vec{x}) \mathrm{d}\Gamma(\vec{x}).$$

Proposition 6.24. *On cherche les vecteurs complexes* $\underline{I}, \underline{k}$ *solution de*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S} + \frac{1}{2}\left(a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{L_D} - a_2\mathbf{L_R}\right) & \widetilde{\mathbf{S}} - \frac{1}{2}\left(b_1\mathbf{L_D} - b_2\mathbf{L_R}\right)\mathbf{P} \\ \widetilde{\mathbf{S}} + \frac{1}{2a_0}\left(a_2\mathbf{L_D} - a_1\mathbf{L_R}\right)\mathbf{P} & -\mathbf{S} - \frac{1}{2a_0}\left(\mathbf{M} + b_2\mathbf{L_D} - b_1\mathbf{L_R}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I} \\ \underline{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b^E} \\ \underline{b^H} \end{bmatrix}.$$

Ces vecteurs sont les composantes dans la famille des $\vec{\phi}_j$ *de l'approximation de* $\vec{J}, \vec{K}$*, les inconnues de l'EFIE et de la MFIE.*

On remarque que le système n'est pas symétrique, sauf si $b_2 = a_2/a_0$ et $b_1 = a_1/a_0$ et que la contribution de la CIOE n'introduit que des matrices creuses. C'est une amélioration par rapport aux travaux initiaux de Stupfel 2015 où l'on introduisait une matrice dense dans le bloc inférieur droit. Par contre, dans cet article la matrice était symétrique.
L'introduction de cette modification dans un code industriel "haute performance" est une tâche complexe qui nécessite un investissement conséquent des équipes en charge de ce solveur, et n'a pas été réalisée dans le cadre de cette thèse, dépassant largement le cadre de cette dernière. Nous n'avons donc pas bénéficié des codes optimisés pour un grand nombre d'inconnues (méthodes de compression ACA ou $\mathcal{H}$-matrices de Lizé 2014) et présentons des résultats issus d'un code maquette résolvant l'EFIE et la MFIE dans lequel nous avons implémenté la méthode numérique précédente.

6.10 Résultats numériques

La figure 6.5 contient la SER monostatique d'un cône-sphère, éclairé depuis le nez, calculée par un code axis symétrique de type équations intégrales avec maillage des matériaux. Cette SER est comparée avec les SER calculées par le code maquette équations intégrales couplées avec les CIOE CI0 et CI3 où les coefficients sont calculés dans le cadre de l'approximation du plan tangent.
Il y a 34056 inconnus pour le système linéaire final, pour ce cône-sphère (voir figure 6.6). Avec une structure de données type matrice complexe pleine sur 64 bits, cela représente environ 19 Gigaoctets de mémoire vive pour le système linéaire final.

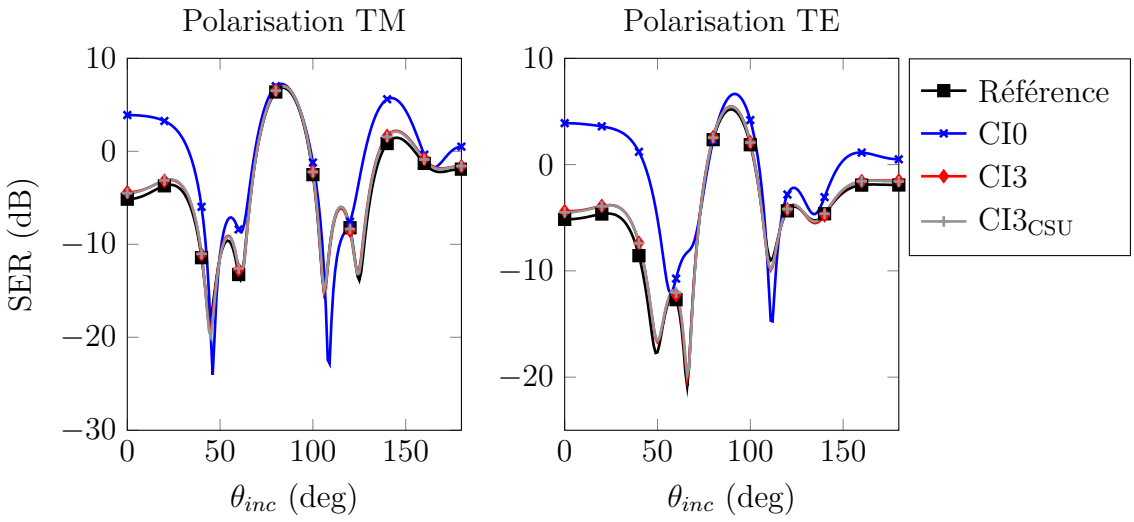


FIGURE 6.5 – $\epsilon = 1 - i$, $\mu = 1$, $d = 5$cm, $f = 200$ MHz, maillé $\lambda_0/55$, $\theta_{obs} = \theta_{inc}$

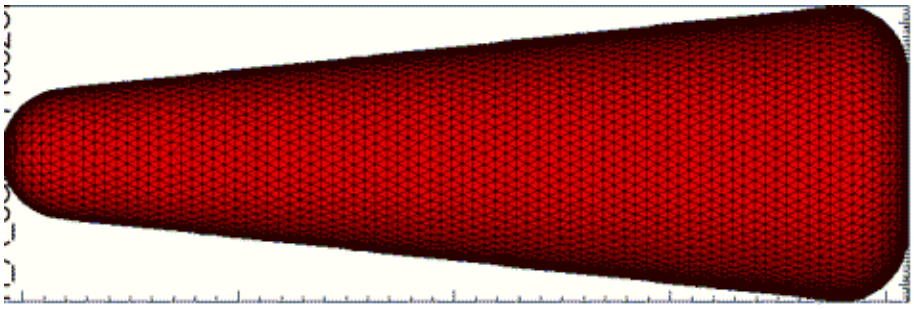


FIGURE 6.6 – Cône-sphère de longueur 2 mètres et de demi-angle 8 degrés maillé avec 11352 éléments.

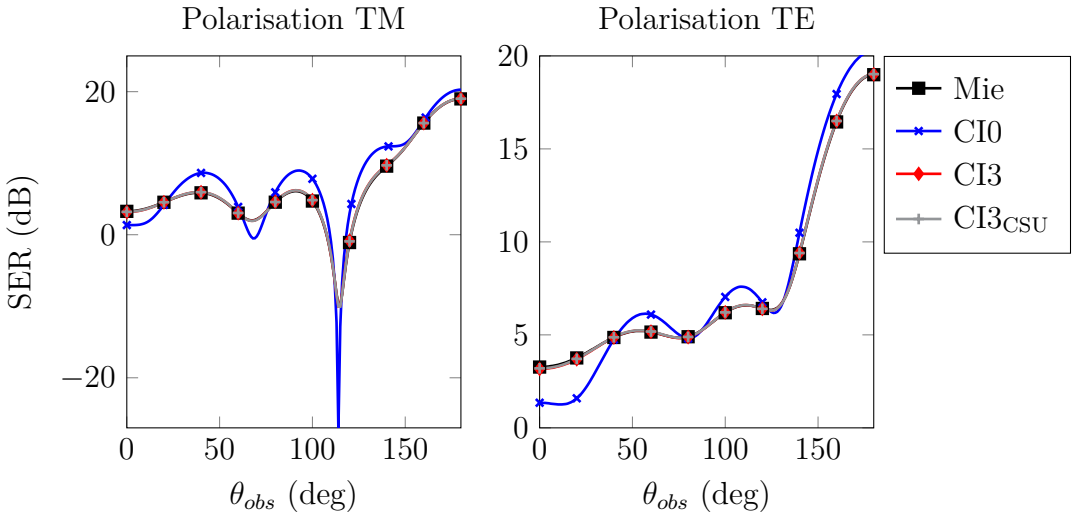


FIGURE 6.7 – $\epsilon = 1 - i$, $\mu = 1$, $d = 5$cm, $f = 200$ MHz, maillé $\lambda_0/18$, $\theta_{inc} = 0$

La figure 6.7 contient les SER bistatique d'une sphère par équations intégrales couplées avec les CIOE CI0 et CI3 où les coefficients sont calculés dans le cadre de l'approximation du plan tangent, et ces SER sont comparées avec celle obtenue par

série de Mie.
Par manque de temps, nous n'avons pas de résultats numériques avec des coefficients de CIOE calculés avec le cas du cylindre ou de la sphère.
Ces figures montrent que la SER calculée par EI avec CIOE est très proche de la solution de référence, même dans l'approximation du plan tangent et valident numériquement notre méthode.

Conclusion

Rétrospectivement, pour résoudre le problème de la diffraction électromagnétique par équations intégrales en assurant l'unicité des solutions a priori, nous avions la CIOE CI1 et une CSU. Les coefficients de la CIOE n'étaient calculables par minimisation que dans le cadre de l'approximation locale de l'objet par son plan tangent. Cependant, cette CIOE n'était pas vraiment performante même si l'on ne vérifiait pas les CSU et les outils numériques en place ne permettaient pas une utilisation de cette méthode dans un code industriel.

Il existait dans la littérature une CIOE proche de cette dernière, qui donnait d'excellents résultats sans CSU. Nous avons alors réussi à trouver plusieurs CSU pour cette CIOE. La résolution par couplage équation intégrale avec CIOE donne alors des SER plus proches des résultats de référence, même quand les coefficients sont calculés dans l'approximation localement plane.

Nous avons voulu intégrer des courbures locales en approchant l'objet localement par un cylindre ou une sphère. Nous avons déterminé que les outils mathématiques en place étaient bons, car les opérateurs associés à ces géométries convergent vers ceux du plan quand le rayon augmente. Nous avons remarqué que les CIOE considérées étaient performantes pour la sphère, mais pas pour le cylindre à cause de son anisotropie. Numériquement, nous avons conclu qu'il était alors plus judicieux de garder l'approximation plan infini local pour nos empilements.

Nous avons trouvé une CIOE plus adaptée au cylindre et l'établissement de CSU ainsi que l'intégration de cette CIOE dans les équations intégrales est une perspective possible. Enfin, aucune analyse n'a été faite concernant la précision des CIOE quand l'ordre de ces dernières augmente, un point soulevé lors de la conférence WAVES 2019, à Vienne (Autriche).

Annexes

A Liste synthétique des CIOE

Nous rappelons l'expression des opérateurs aux dérivées partielles $\mathcal{L}_D, \mathcal{L}_R, \mathcal{L}$ sur des champs vectoriels tangents

$$\mathcal{L}_D = \vec{\nabla}_s \vec{\nabla}_s \cdot , \qquad \mathcal{L}_R = \vec{\nabla}_s \wedge \vec{\nabla}_s \wedge , \qquad \mathcal{L} = \mathcal{L}_D - \mathcal{L}_R.$$

L'opérateur $\mathcal{I}$ est l'identité. On rappelle que $\vec{J} = (\vec{n} \wedge \vec{\mathcal{H}})_t$.

- CI0
  - Autres noms : SIBC, LIBC
  - Expression : $\vec{E}_t = a_0 \vec{J}$
  - Référence : Leontovich 1948
- CI01
  - Autre nom : Taylor 1
  - Expression : $\vec{E}_t = (a_0 \mathcal{I} + a_1 \mathcal{L}) \vec{J}$
  - Référence : Stupfel 2015
- CI1
  - Autre nom : Pade 1-1
  - Expression : $(\mathcal{I} + b\mathcal{L}) \vec{E}_t = (a_0 \mathcal{I} + a_1 \mathcal{L}) \vec{J}$
  - Référence : Stupfel 2015
- CI4
  - Autre nom : Polynomial
  - Expression : $\vec{E}_t = (a_0 \mathcal{I} + a_1 \mathcal{L}_D - a_2 \mathcal{L}_R) \vec{J}$
  - Référence : Hoppe et al. 1995
- CI3
  - Autre nom : Ratio
  - Expression : $(\mathcal{I} + b_1 \mathcal{L}_D - b_2 \mathcal{L}_R) \vec{E}_t = (a_0 \mathcal{I} + a_1 \mathcal{L}_D - a_2 \mathcal{L}_R) \vec{J}$
  - Références : Hoppe et al. 1995 ; Marceaux et al. 2000 ; Aubakirov 2014
- CI6
  - Autre nom : Curvature ratio
  - Expression : $(\mathcal{I} + c_1 \mathcal{L}_D - c_2 \mathcal{L}_R) \vec{E}_t = (\mathrm{diag}\,(a_1, a_2) + b_1 \mathcal{L}_D - b_2 \mathcal{L}_R) \vec{J}$
  - Référence : Hoppe et al. 1995
- CI7
  - Expression : $\left(\mathcal{I} + \sum_{i=1}^{3} \left(d_i {\mathcal{L}_D}^i + e_i (-\mathcal{L}_R)^i\right)\right) \vec{E}_t = \left(a_0 \mathcal{I} + \sum_{i=1}^{3} \left(b_i {\mathcal{L}_D}^i + c_i (-\mathcal{L}_R)^i\right)\right) \vec{J}$

B Formulation des équations de Maxwell

Uniquement dans cette annexe, les constantes de matériaux relatives sont dénotées par l'indice $_r$.
Les équations de Maxwell temporelles sont

$$\text{(B.1)} \qquad \begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \mu \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= 0, \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} - \epsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= 0. \end{cases}$$

Donc les équations de Maxwell harmoniques en convention $e^{i\omega t}$ sont

$$\text{(B.2)} \qquad \begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} + i\omega\mu \vec{H} &= 0, \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} - i\omega\epsilon \vec{E} &= 0. \end{cases}$$

On définit les constantes relatives $\mu_r = \mu/\mu_0$, $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$, $k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$.
On pose $\vec{\mathcal{H}} = \eta_0 \vec{H}$. Les équations harmoniques se réécrivent

$$\text{(B.3)} \qquad \begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} + ik_0\eta_0\mu_r \vec{H} = 0, \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} - ik_0\eta_0^{-1}\epsilon_r \vec{E} = 0, \end{cases} \overset{\vec{\mathcal{H}}=\eta_0\vec{H}}{\Rightarrow} \begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} + ik_0\mu_r \vec{\mathcal{H}} = 0, \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{H}} - ik_0\epsilon_r \vec{E} = 0. \end{cases}$$

On pose $k = k_0\nu_r$, $\nu_r = \sqrt{\mu_r\epsilon_r}$, $\eta_r = \sqrt{\mu_r/\epsilon_r}$

$$\text{(B.4)} \qquad \begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} + ik\eta_0\eta_r \vec{H} = 0, \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} - ik\eta_0^{-1}\eta_r^{-1} \vec{E} = 0, \end{cases} \overset{\vec{\mathcal{H}}=\eta_0\vec{H}}{\Rightarrow} \begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} + ik\eta_r \vec{\mathcal{H}} = 0, \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{H}} - ik\eta_r^{-1} \vec{E} = 0. \end{cases}$$

C Opérateurs gradient, divergent et rotationnel en coordonnées cartésiennes, cylindriques, sphériques et opérateurs surfaciques

C.1 Cartésien

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}, \tag{C.1}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \tag{C.2}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{u} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}. \tag{C.3}$$

C.2 Cylindrique

$$(x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z),$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}, \tag{C.4}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \tag{C.5}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{u} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\vec{e_z}. \tag{C.6}$$

C.3 Sphérique

$$(x, y, z) = (r\cos\phi\sin\theta, r\sin\theta\sin\theta, r\cos\theta),$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{e_\phi}, \tag{C.7}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta) u_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}, \tag{C.8}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\wedge\vec{u} = \frac{1}{r\sin\theta}&\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta) u_\phi\right) - \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi}\right)\vec{e_r}\ldots \\ &+ \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial (r u_\phi)}{\partial r}\right)\vec{e_\theta}\ldots \\ &+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\vec{e_\phi}.\end{aligned} \tag{C.9}$$

C.4 Opérateurs surfaciques

Soit Ω un objet de surface Γ régulière et $\vec{n}$ la normale unitaire sortante de cet objet. Soit f et $\vec{u}$ une fonction et un champ de vecteurs dérivables en tout point $\vec{x}$ de Γ, on rappelle de J.-C. Nédélec 2001 les opérateurs différentiels surfaciques

$$\vec{\nabla}_s f(\vec{x}) = \vec{\nabla} f(\vec{x}) - \vec{n}(\vec{x})(\vec{n}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} f(\vec{x})), \tag{C.10}$$

$$\vec{\nabla}_s \cdot \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{u}(\vec{x}) - \vec{n}(\vec{x})(\vec{n}(\vec{x}) \cdot \vec{u}(\vec{x}) \right), \tag{C.11}$$

$$\vec{\nabla}_s \wedge \vec{u}(\vec{x}) = \vec{n}(\vec{x}) \left(\vec{n}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{u}(\vec{x}) \right). \tag{C.12}$$

Si l'on veut appliquer le rotationnel surfacique comme une application sur les champs tangentiels (à 2 coordonnées), les opérateurs rotationnels surfaciques scalaire et vectoriel sont

$$\mathrm{rot}_s \vec{u}(\vec{x}) = \vec{n}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{u}(\vec{x}), \tag{C.13}$$

$$\vec{\mathrm{rot}}_s f(\vec{x}) = -\vec{n} \wedge \vec{\nabla}_s f(\vec{x}). \tag{C.14}$$

D Solution dans le plan quand $k_3 = 0$

Dans chaque couche de l'empilement plan.
Si $k_3 = k_0^2\epsilon\mu - k_x^2 - k_y^2 = 0$, il existe $(c_1(k_x,k_y), c_2(k_x,k_y), c_3(k_x,k_y), c_4(k_x,k_y)) \in (\mathbb{C}(\mathbb{R}^2))^4$ telles que

$$\begin{aligned}\hat{E_y}(k_x,k_y,z) &= c_1(k_x,k_y)z + c_2(k_x,k_y),\\ \hat{\mathcal{H}}_y(k_x,k_y,z) &= c_3(k_x,k_y)z + c_4(k_x,k_y).\end{aligned}$$

À partir des composantes $\vec{e_x}, \vec{e_y}$ des équations de Maxwell, on peut déterminer $\hat{E_x}, \hat{E_z}, \hat{\mathcal{H}}_x, \hat{\mathcal{H}}_z$. Cela revient à résoudre $Y = \mathbf{M}X$ où la matrice $\mathbf{M}$ et les vecteurs X, Y sont définis tels que

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & -ik_y & -ik_0\mu & 0\\ ik_y & 0 & 0 & -ik_0\mu\\ ik_0\epsilon & 0 & 0 & -ik_y\\ 0 & ik_0\epsilon & ik_y & 0\end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix}\hat{E_x}\\ \hat{E_z}\\ \hat{\mathcal{H}}_x\\ \hat{\mathcal{H}}_z\end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial \hat{E_y}}{\partial z}\\ ik_x\hat{E_y}\\ -\dfrac{\partial \hat{\mathcal{H}}_y}{\partial z}\\ ik_x\hat{\mathcal{H}}_y\end{bmatrix}.$$

Cette matrice est inversible si $\det(\mathbf{M}) = (k^2 - k_y^2)^2$ est non nul. On suppose donc $k_x^2 \neq 0$. Alors $\mathbf{M}^{-1} = \dfrac{1}{k_x^2}\mathbf{M}$.

$$\begin{cases}\hat{E_x} = \dfrac{1}{k_x^2}\left(ik_yik_x\hat{E_y} + ik_0\mu\dfrac{\partial\hat{\mathcal{H}}_y}{\partial z}\right),\\ \hat{E_z} = \dfrac{1}{k_x^2}\left(-ik_y\dfrac{\partial\hat{E_y}}{\partial z} - ik_0\mu ik_x\hat{\mathcal{H}}_y\right)\end{cases} \qquad \begin{cases}\hat{\mathcal{H}}_x = \dfrac{1}{k_x^2}\left(-ik_0\epsilon\dfrac{\partial\hat{E_y}}{\partial z} + ik_yik_x\hat{\mathcal{H}}_y\right),\\ \hat{\mathcal{H}}_z = \dfrac{1}{k_x^2}\left(ik_0\epsilon ik_x\hat{E_y} - ik_y\dfrac{\partial\hat{\mathcal{H}}_y}{\partial z}\right)\end{cases}$$

Alors on extrait alors uniquement les composantes suivant x, y de $\hat{\vec{E}}$ et $\vec{e_z} \wedge \hat{\vec{\mathcal{H}}}$

$$\begin{cases}\hat{E_x} = \dfrac{1}{k_x^2}\left(-k_yk_x\hat{E_y} + ik_0\mu c_3(k_x,k_y)\right),\\ \hat{E_y} = c_1(k_x,k_y)z + c_2(k_x,k_y)\end{cases}$$
$$\begin{cases}-\hat{\mathcal{H}}_y = -c_3(k_x,k_y)z - c_4(k_x,k_y),\\ \hat{\mathcal{H}}_x = -\dfrac{1}{k_x^2}\left(ik_0\epsilon c_1(k_x,k_y) + k_yk_x\hat{\mathcal{H}}_y\right)\end{cases}$$

Vérifions $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\hat{\vec{E}} &= ik_x\hat{E_x} && +ik_y\hat{E_y} && +\frac{\partial\hat{E_z}}{\partial z},\\ &= -ik_y\hat{E_y} - \frac{k_0\mu}{k_x}c_3 && +ik_y\hat{E_y} && +\frac{k_0\mu}{k_x}c_3,\\ &= 0.\end{aligned}$$

On définit les matrices $\mathbf{A}_E(k_x,k_y,z)$, $\mathbf{B}_E(k_x,k_y,z)$, $\mathbf{A}_H(k_x,k_y,z)$, $\mathbf{B}_H(k_x,k_y,z)$ constantes par morceaux en z

$$\mathbf{A}_E(k_x,k_y,z) = z\begin{bmatrix} -\dfrac{k_y}{k_x} & -i\dfrac{k_0\mu(z)}{k_x^2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{B}_E(k_x,k_y,z) = \begin{bmatrix} -\dfrac{k_y}{k_x} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{A}_H(k_x,k_y,z) = z\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{-ik_0\epsilon(z)}{k_x^2} & -\dfrac{k_y}{k_x} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{B}_H(k_x,k_y,z) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -\dfrac{k_y}{k_x} \end{bmatrix}.$$

Les composantes en $\vec{e_x}, \vec{e_y}$ des champs, dites composantes tangentielles par abus de langage sont

$$\hat{\vec{E}}_t(k_x,k_y,z) = \mathbf{A}_E(k_x,k_y,z)\begin{bmatrix} c_1(k_x,k_y,z) \\ c_3(k_x,k_y,z) \end{bmatrix} + \mathbf{B}_E(k_x,k_y,z)\begin{bmatrix} c_2(k_x,k_y,z) \\ c_4(k_x,k_y,z) \end{bmatrix},$$
$$\hat{\vec{J}}_t(k_x,k_y,z) = \mathbf{A}_H(k_x,k_y,z)\begin{bmatrix} c_1(k_x,k_y,z) \\ c_3(k_x,k_y,z) \end{bmatrix} + \mathbf{B}_H(k_x,k_y,z)\begin{bmatrix} c_2(k_x,k_y,z) \\ c_4(k_x,k_y,z) \end{bmatrix}.$$

Mais les matrices $\mathbf{B}_H, \mathbf{B}_E$ ne sont pas inversibles et donc on ne pourra pas trouver la matrice $\hat{\mathbf{Z}}$.

E Solution dans le cylindre quand $k_3 = 0$

Dans chaque couche de l'empilement cylindrique.
Si $k_3 = 0$, $k_z^2 = w^2\epsilon\mu$ et il existe donc des constantes $(c_1(n), c_2(n)) \in \mathbb{C}(\mathbb{N})^2$ telles que

$$\hat{E_z}(r, n, k_z) = c_1(n)r^n + c_2(n)r^{-n}.$$

Dans ce cas $\hat{E_z}(r, n, k_z)$ est linéairement dépendant de $\hat{E_z}(r, -n, k_z)$ et l'on peut se restreindre à n entier naturel.
Toute la méthode est aussi valable pour $\hat{H_z}$, il existe des constantes $(c_3(n), c_4(n)) \in \mathbb{C}(\mathbb{N})^2$ telles que

$$\hat{H_z}(r, n, k_z) = c_3(n)r^n + c_4(n)r^{-n}.$$

À partir des composantes en $\vec{e_r}, \vec{e_\theta}$ des équations de Maxwell, on peut déterminer $\hat{E_r}, \hat{E_\theta}, \hat{H_r}, \hat{H_\theta}$.

$$\begin{cases} -i\omega\sqrt{\mu\epsilon}\hat{E_\theta} + i\omega\mu\hat{H_r} = -\dfrac{in}{r}\hat{E_z}, \\ i\omega\epsilon\hat{E_\theta} - i\omega\sqrt{\mu\epsilon}\hat{H_r} = -\dfrac{\mathrm{d}\hat{H_z}}{\mathrm{d}r}, \\ i\omega\sqrt{\mu\epsilon}\hat{E_r} + i\omega\mu\hat{H_\theta} = \dfrac{\mathrm{d}\hat{E_z}}{\mathrm{d}r}, \\ i\omega\epsilon\hat{E_r} + i\omega\sqrt{\mu\epsilon}\hat{H_\theta} = \dfrac{in}{r}\hat{H_z}. \end{cases}$$

Ce système n'est pas inversible. On remarque une redondance dans les termes de gauche des équations.

$$\begin{cases} -i\omega\sqrt{\mu\epsilon}\hat{E_\theta} + i\omega\mu\hat{H_r} = -\dfrac{in}{r}\left(c_1(n)r^n + c_2(n)r^{-n}\right), \\ i\omega\epsilon\hat{E_\theta} - i\omega\sqrt{\mu\epsilon}\hat{H_r} = -n\left(c_3(n)r^{n-1} - c_4(n)r^{-n-1}\right), \\ i\omega\sqrt{\mu\epsilon}\hat{E_r} + i\omega\mu\hat{H_\theta} = n\left(c_1(n)r^{n-1} - c_2(n)r^{-n-1}\right), \\ i\omega\epsilon\hat{E_r} + i\omega\sqrt{\mu\epsilon}\hat{H_\theta} = \dfrac{in}{r}\left(c_3(n)r^n + c_4(n)r^{-n}\right). \end{cases}$$

Il est donc nécessaire pour que les égalités soient compatibles que $c_3(n) = -i\sqrt{\epsilon/\mu}c_1(n)$ et $c_4(n) = i\sqrt{\epsilon/\mu}c_2(n)$ donc $\begin{bmatrix}\hat{E_z}(r, n, k_z) \\ \hat{H_z}(r, n, k_z)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^n & r^{-n} \\ -i\sqrt{\epsilon/\mu}r^n & i\sqrt{\epsilon/\mu}r^{-n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1(n) \\ c_2(n)\end{bmatrix}$. On considère alors les deux égalités non redondantes de ce système ainsi que les composantes $\vec{e_z}$ des équations de Maxwell.

$$\begin{cases} -i\omega\sqrt{\mu\epsilon}\hat{E_\theta} + i\omega\mu\hat{H_r} = -in\left(c_1(n)r^{n-1} + c_2(n)r^{-n-1}\right), \\ i\omega\sqrt{\mu\epsilon}\hat{E_r} + i\omega\mu\hat{H_\theta} = n\left(c_1(n)r^{n-1} - c_2(n)r^{-n-1}\right), \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r\hat{E_\theta})}{\partial r} - \dfrac{in}{r}\hat{E_r} = -\omega\sqrt{\epsilon\mu}\left(c_1(n)r^n - c_2(n)r^{-n}\right), \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r\hat{H_\theta})}{\partial r} - \dfrac{in}{r}\hat{H_r} = i\omega\epsilon\left(c_1(n)r^n + c_2(n)r^{-n}\right). \end{cases}$$

On injecte les deux premières égalités dans les deux dernières.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r\hat{E}_\theta)}{\partial r} - \dfrac{n}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}r}\left(-i\omega\mu\hat{H}_\theta + n\left(c_1(n)r^{n-1} - c_2(n)r^{-n-1}\right)\right) = -\omega\sqrt{\epsilon\mu}\left(c_1(n)r^n - c_2(n)r^{-n}\right), \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r\hat{H}_\theta)}{\partial r} - \dfrac{n}{\omega\mu r}\left(i\omega\sqrt{\mu\epsilon}\hat{E}_\theta - in\left(c_1(n)r^{n-1} + c_2(n)r^{-n-1}\right)\right) = i\omega\epsilon\left(c_1(n)r^n + c_2(n)r^{-n}\right). \end{cases}$$

On développe

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r\hat{E}_\theta)}{\partial r} + i\dfrac{n}{r}\sqrt{\dfrac{\mu}{\epsilon}}\hat{H}_\theta = \dfrac{n^2}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}\left(c_1(n)r^{n-2} - c_2(n)r^{-n-2}\right) - \omega\sqrt{\epsilon\mu}\left(c_1(n)r^n - c_2(n)r^{-n}\right), \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r\hat{H}_\theta)}{\partial r} - i\dfrac{n}{r}\sqrt{\dfrac{\epsilon}{\mu}}\hat{E}_\theta = \dfrac{-in^2}{\omega\mu}\left(c_1(n)r^{n-2} + c_2(n)r^{-n-2}\right) + i\omega\epsilon\left(c_1(n)r^n + c_2(n)r^{-n}\right). \end{cases}$$

On factorise

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r\hat{E}_\theta)}{\partial r} + i\dfrac{n}{r}\sqrt{\dfrac{\mu}{\epsilon}}\hat{H}_\theta = -c_1(n)\sqrt{\dfrac{\mu}{\epsilon}}\left(\omega\epsilon r^n - \dfrac{n^2}{\omega\mu}r^{n-2}\right) + c_2(n)\sqrt{\dfrac{\mu}{\epsilon}}\left(\omega\epsilon r^{-n} - \dfrac{n^2}{\omega\mu}r^{-n-2}\right), \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r\hat{H}_\theta)}{\partial r} - i\dfrac{n}{r}\sqrt{\dfrac{\epsilon}{\mu}}\hat{E}_\theta = c_1(n)i\left(\omega\epsilon r^n - \dfrac{n^2}{\omega\mu}r^{n-2}\right) + c_2(n)i\left(\omega\epsilon r^{-n} - \dfrac{n^2}{\omega\mu}r^{-n-2}\right). \end{cases}$$

On voit que si l'on injecte l'une dans l'autre, on obtiendra une EDO d'ordre 2 inhomogène. L'expression de la solution de cette EDO n'est pas simple ni immédiate, nous n'avons donc pas continué l'étude dans ce cas.

F Fonctions de Bessel

Cette annexe référence quelques définitions et propriétés.
Soit J_n la fonction de Bessel de degré n de 1re espèce, Y_n la fonction de Bessel de degré n de 2e espèce, solutions de

$$z^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2}(z) + z\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}(z) + \left(z^2 - n^2\right)u(z) = 0. \tag{F.1}$$

La fonction de Hankel de degré n de 1re et 2e espèce sont définies comme

$$H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + iY_n(z), \tag{F.2}$$

$$H_n^{(2)}(z) = J_n(z) - iY_n(z). \tag{F.3}$$

On remarque que $\forall(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$

$$\begin{aligned} z_1J_n(z) + z_2Y_n(z), &= (z_1 - iz_2)J_n(z) + iz_2H_n^{(2)}(z), \\ &= (z_1 + iz_2)J_n(z) - iz_2H_n^{(1)}(z), \\ &= z_1H_n^{(2)}(z) + (z_2 + iz_1)Y_n(z), \\ &= z_1H_n^{(1)}(z) + (z_2 - iz_1)Y_n(z), \\ &= \frac{z_1 - iz_2}{2}H_n^{(1)}(z) + \frac{z_1 + iz_2}{2}H_n^{(2)}(z). \end{aligned} \tag{F.4}$$

G Harmoniques sphériques

G.1 Solutions vectorielles à divergence nulles des équations de Maxwell harmoniques

Soit Ω une sphère de rayon R centré sur l'origine. On cherche les champs solution des équations de Maxwell harmoniques.
Comme le domaine est un ouvert étoilé et que par définition, la divergence des champs est nulle, d'après le théorème de Helmholtz-Hodge (Gui et al. 2007), on peut les représenter comme issus de rotationnels.
On peut donc choisir une représentation en potentiel pour l'un et définir l'autre grâce à une équation du système de Maxwell :
$\exists \vec{\Phi} \in (C^\infty(\Omega))^3$ tels que

$$\text{(G.1)} \qquad \begin{cases} \vec{E} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{\Phi}, \\ \vec{\mathcal{H}} &= -\dfrac{\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{\Phi}}{ik\eta}, \end{cases} \qquad \text{ou alors} \qquad \begin{cases} \vec{\mathcal{H}} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{\Phi}, \\ \vec{E} &= \dfrac{\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{\Phi}}{ik\eta^{-1}}. \end{cases}$$

Dans le domaine extérieur, les constantes k, η sont k_0 et η_0. Une solution du problème général est alors une combinaison linéaire des deux problèmes ci-dessus.
On utilise alors l'équation de Maxwell restante

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{\Phi} = k^2 \vec{\nabla} \wedge \vec{\Phi}.$$

Puisque $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} V \equiv 0$ et que $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = -\Delta \vec{V} + \vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$, le potentiel $\vec{\Phi}$ doit être solution de

$$\text{(G.2)} \qquad \vec{\nabla} \wedge (\Delta \vec{\Phi} + k^2 \vec{\Phi}) = 0.$$

On choisit $\vec{\Phi}$ comme un vecteur radial : $\vec{\Phi} = r\Psi \vec{e}_r$ (Bohren et al. 2004, p. 84).
On va alors montrer que Ψ doit satisfaire à l'équation de Helmholtz scalaire.

Rappel : dans la base sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$, pour un vecteur $\vec{V}$ et un scalaire Ψ, on a

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\Psi &= \frac{\partial \Psi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Psi}{\partial \phi}\vec{e}_\phi, \\ \Delta\Psi &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2}, \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{V} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta V_\phi) - \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi}\right)\vec{e}_r \dots \\ &\quad + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\phi)\right)\vec{e}_\theta \dots \\ &\quad + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\phi. \end{aligned}$$

En développant les calculs, on obtient

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{\Phi} - k^2\vec{\Phi} = \left(\frac{1}{r\sin\theta}\left(-\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\right) - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2}\right) - k^2\Psi\right)\vec{e}_r \dots$$

$$+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)\right)\vec{e}_\theta\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Psi}{\partial\phi}\right)\right)\vec{e}_\phi.$$

En définitive, nous avons dans tout Ω :

$$\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}\wedge\vec{\Phi}-k^2\vec{\Phi}\right)=0\ \vec{e}_r+\left(-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\Delta\Psi+k^2\Psi\right)\right)\vec{e}_\theta+\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\Delta\Psi+k^2\Psi\right)\right)\vec{e}_\phi$$
$$0=-\vec{\nabla}\wedge\left(\left(\Delta\Psi+k^2\Psi\right)\vec{r}e_r\right)$$

On voit donc que si on a Ψ solution l'équation de Helmholtz homogène (G.3) alors $\vec{\Phi}:=r\Psi\vec{e_r}$ satisfait (G.2)

$$\Delta\Psi+k^2\Psi=0\quad\text{dans }\Omega. \tag{G.3}$$

Et alors on obtient des solutions du problème de Maxwell grâce aux formulations en potentiels (G.1).

G.2 Solutions du problème de Helmholtz dans la sphère

Nous cherchons une solution de l'équation de Helmholtz (G.3) dans le cas où Ω est la sphère unité. Par séparation des variables, nous allons exhiber des solutions fondamentales appelées harmoniques sphériques.
Soient $k\in\mathbb{C},\Omega=B(0,1),\Omega^c=\mathbb{R}^3\backslash\overline{\Omega}$.
Le Laplacien s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\Delta\Psi:=\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}\right).$$

G.2.1 Solution particulière de Helmholtz par séparation des variables

Hypothèse G.1. *On suppose que l'on peut écrire* $\Psi(r,\theta,\phi):=f(r)g(\theta)h(\phi)$.

Proposition G.2.

$$\forall m\in\mathbb{Z},\quad h(\phi)=e^{im\phi}. \tag{G.4}$$

Démonstration. On note $f'=\frac{\partial f}{\partial r},g'=\frac{\partial g}{\partial\theta},h'=\frac{\partial h}{\partial\phi}$. On omettra les dépendances en r,θ,ϕ dans f,g,h pour alléger les notations.
L'équation de Helmholtz s'écrie à l'intérieur [1] de la sphère :

$$\Delta\Psi+k^2\Psi=gh\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2f'}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{fh}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin(\theta)g')+\frac{fg}{\sin^2(\theta)}h''\right)+k^2fgh \tag{G.5}$$
$$=0\ \forall(r,\theta,\phi). \tag{G.6}$$

1. Le cas extérieur est analogue en changeant k pour k_0.

On suppose que $\frac{r^2\sin^2(\theta)}{f(r)g(\theta)h(\phi)}$ ne peut pas s'annuler. Alors on multiplie l'équation de Helmholtz par ce terme pour faire apparaître 2 termes dépendant de variables différentes : un terme variant selon (r), l'autre selon (θ,ϕ).

$$\frac{r^2}{fgh}\left(\Delta\Psi+k^2\Psi\right)=\left(\frac{1}{f}\frac{\partial r^2 f'}{\partial r}+(kr)^2\right)+\left(\frac{1}{\sin(\theta)g}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin(\theta)g')+\frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{h''}{h}\right),$$
$$0=R(r)+\Theta(\theta,\phi).$$

Chaque terme doit donc être égal à une constante dont la somme sera nulle. En séparent les dépendances en θ et ϕ dans Θ, on trouve que chaque terme est aussi constant :

$$\exists z_h\in\mathbb{C},\ \frac{h''}{h}=z_h^2\Rightarrow h(\phi)=e^{z_h\phi}.$$

De plus, par définition du repère sphérique, $h(\phi)$ 2π-périodique :

$$h(\phi)=h(\phi+2\pi)\Leftrightarrow e^{z_h 2\pi}=1\Rightarrow\forall m\in\mathbb{Z},z_h=im.$$

□

Proposition G.3. *$\forall m\in\mathbb{Z},\forall\nu\in\mathbb{C}$, soit $\mathbb{P}_\nu^m$ la fonction de Legendre associée. Alors*

$$g(\theta):=\mathbb{P}_\nu^m(\cos\theta). \tag{G.7}$$

Démonstration. En injectant h dans l'équation de Helmholtz normalisée par un facteur $\frac{r^2}{fgh}$ on obtient

$$\frac{r^2}{fgh}\left(\Delta\Psi+k^2\Psi\right)=\left(\frac{1}{f}\frac{\partial r^2 f'}{\partial r}+(kr)^2\right)+\left(\frac{1}{g\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin(\theta)g')-\frac{m^2}{\sin^2(\theta)}\right),$$
$$0=R(r)+A(\theta).$$

$A(\theta)$ est donc une constante :

$$\exists A\in\mathbb{C},\frac{1}{g\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial g}{\partial\theta}\right)\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}=A.$$

On multiplie alors cette expression par g

$$\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial g}{\partial\theta}\right)\right)+\left(-A-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)g=0.$$

Dans la littérature Abramowitz et al. 1964, on fait apparaître "l'équation différentielle associée de Legendre" car il existe $\nu\in\mathbb{C},-A=\nu(\nu+1)$. Des solutions de ce problème sont les fonctions associées de Legendre du 1er type, notées $\mathbb{P}_\nu^m(\cos\theta)$
D'après Bohren et al. 2004, p. 84 (Abramowitz et al. 1964, p. 1264), $\nu\in\mathbb{N},n\geq m$. On pose alors $n=\nu$.

□

Proposition G.4. *Soit j_n (resp. h_n la fonction de Bessel (resp. Hankel) d'ordre n.*

$$f(r) := \begin{cases} j_n(kr) & \text{dans } \Omega, \\ h_n(k_0 r) & \text{dans } \Omega^c. \end{cases} \tag{G.8}$$

Démonstration. On normalise l'équation de Helmholtz en remplaçant les derniers termes par la constante exhibée précédemment.

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{gh}\left(\Delta\Psi + k^2\Psi\right) &= 0, \\ &= \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 f'\right) + \left((kr)^2 - n(n+1)\right) f. \end{aligned}$$

On voit alors apparaître l'équation de Bessel d'ordre $n + 1/2$ dont des solutions linéairement indépendantes sont les fonctions de Bessel d'ordre $n + 1/2$ du 1er type $J_{n+1/2}$ et du 2e type $Y_{n+1/2}$, (Bohren et al. 2004, p. 86, Morse et al. 1953, p. 1465). À partir de ces dernières, on définit les fonctions de Bessel sphérique j_n et y_n

$$j_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+1/2}(kr), \qquad y_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} Y_{n+1/2}(kr).$$

Lorsque r tend vers 0, les $y_n(r)$ tendent vers l'infini. On présente aussi comme solution une combinaison linéaire de ces deux solutions : les fonctions de Bessel sphérique du 3e type h_n :

$$h_n(kr) = j_n(kr) - i y_n(kr).$$

Les h_n sont aussi singulières à l'origine pour tout n. On choisit alors de prendre alternativement l'une ou l'autre selon le domaine. □

G.2.2 Solutions scalaires de l'équation de Helmholtz sur la sphère

On définit les harmoniques sphériques comme les fonctions $Y_n^m = C(m,n) e^{im\phi} \mathbb{P}_n^m(\cos\theta)$ avec $C(m,n)$ tel que

$$\int_S Y_{m,n} \overline{Y_{p,\tau}} ds = \delta_m^p \delta_n^\tau.$$

D'après J.-C. Nédélec 2001, p. 24, $C(m,n) = (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}}$.

De fait, ces fonctions forment une base des fonctions L_2 sur la sphère unité solution de l'équation de Helmholtz : soit $f(\theta,\phi) \in L_2(S)$ solution de $\Delta f + k^2 f = 0$ alors

$$\begin{aligned} f(\theta,\phi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} f_{m,n} Y_{m,n}(\theta,\phi), \\ f_{m,n} &= \int_S f(\theta,\phi) Y_{m,n}(\theta,\phi) ds. \end{aligned} \tag{G.9}$$

G.2.3 Solutions scalaires de l'équation de Helmholtz dans $\mathbb{R}^3$

On peut étendre ces solutions à tout l'espace pour obtenir une solution pour un champ scalaire .

Tout champ scalaire Ψ solution de l'équation de Helmholtz s'écrit dans $\Omega \cup \Omega^c$:

$$\Psi(r,\theta,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} a_{m,n} \Psi_{m,n}(r,\theta,\phi) \tag{G.10}$$

$$\Psi_{m,n}(r,\theta,\phi) = z_n(r) Y_{m,n}(\theta,\phi) \tag{G.11}$$

$$a_{m,n} = \int_S \Psi(1,\theta,\phi) Y_{m,n}(\theta,\phi) ds$$

$$z_n(r) = \begin{cases} j_n(kr) & \text{dans } \Omega \ , \\ h_n(k_0 r) & \text{dans } \Omega^c. \end{cases} \tag{G.12}$$

H Courbes de Hoppe et al. 1995

Cette section référence les résultats de HOPPE et al. 1995.
Dans ce livre, la condition d'impédance est de la forme $\vec{\hat{E}}_t = \hat{\mathfrak{Z}}\vec{\hat{\mathcal{H}}}_t$, alors que dans cette thèse, la condition d'impédance est de la forme $\vec{\hat{E}}_t = \hat{\mathbf{Z}}\vec{\hat{J}}_t$.
La relation entre les deux matrices est

$$\hat{\mathfrak{Z}} = \hat{\mathbf{Z}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{H.1}$$

La figure H.1 représente la partie imaginaire de la matrice d'impédance pour un plan infini. La courbe *Exact* correspond à la matrice, *SIBC* à Leontovich, *Polynomial* à la CIOE CI4 et *Ratio* à la CIOE CI3.

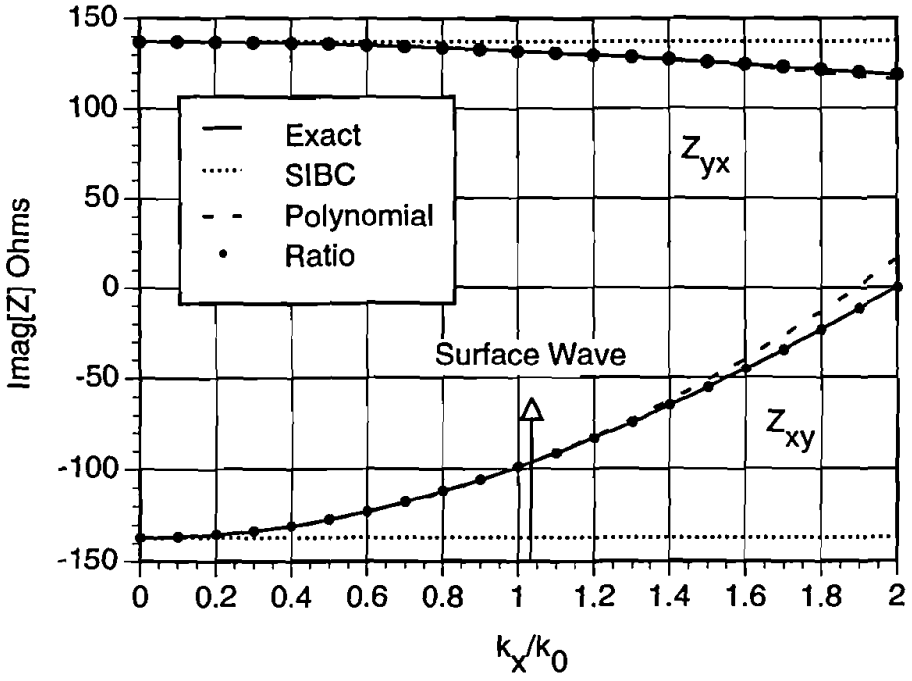


Figure 3.4: Impedances for a planar dielectric coating with $\epsilon_r = 4.0$, $\mu_r = 1.0$, and $d = 0.05\lambda_0$.

FIGURE H.1 – Courbes de la page 33 de Hoppe & Rahmat-Samii 1995

La figure H.2 représente la partie imaginaire de la matrice d'impédance pour un cylindre. La courbe *Exact* correspond à la matrice, *HOIBC Planar* à la CIOE CI3 et *HOIBC Curvature* à la CIOE CI6.

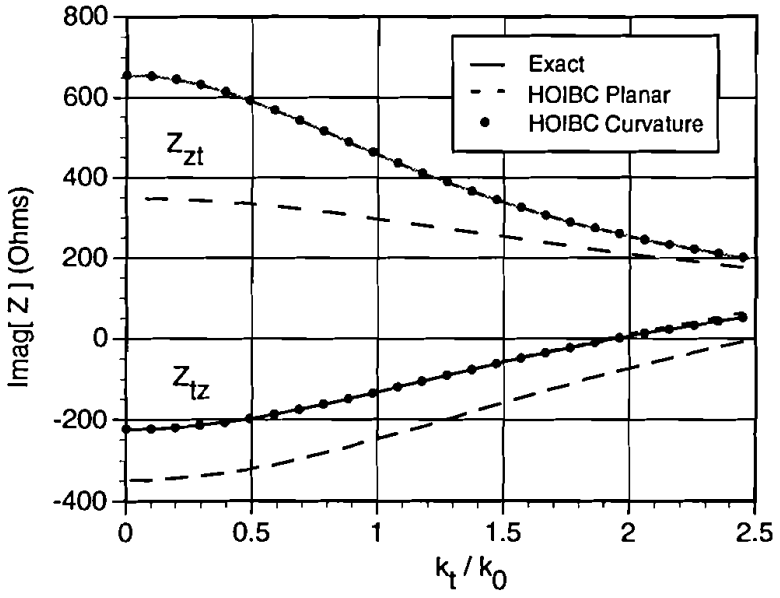


Figure 4.14: Impedance terms for a curved dielectric coating with $a = 0.1\lambda_0$, $d = 0.075\lambda_0$, $\epsilon_r = 6.0$, and $\mu_r = 1.0$.

FIGURE H.2 – Courbes de la page 62 de Hoppe & Rahmat-Samii 1995

I Espaces $\mathrm{H_{div}}$ et $\mathrm{H_{rot}}$

Ces espaces ont été étudiés par J. C. NÉDÉLEC 1980.
Nous rappelons dans cette annexe, les résultats principaux et les relations de compatibilité pour des fonctions de bases associées à ces espaces $\mathrm{H_{div}}(\Gamma)$ et $\mathrm{H_{rot}}(\Gamma)$.
Soit Γ une surface fermée bornée régulière de $\mathbb{R}^3$. Soit Γ_h une approximation de Γ par un maillage triangulaire, on désigne notamment un triangle de Γ_h par T.

Définition I.1. *Pour tout $T \in \Gamma_h$, soit $\phi_{|T}$ une fonction intégrable sur T alors on définit la notion de fonction intégrale sur Γ_h, la fonction ϕ_h telle que*

$$\int_{\Gamma_h} \phi_h \mathrm{d}\Gamma_h = \sum_{T\in\Gamma_h} \int_T \phi_{|T} \mathrm{d}T.$$

Définition I.2. *On dit que $\phi_h \in L^2(\Gamma_h)$ si et seulement si $\phi_{|T} \in L^2(T)$ pour tout $T \in \Gamma_h$.*

I.1 $\mathrm{H_{div}}$

Une autre référence est celle du chapitre 5 du cours de BENDALI 2014.

Définition I.3. *On dit que $\vec{\Psi}_h \in \mathrm{H_{div}}(\Gamma_h)$ si et seulement si $\vec{\Psi}_{|T} \in \mathrm{H_{div}}(T)$ pour tout $T \in \Gamma_h$ Alors on définit sous forme faible $\vec{\nabla}_s \cdot \vec{\Psi}_h$. Soit $\phi \in C^1(\Gamma)$*

$$\left\langle \vec{\nabla}_s \cdot \vec{\Psi}_h, \phi \right\rangle = -\sum_{T\in\Gamma_h} \int_T \vec{\Psi}_{|T} \cdot \vec{\nabla}_s \phi \mathrm{d}T.$$

Une définition équivalente est donnée par BENDALI 2014, eq. 5.3.

Définition I.4. *On dit que* $\vec{\Psi}_h \in \mathrm{H}_{\mathrm{div}}(\Gamma_h)$ *si et seulement s' il existe* $\psi \in L^2(\Gamma)$ *telle que pour toute* $\phi \in C^1(\Gamma)$

$$\left\langle \vec{\nabla}_s \cdot \vec{\Psi}_h, \phi \right\rangle = \int_\Gamma \psi\phi \mathrm{d}\Gamma.$$

On déduit la relation de compatibilité $\mathrm{H}_{\mathrm{div}}$ suivante (J. C. Nédélec 1980, Lemme. 8).

Proposition I.5. *Soit* $\vec{\Psi}$ *tel que* $\vec{\Psi}_{|T}$ *soit régulier pour tout* $T \in \Gamma_h$.
Alors $\vec{\Psi} \in \mathrm{H}_{\mathrm{div}}(\Gamma_h)$ *si et seulement si pour toute arête* v_j *séparant les triangles* T_j^g *et* T_j^d *où* $\vec{\nu}_j$ *est le vecteur unitaire sortant du triangle* T_j^g *vers* T_j^d, *on a*

$$\left(\vec{\Psi}_{|T_j^g} - \vec{\Psi}_{|T_j^d}\right) \cdot \vec{\nu}_j = 0.$$

Démonstration. Cela se démontre grâce aux formules de Green pour la divergence surfacique (voir Bladel 2007, eq. (A3.47)) en remarquant que la surface Γ_h est fermée et qu'un triangle possède toujours une arête en commun avec un autre.

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{\nabla}_s \cdot \vec{\Psi}_h, \phi \right\rangle &= -\sum_{T\in\Gamma_h} \int_T \vec{\Psi}_{|T} \cdot \vec{\nabla}_s \phi \mathrm{d}T, \\
&= \sum_{T\in\Gamma_h} \int_T \vec{\nabla}_s \cdot \vec{\Psi}_{|T} \phi \mathrm{d}T - \sum_{T\in\Gamma_h} \int_{\partial T} \vec{\Psi}_{|T} \cdot \vec{\nu}_T \phi \mathrm{d}\gamma, \\
&= \int_\Gamma \psi\phi \mathrm{d}\Gamma - \sum_{T\in\Gamma_h} \int_{\partial T} \vec{\Psi}_{|T} \cdot \vec{\nu}_T \phi \mathrm{d}\gamma, \\
&= \int_\Gamma \psi\phi \mathrm{d}\Gamma - \sum_{j=1}^{N_{vj}} \int_{v_j} \left(\vec{\Psi}_{|T_j^g} - \vec{\Psi}_{|T_j^d}\right) \cdot \vec{\nu}_j \phi \mathrm{d}\gamma.
\end{aligned}$$

□

I.2 $\mathrm{H}_{\mathrm{rot}}$

L'espace $\mathrm{H}_{\mathrm{rot}}$ a déjà été étudié par J. C. Nédélec 1980, Lemme. 6. Nous rappelons les résultats de compatibilité et leurs démonstrations.

Définition I.6. *On dit que* $\vec{\Psi}_h \in \mathrm{H}_{\mathrm{rot}}(\Gamma_h)$ *si et seulement si* $\vec{\Psi}_{|T} \in \mathrm{H}_{\mathrm{rot}}(T)$ *pour tout* $T \in \Gamma_h$.
Alors on définit sous forme faible $\vec{\nabla}_s \wedge \vec{\Psi}_h$. *Soit* $\phi \in C^1(\Gamma)$,

$$\left\langle \vec{n}_\Gamma \cdot \vec{\nabla}_s \wedge \vec{\Psi}_h, \phi \right\rangle = -\sum_{T\in\Gamma_h} \int_T \vec{\Psi}_{|T} \cdot \left(\vec{n}_T \wedge \vec{\nabla}_s \phi\right) \mathrm{d}T.$$

On déduit la relation de compatibilité $\mathrm{H}_{\mathrm{rot}}$ suivante.

Proposition I.7. *Soit* $\vec{\Psi}$ *tel que* $\vec{\Psi}_{|T}$ *soit régulier pour tout* $T \in \Gamma_h$.
Alors $\vec{\Psi} \in \mathrm{H}_{\mathrm{rot}}(\Gamma_h)$ *si et seulement si pour toute arête* v_j *séparant les triangles* T_j^g *et* T_j^d *où* $\vec{\nu}_j$ *est le vecteur unitaire sortant du triangle* T_j^g *vers* T_j^d, *et* $\vec{\tau}_j = \vec{n}_T \wedge \vec{\nu}_j$ *on a*

$$\left(\vec{\Psi}_{|T_j^g} - \vec{\Psi}_{|T_j^d}\right) \cdot \vec{\tau}_j = 0.$$

De même que pour $\mathrm{H}_{\mathrm{div}}$, cela se démontre grâce aux formules de Green pour le rotationnel surfacique (voir Bladel 2007, eq. (A3.57)) en remarquant que la surface Γ_h est fermée et qu'un triangle possède toujours une arête en commun avec un autre.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{n}_\Gamma \cdot \vec{\nabla}_s \wedge \vec{\Psi}_h, \phi \right\rangle &= -\sum_{T\in\Gamma_h} \int_T \vec{\Psi}_{|T} \cdot \left(\vec{n}_T \wedge \vec{\nabla}_s \phi \right) \mathrm{d}T, \\
&= \sum_{T\in\Gamma_h} \int_T \vec{n}_T \cdot \vec{\nabla}_s \wedge \vec{\Psi}_{|T} \phi \mathrm{d}T - \sum_{T\in\Gamma_h} \int_{\partial T} \vec{\Psi}_{|T} \cdot \left(\vec{n}_T \wedge \vec{\nu}_T \right) \phi \mathrm{d}\gamma, \\
&= \int_\Gamma \psi\phi \mathrm{d}\Gamma - \sum_{T\in\Gamma_h} \int_{\partial T} \vec{\Psi}_{|T} \cdot \vec{\tau}_j \phi \mathrm{d}\gamma, \\
&= \int_\Gamma \psi\phi \mathrm{d}\Gamma - \sum_{j=1}^{N_{vj}} \int_{v_j} \left(\vec{\Psi}_{|T_j^g} - \vec{\Psi}_{|T_j^d} \right) \cdot \vec{\tau}_j \phi \mathrm{d}\gamma.
\end{aligned}$$

□

Références

Abramowitz, M. et I. A. Stegun (1964). « Handbook of Mathematical Functions : With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables ». Courier Corporation. 1078 p. isbn : 978-0-486-61272-0 (cf. p. 80, 82, 102, 106, 148).

Aubakirov, A. (2014). « Electromagnetic scattering problem with higher order impedance boundary conditions and integral methods ». Thèse de doct. Cergy-Pontoise. url : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01017256 (cf. p. 2, 11, 42, 49, 67, 137).

Bendali, A. (2014). « Equations Intégrales en Electromagnétisme ». Cours. Toulouse : Insa. url : http://www.math.univ-toulouse.fr/~abendali/polyelec1314.pdf (cf. p. 122, 152).

Bendali, A., M. B. Fares et J. Gay (1999). « A boundary-element solution of the Leontovitch problem ». *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 47.10, p. 1597-1605. issn : 0018-926X. doi : 10.1109/8.805905 (cf. p. 125).

Bladel, J. G. V. (2007). « Electromagnetic Fields ». John Wiley & Sons. 1171 p. isbn : 978-0-471-26388-3 (cf. p. 15, 23, 153, 154).

Bohren, C. F. et D. R. Huffman (2004). « Absorption and scattering of light by small particles ». OCLC : 254937169. Weinheim : Wiley-VCH. 530 p. (cf. p. 146, 148, 149).

Bowman, F. (1958). « Introduction to Bessel functions ». Dover Publications. 164 p. isbn : 978-0-486-60462-6 (cf. p. 79).

Brezis, H. (1996). « Analyse fonctionelle : Théorie et applications ». 5. tirage. Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise. OCLC : 34953397. Paris : Masson. 233 p. isbn : 978-2-225-77198-9 (cf. p. 18).

Cessenat, M. (1996). « Mathematical Methods in Electromagnetism : Linear Theory and Applications ». T. 41. Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences. WORLD SCIENTIFIC. doi : 10.1142/2938. url : http://www.worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/2938 (cf. p. 6, 7, 15, 16, 36, 43).

Cheng, D., Y. Zhao et W. Lin (1993). « Spectral impedance boundary condition (SIBC) method for a spherical perfect electric conductor (PEC) with an uniform biisotropic coating ». *Journal de Physique III* 3.9, p. 1861-1870. ISSN : 1155-4320, 1286-4897. DOI : 10.1051/jp3:1993246. URL : http://www.edpsciences.org/10.1051/jp3:1993246 (cf. p. 104).

DLMF (2019). « NIST Digital Library of Mathematical Functions ». F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller, et B. V. Saunders. URL : http://dlmf.nist.gov/ (cf. p. 61, 80, 82, 102, 106).

Gui, Y. F. et W.-B. Dou (2007). « A Rigorous and Completed Statement on Helmholtz Theorem ». *Progress In Electromagnetics Research* 69, p. 287-304. ISSN : 1070-4698. DOI : 10.2528/PIER06123101. URL : http://www.jpier.org/PIER/pier.php?paper=06123101 (cf. p. 146).

Hoppe, D. J. et Y. Rahmat-Samii (1994). « Higher order impedance boundary conditions applied to scattering by coated bodies of revolution ». *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 42.12, p. 1600-1611. ISSN : 0018-926X. DOI : 10.1109/8.362814 (cf. p. 11, 78).

Hoppe, D. J. et Y. Rahmat-Samii (1995). « Impedance boundary conditions in electromagnetics ». Washington, DC : Taylor & Francis. 176 p. ISBN : 978-1-56032-385-3 (cf. p. 2, 42, 49, 55, 65, 88, 96, 112, 137, 151).

Kraft, D. (1988). « A software package for sequential quadratic programming ». 88-28. Braunschweig, Köln : Institut für Dynamik der Flugsysteme (cf. p. 70).

Leontovich, M. (1948). « Investigations of Propagation of Radiowaves, Part II. Moscow ». *Russia : Printing House of USSR Academy of Sciences* (cf. p. 10, 137).

Lizé, B. (2014). « Résolution directe rapide pour les éléments finis de frontière en électromagnétisme et acoustique : $\mathcal{H}$-Matrices. Parallélisme et applications industrielles ». thesis. Paris 13. URL : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01244260 (cf. p. 132).

Marceaux, O. et B. Stupfel (2000). « High-order impedance boundary conditions for multilayer coated 3-D objects ». *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 48.3, p. 429-436. ISSN : 0018-926X. DOI : 10.1109/8.841904 (cf. p. 2, 22, 24, 42, 49, 137).

Medgyesi-Mitschang, L. et J. Putnam (1985). « Integral equation formulations for imperfectly conducting scatterers ». *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 33.2, p. 206-214. DOI : 10.1109/TAP.1985.1143560 (cf. p. 123).

Morse, P. M. et H. Feshbach (1953). « Methods of theorical Physics. Volume I & II ». McGraw-Hill, New York (cf. p. 149).

Nédélec, J. C. (1980). « Mixed finite elements in R3 ». *Numerische Mathematik* 35.3, p. 315-341. ISSN : 0029-599X, 0945-3245. DOI : 10.1007/BF01396415. URL : https://link.springer.com/article/10.1007/BF01396415 (cf. p. 122, 125, 152, 153).

Nédélec, J.-C. (2001). « Acoustic and Electromagnetic Equations : Integral Representations for Harmonic Problems ». Springer Science & Business Media. 336 p. ISBN : 978-0-387-95155-3 (cf. p. 6, 14, 17, 102, 103, 122, 128, 130, 140, 149).

Raviart, P. A. et J. M. Thomas (1977). « A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems ». *Mathematical Aspects of Finite Element Methods*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, p. 292-315. ISBN : 978-3-540-37158-8 (cf. p. 124).

Sandström, S.-E. et C. Ackrén (2007). « Note on the complex zeros of $H'_\nu(x) + i\zeta H_\nu(x)$ ». *Journal of Computational and Applied Mathematics* 201.1, p. 3-7. ISSN : 0377-0427. DOI : 10.1016/j.cam.2006.01.032. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042706000720 (cf. p. 82, 106).

Senior, T. B. A. (déc. 1960). « Impedance boundary conditions for imperfectly conducting surfaces ». *Applied Scientific Research, Section B* 8.1, p. 418-436. ISSN : 0365-7140. DOI : 10.1007/BF02920074. URL : http://link.springer.com/10.1007/BF02920074 (cf. p. 10).

Senior, T. B. A. et J. L. Volakis (1995). « Approximate Boundary Conditions in Electromagnetics ». IEE Electromagtic waves series. The Institution of Electrical Engineers. 372 p. ISBN : 978-0-85296-849-9 (cf. p. 2, 8, 11).

Soudais, P. (2017). « 3D MoM computations with high order impedance boundary condition ». 2017 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA), p. 340-341. DOI : 10.1109/ICEAA.2017.8065245 (cf. p. 2, 55, 66, 129).

Stupfel, B. (2015). « Implementation of High-Order Impedance Boundary Conditions in Some Integral Equation Formulations ». *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 63.4, p. 1658-1668. ISSN : 0018-926X. DOI : 10.1109/TAP.2015.2392125 (cf. p. 2, 42, 49, 64, 123, 125, 127, 129, 130, 132, 137).

Stupfel, B. et D. Poget (2011). « Sufficient uniqueness conditions for the solution of the time harmonic Maxwell's equations associated with surface impedance boundary conditions ». *Journal of Computational Physics* 230.12, p. 4571-4587. ISSN : 0021-9991. DOI : 10.1016/j.jcp.2011.02.032. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999111001215 (cf. p. 2, 11, 14, 17, 20).

Yan, S., J. M. Jin et Z. Nie (2013). « Accuracy Improvement of the Second-Kind Integral Equations for Generally Shaped Objects ». *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 61.2, p. 788-797. ISSN : 0018-926X. DOI : 10.1109/TAP.2012.2224835 (cf. p. 129).

Yosida, K. (1995). « Functional Analysis ». Springer Science & Business Media. 522 p. isbn : 978-3-540-58654-8 (cf. p. 42).