

Approximation numérique de Systèmes Hyperboliques Non-linéaires Conservatifs ou Non-conservatifs

Gerard Gallice

▶ **To cite this version:**

Gerard Gallice. Approximation numérique de Systèmes Hyperboliques Non-linéaires Conservatifs ou Non-conservatifs. Mathématiques [math]. Université de Bordeaux I, 2002. tel-01320526

HAL Id: tel-01320526
https://cea.hal.science/tel-01320526

Submitted on 24 May 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N^o d'ordre : 221

012345667890012223345678901234566678890122345 67

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

présentée à

L'UNIVERSITE BORDEAUX I

par

Gérard GALLICE

Approximation Numérique de Systèmes Hyperboliques

Non-linéaires Conservatifs ou Non-conservatifs

Soutenue le 11 Juin 2002

Après avis des rapporteurs :

P. CHARRIER,	Professeur,	Université Bordeaux I
P. DEGOND,	Directeur de Recherches au CNRS,	Université Paul Sabatier, Toulouse
P.-A. RAVIART,	Professeur,	Ecole Polytechnique, Paris

Devant la Commission d'examen formée de :

R. ABGRALL,	Professeur,	Université Bordeaux I
P. CHARRIER,	Professeur,	Université Bordeaux I
J.P. CROISILLE,	Professeur,	Université De Metz
P. DEGOND,	Directeur de Recherches au CNRS,	Université Paul Sabatier, Toulouse
G. DUFFA,	Directeur de Recherches au CEA,	CEA-CESTA
A.-Y. LEROUX	Professeur,	Université Bordeaux I

-2002-

Table des matières

1 Introduction **5**
1.1 Publications en rapport avec ce texte 10

2 Positive and Entropy Stable Godunov-type Schemes ... **11**
2.1 Introduction 11
2.2 Godunov-type schemes and Simple Riemann solvers 13
2.3 Lagrangian Coordinates 15
2.3.1 Lagrangian gas dynamics 15
2.3.2 Lagrangian MHD 20
2.4 Eulerian coordinates case 31
2.4.1 General Systems of Conservation Laws 32
2.4.2 Construction by transformation matrices 33
2.4.3 Application to Gas Dynamics and MHD 34
2.4.4 Construction by canonical transformation of intermediate states 36
2.5 MHD simple Riemann solvers with two intermediate states 40
2.5.1 HLLC-type scheme 41
2.5.2 Entropic scheme 42
2.6 Conclusion 44

3 Schémas équilibre et Solveurs de Riemann simples ... **45**
3.1 Introduction 45
3.2 Schémas de type Godunov 46
3.2.1 Construction de solveurs de Riemann 52
3.2.2 Solutions équilibre 53
3.3 Solveurs simples 54
3.3.1 Un exemple simple 55
3.3.2 Equivalence entre solveurs simples lagrangiens et solveurs simples eulériens 58
3.3.3 Systèmes de lois de conservation généraux 58
3.3.4 Construction de solveurs simples via les états intermédiaires 59
3.4 Application à la Dynamique des gaz avec gravité 62
3.4.1 Forme eulérienne et forme lagrangienne 62
3.4.2 Solveur de type Godunov pour la forme conservative 64
3.4.3 Solveur de type Godunov pour la forme non-conservative 65

3.4.4 Solutions équilibre . . . 70
3.4.5 Applications numériques . . . 70
3.5 Application au système de Saint-Venant . . . 76
3.5.1 Forme eulérienne et forme lagrangienne . . . 76
3.5.2 Construction d'un solveur de type Godunov . . . 77
3.5.3 Solutions équilibre . . . 81
3.5.4 Applications numériques . . . 82

4 Solveurs simples pour les systèmes non-conservatifs 87
4.1 Introduction . . . 87
4.2 Schémas de type Godunov . . . 88
4.2.1 Systèmes de lois de conservation généraux . . . 88
4.2.2 Rappels sur les solveurs simples pour le cas conservatif . . . 88
4.2.3 Solveurs simples pour les systèmes non-conservatifs . . . 90
4.2.4 Un exemple simple : HLL non-conservatif . . . 92
4.2.5 Solveurs de type Roe . . . 92
4.2.6 Le modèle d'Euler quasi-neutre . . . 93
4.2.7 Le système de Powell . . . 94
4.3 Equivalence Lagrange-Euler . . . 96
4.3.1 Systèmes hyperboliques physiques . . . 97
4.3.2 Construction via les états intermédiaires . . . 97
4.4 Application . . . 101
4.4.1 Le système de Powell en coordonnées de Lagrange . . . 101
4.4.2 Construction d'une matrice de Powell discrète . . . 105
4.4.3 Construction d'une famille de solveurs de type Godunov . . . 107
4.4.4 Solveur de type HLL . . . 115
4.4.5 Solveurs simples à deux états intermédiaires . . . 115
4.4.6 Applications numériques . . . 120

5 Perspectives 131

Chapitre 1

Introduction

Les travaux présentés dans ce document s'inscrivent dans le cadre de la modélisation physique et numérique ainsi que du développement de logiciels de simulation d'écoulements complexes compressibles et couplés ou non avec des effets de champ magnétique. Les difficultés rencontrées proviennent d'une part de la prise en compte de phénomènes physiques de plus en plus complexes nécessitant des modèles numériques nouveaux et d'autre part du contexte d'utilisation industriel de plus en plus exigeant en terme de précision et robustesse. Pour ces raisons il est devenu nécessaire que les outils de simulation soient fondés le plus possible sur des techniques numériques s'appuyant sur une approche rigoureuse garantissant leur robustesse et leur fiabilité.

De façon générale, la simulation d'écoulements magnétisés ou non passe avant tout par la résolution numérique de systèmes hyperboliques non-linéaires représentés essentiellement ici par les systèmes de la Dynamique des gaz et de la Magnétohydrodynamique (MHD). Les travaux présentés ici sont donc le résultat de plusieurs années d'étude concernant les systèmes hyperboliques non-linéaires et leur résolution numérique. Initialement, les premiers travaux de l'auteur dans ce domaine portèrent sur la formulation du problème aux limites pour de tels systèmes. Dans [D-G1, D-G2], des résultats d'existence dans un cadre général et d'unicité pour la Dynamique des gaz isentropique sont obtenus. Ces travaux sont prolongés dans [GAL0] pour un problème de physique des plasmas constitué par le système d'Euler-Poisson. Plus tard, dans le but de simuler l'écoulement d'un plasma au sein d'un commutateur à ouverture (POS), l'auteur s'est intéressé à la résolution numérique des équations de la MHD, modèle complexe régissant l'écoulement d'un fluide ionisé soumis à l'action d'un champ magnétique. Le schéma de Roe ayant connu un succés grandissant au cours des années 80 et au-delà, l'extension de celui-ci pour le système de la MHD a été réalisée en une dimension d'espace [CG], et dans [B-G], le cas d'un modèle bi-température à plusieurs espèces a été traité.
En réalité, les travaux présentés dans ce document sont dus en grande partie aux premières expériences numériques réalisées avec le schéma de Roe pour la MHD, qui dans certains cas s'avérèrent délicates, ce schéma n'étant pas toujours très robuste. Cependant, bien qu'au départ motivés par la seule simulation numérique de phénomènes MHD, ils offrent aujourd'hui un éventail plus large d'applications et plus précisément s'appliquent à une palette plus grande de systèmes hyperboliques. Les travaux abordés dans ce document se déclinent en effet en trois parties selon le type de système traité. La première partie concerne la résolution numérique de

systèmes hyperboliques homogènes. Une classe de solveurs de Riemann est caractérisée dans ce cadre-là et des solveurs entropiques et positifs sont développés pour les cas particuliers de la Dynamique des gaz et de la MHD. La deuxième partie concerne les systèmes hyperboliques non-linéaires avec terme source. On caractérise pour ceux-ci la classe des solveurs simples. Le problème crucial des solutions numériques d'équilibre est abordé aussi. Des solveurs équilibre entropiques sont développés pour la Dynamique des gaz avec gravité ainsi que pour le système de Saint Venant [GAL10]. Enfin, dans la dernière partie on aborde la résolution numérique des systèmes non-conservatifs. On définit pour ceux-ci la classe des solveurs simples et on fournit plusieurs solveurs entropiques pour l'exemple du système de Powell pour la MHD. Dans chacune des trois parties, un premier fil conducteur est suivi, à savoir construire de la façon la plus simple possible un solveur de Riemann. Cette idée donne lieu à la notion de solveur simple. D'autre part, les applications visées sont toutes des applications physiques, au sens où les systèmes hyperboliques associés dérivent tous de la mécanique des fluides et possèdent donc des propriétés structurelles remarquables. En particulier, ces systèmes possèdent à la fois une version dans un système de coordonnées eulériennes et une version dans un système de coordonnées lagrangiennes. Le deuxième fil conducteur est alors la transposition du cadre continu au cadre discret de la dualité entre formulation lagrangienne et formulation eulérienne. En pratique, une correspondance biunivoque entre les solveurs pour la forme eulérienne et les solveurs pour la forme lagrangienne est établie. Celle-ci est réalisée dans tous les cas moyennant essentiellement la satisfaction d'une propriété appelée (H1) dans la suite ce document.

Comme cela a été précisé plus haut, la première partie traite de la résolution numérique des systèmes hyperboliques non-linéaires homogènes. L'ingrédient essentiel pour construire un schéma numérique pour ce type de systèmes est la notion de solveur de Riemann. Historiquement, le premier schéma numérique reposant sur la notion de problème de Riemann est le schéma de Godounov [GODU]. Ce schéma étant complexe à mettre en oeuvre, on lui a donc cherché très tôt des alternatives. Il en existe deux principales : les schémas flux vector splitting (FVS) et les schémas flux difference splitting (FDS). Les schémas FVS comme ceux de Steger-Warming [S-W], Van Leer [VLEER2] ou Liou [LIOU2] (schéma AUSM et AUSM+) sont en général plus dissipatifs que les schémas FDS. La plupart des schémas FDS reposent sur la notion de solveur de Riemann approché qui est étudiée en détail dans Godlewski-Raviart [RAV]. Dans cette famille de schéma on peut citer les travaux de Roe [ROE] sur le schéma de Roe, Harten [HY, YEE1, HLL] sur le schéma HLLE et sur le passage à l'ordre 2, Toro [TORO] sur le schéma HLLC. On citera aussi les travaux de Despres [B-D] qui a développé des schémas entropiques pour la classe des systèmes à flux d'entropie nul, les travaux de Bouchut [BOUCHUT] sur une famille de schémas cinétiques et [CGP] pour les schémas de relaxation. Enfin, les schémas polynomiaux de [DRPV] fournissent un bon exemple de schémas robustes et faciles à implémenter.

De par sa simplicité de mise en oeuvre et sa faible dissipation numérique, ainsi que par l'immense succés qu'il a connu dans les années 80-90, le schéma de Roe a été pour nous un bon candidat dans le cadre d'applications MHD [CG, GAL8]. Toutefois, la simulation de machines à plasma (POS, Z-Pynch), nécessitait de prendre en compte des zones de très faible densité baignées dans un champ magnétique intense, conduisant ainsi à une disproportion énorme entre l'énergie interne du fluide et la somme des énergies cinétique et magnétique. Cette disproportion a bien souvent pour conséquence que les densités ou énergies internes calculées avec la plupart des schémas, y compris celui de Roe, peuvent alors devenir négatives. On dit alors que le schéma

n'est pas positivement conservatif, ou plus simplement positif. En pratique, ce phénomène est beaucoup plus crucial pour la MHD que pour la Dynamique des gaz, pour lequel il était déjà bien connu. Dans ce cadre-là, l'adjonction au schéma d'une correction d'entropie [HAR] permet de surmonter le problème. Une approche plus rigoureuse est aussi fournie dans [DUB] où un schéma de Roe positif est construit. Un autre inconvénient bien connu du schéma de Roe est son caractère non-entropique, ce qui signifie qu'en pratique il peut conduire à des solutions numériques non physiques. Ce sont ces deux défauts majeurs qui ont motivé la première partie de ce document. En effet, on s'y attache à construire des solveurs de Riemann positifs et entropiques. Evidemment, l'idée est de réaliser ce cahier des charges de la façon la plus simple possible. Les candidats les plus naturels étant ceux dont les états intermédiaires sont constants, ceci nous a conduit à considérer la famille de solveurs simples entropiques dont la caractérisation est immédiate [GAL2, GAL4]. Après cette première étape, rappelant que les systèmes qui nous intéressent en pratique dans les applications se présentent indifféremment sous une forme eulérienne ou lagrangienne, nous avons généralisé l'idée déjà présente dans [GAL8] d'établir une construction systématique de solveurs de Riemann de l'une des deux formes à l'aide des solveurs de l'autre forme. Cette construction a été réalisée de deux façons différentes : la première établit une correspondance entre les sauts des états intermédiaires de chacune des deux formes et généralise celle établie dans [GAL8] pour les schémas de Roe ; la deuxième réalise une correspondance entre les états intermédiaires eux-mêmes moyennant la propriété (H1). Ce point résolu, on s'est alors attaché à développer une famille de schémas positifs et entropiques pour la Dynamique des gaz lagrangiennes. Cette famille a pour cas particulier le schéma de Roe développé par [MUNZ], et aussi le schéma entropique de [DES1]. Elle a en outre la propriété de préserver les discontinuités de contact (DDC) et vérifie la propriété (H1). De même, pour la MHD lagrangienne, une famille de solveurs à deux paramètres ϑ et C a été développée. Elle a aussi comme cas particulier le schéma de Roe de [CGR] et préserve les DDC. Ces solveurs sont entropiques pour des valeurs du paramètre C suffisamment grandes, et possèdent la propriété remarquable d'avoir un flux numérique égal au flux continu évalué en un état moyen. Cependant, ces solveurs, qui ont la même complexité que le schéma de Roe, restent côuteux puisqu'ils nécessitent de connaître six états intermédiaires. Nous avons donc cherché à construire un solveur plus simple ayant les mêmes propriétés : positivité, décroissance de l'entropie, préservation des DDC et propriété (H1). Ce cahier des charges a finalement été rempli et donne lieu à un solveur à deux états intermédiaires, efficace et robuste, induisant un solveur eulérien possédant les mêmes propriétés.

L'objet de la deuxième partie est l'étude numérique des systèmes hyperboliques avec second membre. En effet, la résolution numérique des systèmes hyperboliques non-linéaires ne concerne pas les seuls systèmes homogènes, et en pratique, il existe de nombreuses applications mettant en jeu au second membre du système considéré des termes source non nuls. Les équations d'Euler multi-espèces avec production chimique en fournissent un exemple. De même, les équations de Saint Venant modélisant les écoulements en eaux peu profondes en sont un autre exemple bien connu, et enfin on citera les équations de la Dynamique des gaz avec gravité ainsi que certains modèles d'interaction laser-matière. D'une façon générale, tout modèle physique régissant un écoulement de fluide compressible soumis à un champ de force extérieur constitue un système hyperbolique avec terme source. Dans de nombreuses situations, il n'est pas nécessaire de prêter une attention particulière au traitement numérique de ce terme source, si ce n'est éventuellement utiliser un traitement implicite si ce dernier est raide. C'est le cas pour la Dynamique des gaz

hors-équilibre chimique. Cependant, il existe d'autres situations où ce traitement est plus délicat. C'est le cas du système de Saint Venant qui suscite de nombreux travaux depuis plusieurs années. L'une des spécificités de ce système est qu'il possède des solutions stationnaires, ou encore d'équilibre, non triviales. De même, si l'on considère la Dynamique des gaz avec gravité, ces solutions d'équilibre vérifient le principe d'Archimède $\partial_z p = -\rho g$, et ne sont donc pas des solutions isobares, contrairement au cas sans gravité pour lequel les solutions stationnaires sont à pression uniforme. Un bon schéma numérique devra donc s'attacher à préserver le mieux possible ces solutions d'équilibre. On notera ici que la notion de préservation des DDC est remplacée par celle de préservation des solutions d'équilibre. D'un autre côté, un tel schéma est soumis a priori aux mêmes contraintes que dans le cas homogène, à savoir fournir des solutions entropiques et positives lorsque la question se pose. Dans cette deuxième partie, on s'est donc attaché à définir un cadre formel "propre" permettant d'appréhender tous ces points. En particulier, après avoir précisé la notion de schéma de type Godunov pour les systèmes non-homogènes, on étend la classe des solveurs de Riemann simples entropiques définie dans la première partie au cas des systèmes avec second membre. Une caractérisation élémentaire en est donnée. D'un autre côté, on remarque qu'en général les systèmes étudiés sont des systèmes physiques et possèdent une forme eulérienne et une forme lagrangienne. C'est le cas des systèmes de Saint Venant et de la Dynamique des gaz avec gravité. On a alors naturellement prolongé pour un système inhomogène quelconque, l'équivalence entre solveurs simples eulériens et solveurs simples lagrangiens moyennant la propriété (H1) à satisfaire. Cette propriété d'équivalence a permis alors de se concentrer sur le cas plus simple de la forme lagrangienne. On a alors pu construire à la fois pour le système de Saint Venant et le système de la Dynamique des gaz avec gravité, une famille de solveurs simples lagrangiens possédant les propriétés de positivité, de décroissance d'entropie ainsi que de préservation des solutions d'équilibre. Ces solveurs vérifiant en outre la propriété (H1), induisent des solveurs de Riemann eulériens ayant les mêmes propriétés.

En dernier lieu, la troisième partie aborde le problème de la simulation numérique des systèmes hyperboliques non-conservatifs. Cette étude a été guidée par la nécessité de simuler des phénomènes MHD en plusieurs dimensions d'espace à l'aide du système de Powell. Historiquement, mis en évidence pour la première fois par Godunov [GODU2] en tant que forme symétrisable du système de la MHD, ce système a été à nouveau proposé par Powell [POWELL] afin de remédier à certains défauts inhérents au système de la MHD standard. Parmi ceux-ci, on notera d'une part la non-invariance galiléenne de ce système et d'autre part la présence d'une valeur propre nulle induisant un mauvais comportement numérique. Le système de Powell a été algébriquement conçu pour vérifier l'invariance galiléenne, et la vitesse nulle a été remplaçée par la vitesse du fluide. En outre, ce système possède une entropie, qui est l'entropie habituelle de la Dynamique des gaz. L'utilisation du système de Powell n'est pas la seule approche possible pour simuler la MHD en plusieurs dimensions d'espace et de nombreuses méthodes alternatives sont possibles [BA-SP2, TOTH1, MUNZ2, CKC]. Mais, de notre point de vue, c'est celle qui réalise le meilleur compromis efficacité-complexité. En contrepartie, il présente l'inconvénient, qui n'est pas des moindres, de possèder des termes non-conservatifs. Cependant, sur le plan théorique, on a pu montrer [GAL7] que les produits non-conservatifs présents dans le système de Powell ne posent pas réellement de problème d'interprétation et ne sont en réalité que des produits de termes jamais discontinus simultanément.
L'idée de cette partie est non pas de s'intéresser au seul système de Powell, mais de le considérer

comme cas particulier de la classe des systèmes hyperboliques non-conservatifs. Plus précisément, en suivant les mêmes fils conducteurs que dans les parties précédentes, on propose un cadre "propre" pour la résolution de tels systèmes, et on introduit la classe des solveurs simples pour les systèmes non-conservatifs que l'on caractérise aisément dans le cas entropique. Plusieurs exemples de schémas développés auparavant pour des applications particulières [COR1, AB1, AB-SA, FMO] s'interprètent dans le cadre de cette approche. D'autre part, considèrant à nouveau les systèmes physiques possédant une forme lagrangienne et eulérienne, comme dans les parties précédentes on établit pour ce type de systèmes une équivalence entre solveurs simples eulériens et lagrangiens.
Revenant alors à l'étude du système de Powell, on a développé pour sa version lagrangienne, deux types de solveurs entropiques préservant les discontinuités de contact. Le premier est l'extension naturelle du solveur de Roe développé pour la MHD lagrangienne à 7 équations [CGR]. Le deuxième est un solveur à deux états élaboré dans un souci de simplicité. Ces deux solveurs satisfont la propriété (H1), ce qui a permis le développement du logiciel de simulation GHOST pour la MHD multidimensionnelle.

1.1 Publications en rapport avec ce texte

1. B. DUBROCA, G. GALLICE, *Problème mixte hyperbolique pour un système de lois de conservation monodimensionnel*, C. R. Acad. Sciences Paris, tome 306, Série I, 317-320, 1988.
2. B. DUBROCA, G. GALLICE, *Résultats d'existence et d'unicité du problme mixte pour des systèmes hyperboliques de lois de conservation scalaire*, Communication in Partial Differential Equation, 15, 1, 59-80, 1988.
3. C. COUZI, B. DUBROCA, G. GALLICE, *Détermination de l'écoulement aérodynamique autour d'un corps de rentrée à haute altitude*, Revue Scientifique et Technique de la Défense, $4^{\text{ème}}$ trimestre 1991.
4. P. CARGO, G. GALLICE, *Un solveur de ROE pour les équations de la Magnétohydrodynamique*, C.R. Acad. Paris, tome 320, Série I, 1269-1272, 1995.
5. G. GALLICE, *Matrices de Roe pour des lois de conservation générales sous forme eulérienne ou lagrangienne: application à la dynamique des gaz et à la magnétohydrodynamique*, C.R. Acad. Paris, tome 320, Série I, 1069-1072, 1995.
6. P. CARGO, G. GALLICE, P. A. RAVIART, *Construction d'une linéarisée de Roe pour les équations de la MHD idéale*, C.R. Acad. Paris, tome 323, Série I, 951-955, 1996.
7. P. CARGO, G. GALLICE, *Roe Matrices for Ideal MHD ans Systematic Construction of Roe Matrices for Systems of Conservation Laws*, Journal of Computational Physics, 136,446-466, 1997.
8. S. BRASSIER, G. GALLICE, *A Roe-scheme for the Bi-temperature Model of Magnetohydrodynamics*, Computers and Mathematics with Applications, 41 (2001), 257-267.
9. G. GALLICE, *Schémas de type Godunov entropiques et positifs préservant les discontinuités de contact*, C.R. Acad. Paris, tome 331, Série I, 149-152, 2000.
10. G. GALLICE, *Schémas de type Godunov entropiques et positifs pour la dynamique des gaz et la magnétohydrodynamique lagrangiennes*, C.R. Acad. Paris, tome 332, Série I, 1037-1040, 2001.
11. G. GALLICE, *Solveurs simples positifs et entropique pour les systèmes hyperboliques avec terme source*, C.R. Acad. Paris, tome 334, Série I, 713-716, 2002.
12. Ch. TESSIERAS, J. CLAUDEL, P. DEGOND, G.GALLICE, *Striations in the Ionosphère : Phenomenology and Numerical Simulation*, à paraître dans Chocs, Plasmas et Atmosphère
13. G. GALLICE, *Positive and Entropy Stable Godunov-type Schemes for Gas Dynamics and MHD Equations in Lagrangian or Eulerian Coordinates*, à paraître dans Numerische Mathematike

Chapitre 2

Positive and Entropy Stable Godunov-type Schemes for Gas Dynamics and MHD Equations in Lagrangian or Eulerian Coordinates

2.1 Introduction

The aim of this work is to derive positively conservative [HLLE] and entropic numerical schemes preserving contact discontinuities for gas dynamics and MHD equations for any convex equation of state. Here, by contact discontinuities, we only mean material contact discontinuities, and thus Alfven discontinuities are excluded for MHD equations. A lot of conservative schemes have been developed to solve these systems. For the gas dynamics system one can see for example [ROE], [CO-LI], [LIOU], [GRE], [MEHL], [OSHER], [PER], [S-W], [TORO], [VLEER], [VIL], [RAV] and references therein. For the MHD system, we refer to [ASLAN], [B-W], [BEZ], [CKC], [CG], [CGR], [LINDE], [PRLGZ], [XU], [ZA-CO] and references therein. Unfortunately, many of them may fail in predicting non-physical states with negative density or negative internal energy. This point has recently motivated some studies ([BA-SP], [JAN]). For instance, the original Roe scheme [ROE] has this property. Although it has been recently shown that positive Roe schemes exist [DUB], by construction Roe's scheme has the drawback to preserve unphysical stationary discontinuities (non-entropic shocks). So, we only consider entropic schemes. The Godunov scheme is the prototype of entropic schemes, but it requires the resolution of the exact Riemann problem. Conversely, the HLL scheme is easier to implement and entropy preserving, but it cannot preserve contact discontinuities. In [PER] and [KH-PE] kinetic schemes are given. They are positive and entropy preserving, but as the HLL scheme, they do not preserve contact discontinuities (see [RAV] for a review on kinetic schemes). In [KH-PE], Khobalatte and Perthame develop second order kinetic schemes having properties of positivity and entropy stability. In fact, these two properties of entropy stability and positivity are related in a simple way for an ideal gas, and if the specific volume is positive, the latter follows from the former. Indeed, it is shown

in [TADMOR] that the global entropy decay for the eulerian gas dynamics equations implies the specific entropy $p\vartheta^\gamma$ is non-decreasing, and if the specific volume ϑ is positive, the positivity of the pressure p follows. This was used in [KH-PE] and [DES1]. More recently, new schemes with nice properties have been derived. Firstly, in [B-D], a positive and entropic scheme has been developed for a general class of Lagrangian systems including gas dynamics and MHD. It is based on a flux decomposition induced by the canonical algebraic structure of the flux. Moreover, in [B-D], it is found that for gas dynamics and a well-suited choice of the numerical sound speed, the flux corresponds to the Roe flux of [MUNZ]. Otherwise, in [BOUCHUT], a general framework for kinetic BGK models is introduced. It also leads to the construction of kinetic positive and entropic schemes. In [CGP] Coquel and al. present a relaxed scheme. Finally, let us mention the study in [GRE] which shows positivity property of some FVS schemes, and proves that positive FVS schemes cannot preserve contact discontinuities.

In this paper, we only consider Godunov-type schemes. The main idea of this study is based on the following general observation: the more dissipative a scheme is, the more robust it is. This leads to the following question:
Can we construct Roe's matrices or more generally dissipation matrices having eigenvalues given a priori?
The idea is that the greater the eigenvalues, the greater the dissipation.

This paper will provide the answer to that question in a way. This will lead us to define a class of Riemann's solvers, called simple Riemann solvers, some of them having interesting properties of positivity and entropy stability.

The plan of this paper is as follows. In the second section, some recalls on Godunov-type schemes are given, and the definition of a simple Riemann solver is done. These solvers are termed as simple because they are the simplest form of a Riemann solver.
In a third section, Lagrangian coordinates are considered and Godunov-type schemes for gas dynamics or MHD equations are developed. These schemes are a natural extension of Roe's schemes but they are not exactly Roe's schemes. This enables us to prove that these schemes are positive and entropy stable for sufficiently large slopes of the associated Riemann solvers. Moreover, these schemes are exact at contact discontinuities and their numerical flux are exactly equal to the continuous flux evaluated at an average state.

In a fourth section, Eulerian coordinates are investigated. Once again, Godunov-type schemes for gas dynamics and MHD are built. They derive from the Lagrangian ones by two ways. The first one establishes a relation between the jumps of Lagrangian intermediate states and the jumps of the Eulerian intermediate states. The second one associates at each Lagrangian intermediate state V the Eulerian intermediate state $U(V)$ by the canonical transformation. Both methods lead to positive and entropy stable Godunov-type schemes in Eulerian coordinates. This approach is very natural. Indeed, for example let us consider the Godunov solver for Lagrangian coordinates. The Riemann solver obtained by the correspondence $V \to U(V)$ gives the Godunov solver in Eulerian coordinates. The same is true if we consider the shock solver of [COL-GLAZ] which leads to the Mehlman solver [MEHL] in Eulerian coordinates. Otherwise, this transformation is already used in [DUB] where an Eulerian positively conservative Roe solver is obtained from a Lagrangian one.

Finally, in the last section, we develop a two state Riemann solver for Lagrangian MHD. This solver has the properties required by the second transformation and, moreover, it preserves

contact discontinuities.

Numerical tests made by the author show that all schemes given in this paper behave well. Of course, the construction developed herein is available for all systems derived from gas dynamics or MHD. In particular, it is well-suited for multi-species gas dynamics and bi-temperature MHD models. Finally, extension to Powell [POWELL] and Janhunen [JAN] systems for multidimensionnal MHD is performed in [GAL9].

2.2 Godunov-type schemes and Simple Riemann solvers

Let us consider an hyperbolic system of the following form

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0. \tag{2.1}$$

We suppose that (2.1) has an entropy-flux pair (σ, q). So, $\sigma(U)$ is a convex function, $\nabla\sigma\nabla F = \nabla q$, and we are looking for entropic solutions satisfying [HLL]

$$\partial_t \sigma + \partial_x q(U) \leq 0. \tag{2.2}$$

In order to define conservative numerical schemes for (2.1), it is usual to consider the following Riemann problem

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0, \quad U(x,0) = \left\{ \begin{array}{lll} U_l & if & x \leq 0, \\ U_r & if & x > 0. \end{array} \right. \tag{2.3}$$

Let $W(x/t; U_l, U_r)$ be an approximation of the solution of the Riemann problem (2.3), and $(U_i^n)_{i,n}$ be a numerical approximation of (2.1) which is constant in each cell $x_{i-1/2} < x \leq x_{i+1/2}$ of a mesh $(x_{i+1/2})_i$. If Δt is the time step, we define the following scheme [HLL]

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x}\left(\int_0^{\Delta x/2} W(x/\Delta t; U_{i-1}^n, U_i^n)dx + \int_{-\Delta x/2}^0 W(x/\Delta t; U_i^n, U_{i+1}^n)dx\right). \tag{2.4}$$

Let us denote by ΔX the difference $X_l - X_r$ for any quantity X.

Definition 1. . *[HLL] $W(x/t; U_l, U_r)$ is consistent with the integral form of the conservation law (2.1) if and only if, for τ small enough*

$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} W(x/\tau; U_l, U_r)dx = \Delta x/2(U_l + U_r) - \tau\Delta F. \tag{2.5}$$

In this case, (2.4) is conservative and is called a Godunov-type scheme.
Otherwise, $W(x/t; U_l, U_r)$ is consistent with the integral form of the entropy inequality (2.2) if and only if, for τ sufficiently small

$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \sigma(W(x/\tau; U_l, U_r))dx \leq \Delta x/2(\sigma(U_l) + \sigma(U_r)) - \tau\Delta q. \tag{2.6}$$

In this case, (2.4) is called an entropic Godunov-type scheme.

Now, let us recall the following classical notion of entropic schemes.

Definition 2. *.The scheme is entropic (in a classical sense) for the entropy-flux pair (σ, q) if there exists a numerical entropy flux Q consistent with the continuous flux, i.e. satisfying $Q(U,U) = q(U)$, such that the following inequality is true for Δt small enough*

$$\sigma_i^{n+1} \leq \sigma_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(Q(U_i^n, U_{i+1}^n) - Q(U_{i-1}^n, U_i^n)). \tag{2.7}$$

Then, we have the well-known result [HLL].

Proposition 1. *. An entropic Godunov-type scheme is entropic in a classical sense.*

Now, we introduce the notion of simple Riemann solvers.

Definition 3. *. A Riemann solver W is simple if and only if it consists of (m+1) constant states $(U_k)_{k=1}^{m+1}$, separated by discontinuities of speed $(\Lambda_k)_{k=1}^m$, i.e.,*

$$W(x/t) = \begin{cases} U_1 = U_l & for \quad x/t < \Lambda_1, \\ U_k & for \quad \Lambda_{k-1} < x/t \leq \Lambda_k \\ U_{m+1} = U_r & for \quad \Lambda_m \leq x/t. \end{cases} \quad , \quad k = 2, m,$$

The solver is denoted $((U_k)_k, (\Lambda_k)_k)$.

Remark 1. *. This notion is not new since Roe [ROE], HLL [HLL] and Toro [TORO] solvers are simple Riemann solvers. Conversely, the Godunov [GODU] and Osher [OSHER] solvers are not simple Riemann solvers. In fact, simple Riemann solvers are the simplest forms of Riemann solvers.*

In the following, we denote $\delta X_k = X_{k+1} - X_k$, for any sequence $(X_k)_k$.

Simple Riemann solvers are characterized below.

Proposition 2. *.A simple Riemann solver induces a Godunov-type scheme if and only if*

$$\Delta F = \sum_{k=1}^{m} \Lambda_k \delta U_k. \tag{2.8}$$

In this case, the numerical flux is

$$H(U_l, U_r) = \frac{1}{2}(F_l + F_r - \sum_{k=1}^{m} |\Lambda_k| \delta U_k). \tag{2.9}$$

It induces an entropic Godunov-type scheme if and only if

$$\Delta q \leq \sum_{k=1,m} \Lambda_k \delta \sigma_k. \tag{2.10}$$

Proof: For any function f, one can easily check that

$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} f(W(x/\tau; U_l, U_r))dx = \Delta x/2(f_l + f_r) - \tau \sum_{k=1}^{m} \Lambda_k \delta f_k,$$

where $f_{l,r} = f(U_{l,r})$ and $f_k = f(U_k)$. Inserting this equality in (2.5), (2.6), we obtain (2.8), (2.10). The proof of (2.9) is the same as for a Roe scheme.$\diamond$

2.3 Lagrangian Coordinates

2.3.1 Lagrangian gas dynamics

The Roe matrix

We first introduce a notation. Given two conjugate real numbers α and β ($\alpha + \beta = 1$), we set for all pair (x_l, x_r), $x_\alpha = \alpha x_l + \beta x_r$.
The arithmetic average corresponds to $\alpha = 1/2$ and is denoted by x_a.

Now, let us consider the following Lagrangian system of gas dynamics

$$\partial_\tau V + \partial_m G(V) = 0, \tag{2.11}$$

where ${}^tV = (\vartheta, u_x, e)$, ${}^tG = (-u_x, p, pu_x)$, ϑ is the specific volume, u_x the fluid velocity, p the pressure, ε the specific internal energy, $e = \varepsilon + 1/2u_x^2$ the specific total energy. For an ideal gas, the internal energy is given by $\varepsilon = p\vartheta/(\gamma - 1)$ where γ is the specific heats ratio.
The system (2.11) is hyperbolic with $-C, 0, +C$ as eigenvalues, where C is the Lagrangian sound speed. For an ideal gas, C is given by $C^2 = \gamma p/\vartheta$.

For this system, Munz [MUNZ] has given a Roe matrix which takes the following form for an ideal gas

$$\overline{A}_{Munz} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -p_a/\vartheta_a & -(\gamma-1)(u_x)_a/\vartheta_a & (\gamma-1)/\vartheta_a \\ -p_a(u_x)_a/\vartheta_a & p_a - (\gamma-1)(u_x)_a^2/\vartheta_a & (\gamma-1)(u_x)_a/\vartheta_a \end{pmatrix}$$

Its eigenvalues are $-C_{ave}, 0, +C_{ave}$, with ${C_{ave}}^2 = \gamma p_a/\vartheta_a$.

Construction of a Godunov-type scheme

The Munz matrix is very simple and the corresponding Roe method very easy to implement. But unfortunately, the use of this matrix for numerically solving (2.11) can produce unphysical solutions. Generally, in order to handle this problem, it is usual to consider the HLL scheme [HLL] which is more dissipative and thus leads to positive and entropic solutions for sufficiently large slopes of the relevant Riemann solver. Here, we want to control exactly the dissipation. More precisely, we want to design a Riemann solver whose slopes are given a priori. Moreover, the Riemann solver is expected to preserve contact discontinuities. To this goal, we will use the Roe construction, but only keep the essential of this contruction. Indeed, let us recall that the Roe flux has the expression

$$H(V_l, V_r) = \frac{1}{2}(G_l + G_r - \sum_{k=1}^{m} |\Lambda_k| \phi_k R_k), \tag{2.12}$$

where the R_k are the right eigenvectors and the ϕ_k are the characteristic variables, $\phi_k = L_k \cdot \Delta V$ with L_k the left eigenvectors.
From (2.12) it is clear that in order to define the flux, we only need to know the products

$\phi_k R_k$ associated to the nonzero eigenvalues. Notice that the knowledge of the Roe matrix is not necessary.

We now begin our construction. The first step is to look for Roe's matrices whose eigenvalues are given a priori. This is a formal step which will allow us to built the products $\phi_k R_k$. In this way, let us choose a general decomposition of the pressure jump

$$\Delta p = \chi \Delta \vartheta + \xi \Delta u_x + \kappa \Delta e,$$

where the coefficients χ, ξ, κ have to be determined. If α and β are two conjugate real numbers, this leads for $\Delta(pu_x)$ to the relation

$$\Delta(pu_x) = (u_x)_\alpha \chi \Delta \vartheta + ((u_x)_\alpha \xi + p_\beta)\Delta u_x + (u_x)_\alpha \kappa \Delta e.$$

Thus, one obtains the matrix

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \chi & \xi & \kappa \\ (u_x)_\alpha \chi & (u_x)_\alpha \xi + p_\beta & (u_x)_\alpha \kappa \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

Now, by studying its characteristic polynomial $Det(\overline{A} - \lambda Id)$, the matrix $\overline{A}$ has given eigenvalues $-\overline{C}_-, 0, \overline{C}_+$ if and only if the coefficients χ, ξ, κ satisfy the following linear system depending on the parameter α

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \chi \Delta \vartheta + \xi \Delta u_x + \kappa \Delta e & = & \Delta p, \\ \xi + \kappa (u_x)_\alpha & = & \overline{C}_+ - \overline{C}_-, \\ \chi - \kappa p_\beta & = & -\overline{C}_- \overline{C}_+, \end{array} \right. \tag{2.14}$$

whose determinant is $-\left[(\alpha - 1/2)(\Delta p \Delta \vartheta + (\Delta u_x)^2) + p_a \Delta \vartheta + \Delta \varepsilon\right]$. The system (2.14) is singular for any α if and only if $\Delta p \Delta \vartheta + (\Delta u_x)^2 = p_a \Delta \vartheta + \Delta \varepsilon = 0$, relations satisfied at a shock. Thus, we have shown the result.

Proposition 3. . *Let us suppose that the states V_l, V_r are not separated by a shock. Then, one can find α so that $\overline{A}$ is a Roe matrix with $0, \pm\overline{C}_\pm$ as eigenvalues. Its right eigenvectors and characteristic variables are*

$$\begin{array}{ll} {}^tR_0 = (\kappa, 0, -\chi), & {}^tR_\pm = (-1, \pm\overline{C}_\pm, p_\beta \pm (u_x)_\alpha \overline{C}_\pm), \\ \phi_0 = \dfrac{p_\beta \Delta \vartheta - (u_x)_\alpha \Delta u_x + \Delta e}{\overline{C}_- \overline{C}_+}, & \phi_\pm = \dfrac{\Delta p \pm \overline{C}_\mp \Delta u_x}{\overline{C}_- \overline{C}_+ + (\overline{C}_\pm)^2}. \end{array} \tag{2.15}$$

This result provides an answer to the question of the introduction. Obviously, it is not always positive. Indeed, it is well-known that if the states are separated by a shock, the Roe matrix has an eigenvalue equal to the slope of this shock.

The second step consists in deriving a simple Riemann solver with expected properties. Firstly, let us note that the quantities $\phi_\pm$, $R_\pm$ given by (2.15) do not depend on the coefficients χ, ξ, κ and are always defined. This leads to define the following Riemann solver

$$W(m/\tau) = \left\{ \begin{array}{lll} V_l & & if\, m/\tau \leq -\overline{C}_-, \\ V_l^* = & V_l + \phi_- R_- & if\, -\overline{C}_- < m/\tau \leq 0, \\ V_r^* = & V_r - \phi_+ R_+ & if\, 0 < m/\tau \leq \overline{C}_+, \\ V_r & & if\, \overline{C}_+ < m/\tau. \end{array} \right. \tag{2.16}$$

This solver has exactly the same structure as that of the Roe solver and satisfies the following result.

Proposition 4. . *The solver (2.16) defines a Godunov-type scheme for the system of gas dynamics (2.11). Moreover, it preserves contact discontinuities.*

Proof: In order to show that the solver (2.16) gives a Godunov-type scheme, one has to verify the property (2.8). From (2.15), (2.16) we have

$$\begin{aligned}
&-\overline{C}_-(V_l^* - V_l) + \overline{C}_+(V_r - V_r^*) = -\overline{C}_-\phi_- R_- + \overline{C}_+\phi_+ R_+ \\
&= -\overline{C}_- \tfrac{\Delta p - \overline{C}_+\Delta u_x}{\overline{C}_-\overline{C}_+ + \overline{C}_-^{\,2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -\overline{C}_- \\ p_\beta - (u_x)_\alpha \overline{C}_- \end{pmatrix} + \overline{C}_+ \tfrac{\Delta p + \overline{C}_-\Delta u_x}{\overline{C}_-\overline{C}_+ + \overline{C}_+^{\,2}} \begin{pmatrix} -1 \\ \overline{C}_+ \\ p_\beta + (u_x)_\alpha \overline{C}_+ \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\Delta u_x \\ \Delta p \\ \Delta(pu_x) \end{pmatrix} \quad = \quad \Delta F,
\end{aligned}$$

which is exactly (2.8).
Moreover, contact discontinuities are characterized by $\Delta u_x = \Delta p = 0$, which implies $\phi_\pm = 0$, and thus $V_{l,r}^* = V_{l,r}$.$\diamond$

Thus we have constructed a family of Godunov-type schemes depending on a parameter α. Now, the question is to optimally choose this free parameter α. The simplest way to do this is given by the result below.

Proposition 5. . *Let us choose $\alpha = \overline{C}_-/(\overline{C}_- + \overline{C}_+)$. Then, the numerical flux associated to the Riemann solver (2.16) is given by*

$$H(V_l, V_r) = {}^t(-\overline{u}_x, \overline{p}, \overline{u}_x\overline{p}) \tag{2.17}$$

with

$$\begin{aligned}
\overline{u}_x &= (\overline{C}_-(u_x)_l + \overline{C}_+(u_x)_r - \Delta p)/(\overline{C}_- + \overline{C}_+), \\
\overline{p} &= (\overline{C}_+ p_l + \overline{C}_- p_r - \overline{C}_-\overline{C}_+\Delta u_x)/(\overline{C}_- + \overline{C}_+).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Proof: Let be ${}^tH(V_l, V_r) = (h_1, h_2, h_3)$. From (2.9), it is easy to show that $h_1 = -((u_x)_a + X)$, $h_2 = p_a + Y$, and $h_3 = (pu_x)_a + p_\beta X + (u_x)_\alpha Y$, with
$X = \dfrac{1}{\overline{C}_- + \overline{C}_+}(-\Delta p + \dfrac{S}{2}\Delta u_x)$, $Y = \dfrac{-1}{\overline{C}_- + \overline{C}_+}(\dfrac{S}{2}\Delta p + \overline{C}_-\overline{C}_+\Delta u_x)$ and $S = \overline{C}_+ - \overline{C}_-$. It remains only to check $h_3 = -h_1 h_2$. One has

$$\begin{aligned}
h_3 + h_1 h_2 &= (pu_x)_a + p_\beta X + (u_x)_\alpha Y - p_a(u_x)_a - (u_x)_a Y - p_a X - XY \\
&= (pu_x)_a - p_a(u_x)_a + (p_\beta - p_a)X + ((u_x)_\alpha - (u_x)_a)Y - XY \\
&= \frac{1}{4}\Delta u_x \Delta p - XY + (\alpha - \frac{1}{2})(\Delta p X - \Delta u_x Y).
\end{aligned}$$

On the other hand, it can be seen that

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\Delta u_x\Delta p - XY &= -\frac{S}{2(\overline{C}_- + \overline{C}_+)^2}(\Delta p - \overline{C}_+\Delta u_x)(\Delta p + \overline{C}_-\Delta u_x), \\
\Delta p X - \Delta u_x Y &= -\frac{1}{\overline{C}_- + \overline{C}_+}(\Delta p - \overline{C}_+\Delta u_x)(\Delta p + \overline{C}_-\Delta u_x),
\end{aligned}$$

and thus $h_3 + h_1 h_2 =$

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{S}{2(\overline{C}_- + \overline{C}_+)^2} + \frac{\alpha - 1/2}{\overline{C}_- + \overline{C}_+}\right)(\Delta p - \overline{C}_+ \Delta u_x)(\Delta p + \overline{C}_- \Delta u_x) \\ & = -(\alpha(\overline{C}_- + \overline{C}_+) - \overline{C}_-)(\Delta p - \overline{C}_+ \Delta u_x)(\Delta p + \overline{C}_- \Delta u_x)/(\overline{C}_- + \overline{C}_+)^2. \end{aligned}$$

If $\alpha = \overline{C}_-/(\overline{C}_- + \overline{C}_+)$, we obtain $h_3 + h_1 h_2 = 0$, which gives the proof.$\diamond$

Remark 2. *If the slopes $\overline{C}_-$, $\overline{C}_+$ are equal, the scheme obtained is exactly the one studied in [DES1], but is derived in a very different way. Hence, this proves that the scheme of [DES1] is a Godunov-type scheme. Moreover, as it is noted in [B-D], the Munz scheme is recovered if $\overline{C}_- = \overline{C}_+ = C_{ave}$.*

Positivity and Entropy stability

In the following paragraph, we study the properties of the simple Riemann solver (2.16) when α is chosen as in the previous proposition. Especially, it is now clear that we can construct schemes whose dissipation can be exactly tuned, and we show below that this tuning can be made in such a way that the scheme is positive and that the solver is an entropic Godunov-type solver. Similar properties of positivity and stability were derived for the second order kinetic schemes constructed by Khobalatte and Perthame in [KH-PE]. In fact, the two properties of entropy stability and positivity are simply related for an ideal gas, and if the specific volume is positive, the latter follows form the former. Indeed, it is shown in [TADMOR] that the global entropy decay for the eulerian gas dynamics equations implies the specific entropy $p\vartheta^\gamma$ is non-decreasing, and if the specific volume ϑ is positive, the positivity of the pressure p follows. This was used in [KH-PE] and [DES1]. Here, this property can be used, but for gas dynamics, we are able to give exactly the positivity conditions which are obtained by the resolution of two 2nd degree algebraic equations.

Proposition 6. *. For $\overline{C}_-$, $\overline{C}_+$ large enough, the intermediate states of (2.16) are positive (i.e. $\vartheta^*_{l,r} > 0$ and $\varepsilon^*_{l,r} > 0$).*
Moreover, if $\overline{C}_- = \overline{C}_+ = \overline{C}$, we have the following exact positivity conditions :

- *$\vartheta^*_{l,r} \geq 0$ if $\delta_{l,r} \leq 0$, or if $\delta_{l,r} > 0$ and $\overline{C} \geq \dfrac{-\Delta u_x + \sqrt{\delta_{l,r}}}{4\vartheta_{l,r}}$,*
- *$\varepsilon^*_{l,r} \geq 0$ if $\Delta_{l,r} \leq 0$, or if $\Delta_{l,r} > 0$ et $\overline{C} \geq \dfrac{2p_a \Delta u_x + \sqrt{\Delta_{l,r}}}{(\Delta u_x)^2 + 8\varepsilon_{l,r}}$,*

where $\sigma_l = 1$, $\sigma_r = -1$, $\pi_{l,r} = 4p_a - \sigma_{l,r}\Delta p$, $\delta_{l,r} = (\Delta u_x)^2 + 8\sigma_{l,r}\vartheta_{l,r}\Delta p$ and $\Delta_{l,r} = 4p^2_{l,r}(\Delta u_x)^2 - 8\sigma_{l,r}\pi_{l,r}\varepsilon_{l,r}\Delta p$.

Proof: By using the relation: $V^*_l = V_l + \phi_- R_-$, we obtain

$$\begin{aligned} \overline{C}_-{}^2 \vartheta^*_l &= \overline{C}_-{}^2 \vartheta_l + (r\overline{C}_- \Delta u_x - \Delta p)/(1+r), \\ \overline{C}_-{}^2 \varepsilon^*_l &= \overline{C}_-{}^2 \varepsilon_l + \frac{1}{2(1+r)^2}(r\overline{C}_- \Delta u_x - \pi_l)(r\overline{C}_- \Delta u_x - \Delta p), \end{aligned} \tag{2.19}$$

with $r = \overline{C}_+/\overline{C}_-$ and $\pi_l = 2(rp_l + p_r) - \Delta p$. From this, we deduce that

$$\lim_{\overline{C}_\pm \to +\infty} \vartheta_l^* = \vartheta_l, \qquad \liminf_{\overline{C}_\pm \to +\infty} \varepsilon_l^* = \varepsilon_l + \frac{(\Delta u_x)^2}{2} \liminf_{\overline{C}_\pm \to +\infty} (\frac{r}{1+r})^2, \tag{2.20}$$

which shows the positivity for $\overline{C}_-$, $\overline{C}_+$ large enough.
When $\overline{C}_- = \overline{C}_+ = \overline{C}$, equations (2.19) are two second order algebraic equations leading to the above conditions. $\diamond$

If we note that the entropy-flux for system (2.11) is equal to zero, we have the following result for entropy stability.

Proposition 7. *. Let σ be an entropy of the system. Let us assume that $\lim_{\overline{C}_\pm \to +\infty} r = r_\infty > 0$. Then, for $\overline{C}_-$, $\overline{C}_+$ large enough, the scheme is an entropic Godunov-type scheme. Moreover, if $Max(\overline{C}_-, \overline{C}_+)\Delta\tau \leq \Delta m/2$, the following cell-by-cell entropy inequality holds*

$$\sigma(V_i^{n+1}) \leq \sigma(V_i^n).$$

Proof: In order to prove the entropy stability, it is sufficient to verify that $\sigma_l^* \leq \sigma_l$ and $\sigma_r^* \leq \sigma_r$ for $\overline{C}_-$ and $\overline{C}_+$ sufficiently large. Now, it is well-known that for an ideal gas every entropy is of the form $\sigma = f(\varepsilon\vartheta^{\gamma-1})$ with f a non-increasing function. Thus, we have only to show

$$\frac{\varepsilon_l^*}{\varepsilon_l} \left(\frac{\vartheta_l^*}{\vartheta_l}\right)^{\gamma-1} \geq 1. \tag{2.21}$$

When $\Delta u_x \neq 0$, from (2.20) it is clear that for $\overline{C}_\pm$ large enough, (2.21) will be true. When $\Delta u_x = 0$, if $\Delta p = 0$, then $V_l^* = V_l$, and thus, $\sigma_l^* = \sigma_l$. Then (2.21) is true. Now, if $\Delta p \neq 0$, one has

$$\frac{\varepsilon_l^*}{\varepsilon_l} = 1 + \frac{\pi_l \Delta p}{2(1+r)^2 \varepsilon_l \overline{C}_-{}^2}, \qquad \frac{\vartheta_l^*}{\vartheta_l} = 1 - \frac{\Delta p}{(1+r)\vartheta_l \overline{C}_-{}^2}.$$

From this, we deduce that

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_l^*}{\varepsilon_l} \left(\frac{\vartheta_l^*}{\vartheta_l}\right)^{\gamma-1} &= (1 + \frac{\pi_l \Delta p}{2(1+r)^2 \varepsilon_l \overline{C}_-{}^2})(1 - \frac{\Delta p}{(1+r)\vartheta_l \overline{C}_-{}^2})^{\gamma-1} \\ &= 1 + \frac{(\Delta p)^2}{2(1+r)^2 \varepsilon_l \overline{C}_-{}^2} + O(1/\overline{C}_-{}^4). \end{aligned}$$

This ends the proof for an ideal gas. In a real gas case, the proof follows the same lines, and we do not give it here.

Now, let us introduce the following states

$$V^\pm = \frac{\pm 2}{\Delta m} \int_0^{\pm \Delta m/2} W(m/\Delta\tau; V_l, V_r) dm = \frac{2\overline{C}_\pm \Delta\tau}{\Delta m} V_{r,l}^* + (1 - \frac{2\overline{C}_\pm \Delta\tau}{\Delta m}) V_{r,l}.$$

Using the entropy convexity and (2.21), we obtain for $\overline{C}_\pm$ large enough

$$\sigma(V^\pm) \leq \frac{2\overline{C}_\pm \Delta\tau}{\Delta m} \sigma_{r,l}^* + (1 - \frac{2\overline{C}_\pm \Delta\tau}{\Delta m}) \sigma_{r,l} \leq \sigma_{r,l}.$$

Finally, one has

$$\sigma(V_i^{n+1}) = \sigma(\frac{1}{2}((V^+)_{i-1/2}^n + (V^-)_{i+1/2}^n)$$
$$\leq \frac{1}{2}(\sigma((V^+)_{i-1/2}^n) + \sigma((V^-)_{i+1/2}^n)) \leq \frac{1}{2}(\sigma(V_i^n) + \sigma(V_i^n)) = \sigma(V_i^n),$$

which gives the result.$\diamond$

2.3.2 Lagrangian MHD

The system and the Roe matrix

Let us next consider the ideal MHD system in Lagrangian coordinates (for instance, see [B-W] or [PRLGZ] for a review)

$$\begin{gathered} \partial_\tau V + \partial_m G(V) = 0, \\ V = {}^t(\vartheta, u_x, u_y, u_z, B_y\vartheta, B_z\vartheta, \tilde{e}), \\ G = {}^t(-u_x, \tilde{p}, -B_xB_y, -B_xB_z, -B_xu_y, -B_xu_z, u_x\tilde{p} - B_xB\cdot u), \end{gathered} \tag{2.22}$$

with u_x, u_y, u_z the components of the velocity u, $\tilde{p} = p + B^2/2$ the total pressure, $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon + \vartheta B^2/2$ the total specific internal energy, $\tilde{e}$ the total specific energy given by $\tilde{e} = \tilde{\varepsilon} + u^2/2$. For this system, material contact discontinuities are characterized by $\Delta u_x = \Delta u_y = \Delta u_z = \Delta p = \Delta B_x = \Delta B_y = 0$, if $B_x \neq 0$, and by $\Delta u_x = \Delta\tilde{p} = 0$, if $B_x = 0$. One can see [KHANFIR] for a classification of MHD discontinuities.

In order to study this system, one usely introduces the primitive variable vector ${}^tQ = (\vartheta, u_x, u_y, u_z, B_y, B_z, p)$. Indeed, setting $N = \partial_Q V$, $M = \partial_Q G$, and multiplying (2.22) by N^{-1}, we obtain the following system

$$\partial_\tau Q + D\partial_m Q = 0,$$

where $D = N^{-1}M$ has the following form

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_y & B_z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -B_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -B_x & 0 \\ 0 & B_y/\vartheta & -B_x/\vartheta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_z/\vartheta & 0 & -B_x/\vartheta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

where C is the lagrangian sound speed.
The jacobian $A = \partial_V G$ satisfies $A = NDN^{-1}$. Consequently, A and D have the same eigenvalues given by

$$0 \quad , \quad C_m^{\pm} = \pm C_m = \pm c_m/\vartheta \quad for \quad m = s, al, f, \tag{2.23}$$

where $C_{f,s}$ denote the slow and fast magneto-acoustic speeds and C_{al} the Alfven speed. We have $c_{al}^2 = \vartheta B_x^2$, $c_{f,s}^2 = 1/2(\tilde{c}^2 \pm (\tilde{c}^4 - 4c^2c_{al}^2)^{1/2})$. Moreover, c is the sound speed defined by $c = C\vartheta$,

and $\tilde{c}$ is the total sound speed given by $\tilde{c}^2 = c^2 + b^2$, with $b = {}^t(b_x, b_y, b_z) = \vartheta^{1/2}B$.
Now, let us define the quantities $\alpha_f^2 = \dfrac{c^2 - c_s^2}{c_f^2 - c_s^2}$, $\alpha_s^2 = \dfrac{c_f^2 - c^2}{c_f^2 - c_s^2}$.
One can check that the following relations hold (see [B-W] for example)

$$\begin{array}{c} c_s^2 + c_f^2 = c^2 + b^2, \qquad \alpha_s^2 + \alpha_f^2 = 1, \qquad \alpha_s^2 c_s^2 + \alpha_f^2 c_f^2 = c^2, \\ c_s c_f = c|b_x|, \qquad (c_f^2 - c_s^2)\alpha_s\alpha_f = c|b_\perp|. \end{array} \tag{2.24}$$

Let $X = (X_x, X_y, X_z)$ be any vector in $\mathbb{R}^3$. In the sequel, $X_\perp$will denote the vector (X_y, X_z) of $\mathbb{R}^2$. Also, let us define

$$S = sgn(B_x),\ S_s = 1\ ,\ S_f = -1\ ,\ \beta = (\beta_y, \beta_z) = \frac{B_\perp}{|B_\perp|},\ \beta^\perp = (\beta_z, -\beta_y).$$

Now, let us introduce the following vectors

$$r_{al}^1 = {}^t\,(0, 0, \beta_z, -\beta_y, 0, 0, 0)\ ,\ r_{al}^2 = {}^t\left(0, 0, 0, 0, -S\beta_z\vartheta^{-1/2}, S\beta_y\vartheta^{-1/2}, 0\right),$$

$$l_{al}^1 = \frac{1}{2}\,(0, 0, \beta_z, -\beta_y, 0, 0, 0)\ ,\ l_{al}^2 = \frac{1}{2}\left(0, 0, 0, 0, -S\beta_z\vartheta^{1/2}, S\beta_y\vartheta^{1/2}, 0\right),$$

$$r_{s,f}^1 = \frac{1}{c^2}\begin{pmatrix} 0 \\ c_{s,f}\alpha_{s,f} \\ \alpha_{f,s}c_{f,s}\beta_y S S_{s,f} \\ \alpha_{f,s}c_{f,s}\beta_z S S_{s,f} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad r_{s,f}^2 = \frac{1}{c^2}\begin{pmatrix} -\vartheta\alpha_{s,f} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\alpha_{f,s}c\beta_y\vartheta^{-1/2}S_{s,f} \\ -\alpha_{f,s}c\beta_z\vartheta^{-1/2}S_{s,f} \\ \alpha_{s,f}c^2/\vartheta \end{pmatrix},$$

$${}^t l_{s,f}^1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ c_{s,f}\alpha_{s,f} \\ \alpha_{f,s}c_{f,s}\beta_y S S_{s,f} \\ \alpha_{f,s}c_{f,s}\beta_z S S_{s,f} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad {}^t l_{s,f}^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\alpha_{f,s}c\beta_y\vartheta^{1/2}S_{s,f} \\ -\alpha_{f,s}c\beta_z\vartheta^{1/2}S_{s,f} \\ \alpha_{s,f}\vartheta \end{pmatrix}.$$

Then, the right and left eigenvectors of the matrix D are given by

$$r_0 = \frac{1}{c^2}\,{}^t\,(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \quad ,\quad l_0 = \left(c^2, 0, 0, 0, 0, 0, \vartheta^2\right), \tag{2.25}$$

$$r_{al,f,s}^{\pm} = \pm r_{al,f,s}^1 + r_{al,f,s}^2 \quad ,\quad l_{al,f,s}^{\pm} = \pm l_{al,f,s}^1 + l_{al,f,s}^2. \tag{2.26}$$

By using the relation $R = Nr$ between the right eigenvectors of A and D, we obtain the following right eigenvectors $R^{\pm}_{s,al,f}$ for A

$$R^{\pm}_{al} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm\beta_z \\ \mp\beta_y \\ -S\beta_z\vartheta^{1/2} \\ S\beta_y\vartheta^{1/2} \\ \pm\beta^{\perp}\cdot u_{\perp} \end{pmatrix}, \tag{2.27}$$

$$R^{\pm}_{s,f} = \frac{1}{c^2}\begin{pmatrix} -\vartheta\alpha_{s,f} \\ \pm c_{s,f}\alpha_{s,f} \\ \pm S_{s,f}\alpha_{f,s}c_{f,s}\beta_y S \\ \pm S_{s,f}\alpha_{f,s}c_{f,s}\beta_z S \\ -S_{s,f}\dfrac{\vartheta^{1/2}}{c}\alpha_{f,s}c^2_{f,s}\ \beta_y \\ -S_{s,f}\dfrac{\vartheta^{1/2}}{c}\alpha_{f,s}c^2_{f,s}\ \beta_z \\ \pm(\alpha_{s,f}c_{s,f}u_x + SS_{s,f}\alpha_{f,s}c_{f,s}u_{\perp}\cdot\beta) + \alpha_{s,f}\vartheta(\tilde{p}-B^2) - \\ \qquad\qquad S_{s,f}\alpha_{f,s}c\vartheta^{1/2}|B_{\perp}| \end{pmatrix}. \tag{2.28}$$

Now, let us define the continuous characteristic variables. First, we introduce the following quantities, in which the notation δ stands for the derivative $d_\alpha = \dfrac{d}{d\alpha}$ with respect to any parameter α, or, in the next paragraph, for the difference Δ,

$$\begin{array}{lll} \mathcal{A}_{al} = \beta^{\perp}\cdot\delta u_{\perp} & , \mathcal{B}_{al} = -S\vartheta^{1/2}\beta^{\perp}\cdot\delta B_{\perp}, \\ \mathcal{A}_{s} = \alpha_s c_s\delta u_x + \alpha_f c_f S\beta\cdot\delta u_{\perp} & , \mathcal{B}_{s} = \alpha_s\vartheta\delta p - \alpha_f c\vartheta^{1/2}\beta\cdot\delta B_{\perp}, \\ \mathcal{A}_{f} = \alpha_f c_f\delta u_x - \alpha_s c_s S\beta\cdot\delta u_{\perp} & , \mathcal{B}_{f} = \alpha_f\vartheta\delta p + \alpha_s c\vartheta^{1/2}\beta\cdot\delta B_{\perp}. \end{array} \tag{2.29}$$

Then, noting that the left eigenvectors of A and D are linked by the identity $l = LN$, the continuous characteristic variables are

$$\phi^{\pm}_m = L^{\pm}_m\cdot d_\alpha V = l^{\pm}_m\cdot d_\alpha Q = 1/2(\pm\mathcal{A}_m + \mathcal{B}_m) \quad for \quad m = s, al, f, \tag{2.30}$$

and by the hyperbolicity of the system (2.22), we have the following decomposition of the flux derivative

$$d_\alpha G = \sum_{(\nu;m)=(\pm;s,al,f)} C^{\nu}_m\phi^{\nu}_m R^{\nu}_m. \tag{2.31}$$

Now, let us consider the expressions of the eigenvalues, the characteristic variables and the right eigenvectors. We observe that they are expressed in terms of $\tilde{p}$, u, B, ϑ and C. On the contrary,

the flux G is depending only in $\tilde{p}$, u, B, but not on ϑ and C. The result below shows that this property remains true in (2.31).

Property 1. . *The following identity is true*

$$d_\alpha G = \sum_{(\nu;m)=(\pm;s,al,f)} C_m^\nu \phi_m^\nu R_m^\nu$$

where ϑ and C are arbitrarly chosen in the expressions of the $C_\pm^\nu$, $\phi_\pm^\nu$ and $R_\pm^\nu$ given by (2.23), (2.29) and (2.30). $\diamond$

The proof is easily obtained by direct calculations from the expressions of the eigenvalues, characteristic variables and eigenvectors in terms of $\tilde{p}$, u, B, ϑ, and C, and we do not develop it here.

In the next section, we will see that the Property 1 is also true in the discrete case, thus leading to the construction of a family of Godunov-type schemes.

Let us now recall the construction of the Roe matrix of [CGR]. It is based on arithmetic averages and it is the natural extension of the Munz matrix for MHD. In order to derive it, once again we introduce the primitive variables vector Q and we seek matrices $\overline{M}$, $\overline{N}$ such that $\Delta G = \overline{M}\Delta Q$, $\Delta V = \overline{N}\Delta Q$. Then, the Roe matrix is $\overline{A} = \overline{M}\,\overline{N}^{-1}$, and as in the continuous case, we consider the matrix $\overline{D} = \overline{N}^{-1}\,\overline{M} = \overline{N}^{-1}\,\overline{A}\,\overline{N}$ which is given by

$$\overline{D} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (B_y)_a & (B_z)_a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -B_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -B_x & 0 \\ 0 & (B_y)_a/\vartheta_a & -B_x/\vartheta_a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (B_z)_a/\vartheta_a & 0 & -B_x/\vartheta_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{ave}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

where $C_{ave}^2 = \gamma P_a/\vartheta_a$, with $P_a = p_a + \frac{\gamma-1}{\gamma}[(B^2)_a - (B_a)^2)]$ for an ideal gas (see [CGR] for the real gas case).

We note that the matrix $\overline{D}$ has the same structure than D. Indeed, we have $\overline{D} = D(C_{ave}, \vartheta_a, B_a)$. This implies that the algebra is the same as in the continuous case. In particular, the eigenvalues of $\overline{A}$ are given by 0 and $C_{al,f,s}^\pm = C_{al,f,s}^\pm(C_{ave}, \vartheta_a, \tilde{p_a}, B_a)$. Moreover, the right eigenvectors of $\overline{A}$ are $R_{al,f,s}^\pm = R_{al,f,s}^\pm(C_{ave}, \vartheta_a, \tilde{p_a}, u_a, B_a)$ and the discrete characteristic variables are $\phi_{al,f,s}^\pm = \phi_{al,f,s}^\pm(C_{ave}, \vartheta_a, \tilde{p_a}, B_a, \Delta)$, i.e.,

$$\begin{array}{ll} \mathcal{A}_{al} = \beta^\perp \cdot \Delta u_\perp & ,\mathcal{B}_{al} = -S\vartheta_a^{1/2}\beta^\perp \cdot \Delta B_\perp, \\ \mathcal{A}_s = \alpha_s c_s \Delta u_x + \alpha_f c_f S\beta \cdot \Delta u_\perp & ,\mathcal{B}_s = \alpha_s \vartheta_a \Delta p - \alpha_f c\vartheta_a^{1/2}\beta \cdot \Delta B_\perp, \\ \mathcal{A}_f = \alpha_f c_f \Delta u_x - \alpha_s c_s S\beta \cdot \Delta u_\perp & ,\mathcal{B}_f = \alpha_f \vartheta_a \Delta p + \alpha_s c\vartheta_a^{1/2}\beta \cdot \Delta B_\perp. \end{array} \tag{2.33}$$

Construction of a Godunov-type scheme

In this paragraph, as for gas dynamics, we want to extend the MHD Roe scheme of [CGR] into a Godunov-type scheme.
To this goal, let us define the slopes $C^{\pm}_{al,f,s} = C^{\pm}_{al,f,s}(\overline{C}, \overline{\vartheta}, \tilde{p_a}, B_a)$, the vectors $R^{\pm}_{al,f,s} = R^{\pm}_{al,f,s}(\overline{C}, \overline{\vartheta}, \tilde{p_a}, u_a, B_a)$ and the characteristic variables $\phi^{\pm}_{al,f,s} = \phi^{\pm}_{al,f,s}(\overline{C}, \overline{\vartheta}, \tilde{p_a}, B_a, \Delta)$, in which $\overline{C}$ and $\overline{\vartheta}$ are arbitrary.
We now construct the following simple Riemann solver

$$W_L(m/\tau) = \begin{cases} V_{l,0} = V_l & if \quad m/\tau \leq -C_f, \\ V_{l,1} = V_{l,0} + \phi^-_f R^-_f & if \quad -C_f < m/\tau \leq -C_{al}, \\ V_{l,2} = V_{l,1} + \phi^-_{al} R^-_{al} & if \quad -C_{al} < m/\tau \leq -C_s, \\ V_{l,3} = V_{l,2} + \phi^-_s R^-_s & if \quad -C_s < m/\tau \leq 0, \\ V_{r,3} = V_{r,2} - \phi^+_s R^+_s & if \quad 0 < m/\tau \leq C_s, \\ V_{r,2} = V_{r,1} - \phi^+_{al} R^+_{al} & if \quad C_s < m/\tau \leq C_{al}, \\ V_{r,1} = V_{r,0} - \phi^+_f R^+_f & if \quad C_{al} < m/\tau \leq C_f, \\ V_{r,0} = V_r & if \quad C_f < m/\tau. \end{cases} \tag{2.34}$$

If in (2.34), we choose $\overline{\vartheta} = \vartheta_a$, and $\overline{C} = C_{ave}$, we recover the Riemann solver associated to Roe scheme of [CGR]. In the general case, the above result allows us to define a Godunov-type scheme.

Proposition 8. . *The following identity is true for any $\overline{\vartheta}$ and $\overline{C}$,*

$$\Delta G = \sum_{(\nu;m) = (\pm;s,al,f)} C^{\nu}_m \phi^{\nu}_m R^{\nu}_m. \tag{2.35}$$

Clearly, this result implies that (2.34) is a Godunov-type scheme since (2.35) is exactly the characterization given by the relation (2.8). Moreover, if the states V_l and V_r are separated by a material contact discontinuity, i.e.,$\Delta u_x = \Delta u_y = \Delta u_z = \Delta p = \Delta B_x = \Delta B_y = 0$, by construction we have $\phi^{\pm}_{al,f,s} = 0$, which leads to $V_{l,i} = V_l$ and $V_{r,i} = V_r$ for $i = 0, 3$. Thus we immediately have the following result,

Corollary 1. . *Every material contact discontinuity is preserved by the simple Riemann solver (2.34).*

Here, we do not develop the proof of Proposition 8. It can be obtained by direct calculations from the expression of the eigenvalues and eigenvectors in terms of $\tilde{p_a}$, u_a, B_a, $\overline{\vartheta}$, and $\overline{C}$. But in order to connect this property with the notion of Roe matrix, we prefer to give the proof in the particular case where $\overline{\vartheta}$ is chosen equal to ϑ_a.

The procedure we will use follows the same lines as for gas dynamics. Indeed, we will seek Roe matrices with eigenvalues as large as expected in order to tune the dissipation. In the previous paragraph, we have looked for matrices $\overline{M}$, $\overline{N}$ such that $\Delta G = \overline{M}\Delta Q$, $\Delta V = \overline{N}\Delta Q$, and we have considered the matrix $\overline{D} = \overline{N}^{-1}\overline{M}$, the Roe matrix being given by $\overline{A} = \overline{N}\,\overline{D}\,\overline{N}^{-1}$. Here, we impose that the matrix $\overline{D}$ is $\overline{D} = D(\overline{C}, \vartheta_a, B_a)$ where the parameter $\overline{C}$ is arbitrarly chosen, and we only seek the matrix $\overline{N}$. Thus, we ask the following question:
Is there a matrix $\overline{N}$ such that $\overline{A} = \overline{N}\,\overline{D}\,\overline{N}^{-1}$ is a Roe matrix?
The interest of such a result is obvious. Indeed, the eigenvalues of $\overline{A}$ are those of $\overline{D}$, and thus can be chosen as large as necessary.

Now, we will seek a matrix $\overline{N}$ satisfying $\Delta V = \overline{N}\Delta Q$. It is easy to see this is equivalent to look for a general decomposition of the total pressure jump

$$\Delta\tilde{p} = \chi\Delta\vartheta + \kappa\Delta\tilde{\varepsilon} + \Theta\cdot\Delta(\vartheta B_\perp),$$

where the scalar coefficients χ, κ and the vector Θ have to be determined. Indeed, this relation leads to the decomposition of the pressure,

$$\begin{aligned}\Delta p &= \chi\Delta\vartheta + \kappa\Delta\tilde{\varepsilon} + \Theta\cdot\Delta(\vartheta B_\perp) + \frac{{B_\perp}_a^2}{\vartheta_a}\Delta\vartheta - \frac{B_{\perp a}}{\vartheta_a}\cdot\Delta(\vartheta B_\perp)\\ &= (\chi + \frac{{B_\perp}_a^2}{\vartheta_a})\Delta\vartheta - \kappa u_a\cdot\Delta u + (\Theta - \frac{B_{\perp a}}{\vartheta_a})\cdot\Delta(\vartheta B_\perp) + \kappa\Delta\tilde{e},\end{aligned}$$

which gives the matrix

$$\overline{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -(B_y)_a/\vartheta_a & 0 & 0 & 0 & 1/\vartheta_a & 0 & 0\\ -(B_z)_a/\vartheta_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\vartheta_a & 0\\ \chi + \dfrac{{B_\perp}_a^2}{\vartheta_a} & -\kappa u_{x_a} & -\kappa u_{y_a} & -\kappa u_{z_a} & \Theta_y - \dfrac{(B_y)_a}{\vartheta_a} & \Theta_z - \dfrac{(B_z)_a}{\vartheta_a} & \kappa \end{pmatrix}$$

Finally, the following result gives the answer to the above question.

Proposition 9. *. Let $\overline{C}$ be a positive real number. Let us suppose that the following linear system is satisfied by the coefficients χ, κ and Θ,*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \chi\Delta\vartheta + \kappa\Delta\tilde{\varepsilon} + \Theta\cdot\Delta(\vartheta B_\perp) &=& \Delta\tilde{p},\\ \kappa B_{\perp a} + \Theta &=& \dfrac{B_{\perp a}}{\vartheta_a},\\ -\chi + \kappa(\tilde{p}_a - B_x^2) &=& \overline{C}^2 + \dfrac{{B_\perp}_a^2}{\vartheta_a}, \end{array}\right. \tag{2.36}$$

then, the matrices $\overline{N}^{-1}$ and $\overline{D} = D(\overline{C}, \vartheta_a, B_a)$ satisfy the relations

$$\overline{N}^{-1}\Delta V = \Delta Q \quad , \quad \overline{N}^{-1}\Delta G = \overline{D}\Delta Q.$$

This system has a unique solution if the following relation holds

$$(p_a + (B^2)_a - (B_a)^2)\Delta\vartheta + \Delta\varepsilon \neq 0. \qquad (C1)$$

The matrix $\overline{N}^{-1}$ is invertible if $\kappa \neq 0$, which, if (C1) is true, is equivalent to

$$\overline{C}^2\Delta\vartheta + \Delta p \neq 0. \qquad (C2)$$

In this case, the matrix $\overline{A} = \overline{N}\ \overline{D}\ \overline{N}^{-1}$ is a Roe matrix. Its eigenvalues are 0 and $C^\pm_{al,f,s} = C^\pm_{al,f,s}(\overline{C}, \vartheta_a, \tilde{p_a}, B_a)$. Moreover, the right eigenvectors and characteristic variables are given by the expressions, $R^\pm_{al,f,s} = R^\pm_{al,f,s}(\overline{C}, \vartheta_a, \tilde{p_a}, u_a, B_a)$ and, $\phi^\pm_{al,f,s} = \phi^\pm_{al,f,s}(\overline{C}, \vartheta_a, \tilde{p_a}, B_a, \Delta)$.

Proof: Firstly, we have already shown that the first relation of (2.36) gives $\overline{N}^{-1}\Delta V = \Delta Q$. Now, let us prove that $\overline{N}^{-1}\Delta G = \overline{D}\Delta Q$. One has

$$\overline{N}^{-1}\Delta G = \begin{pmatrix} -\Delta u_x \\ \Delta\tilde{p} \\ -B_x\Delta B_y \\ -B_x\Delta B_z \\ \frac{B_{y_a}}{\vartheta_a}\Delta u_x - \frac{B_x}{\vartheta_a}\Delta u_y \\ \frac{B_{z_a}}{\vartheta_a}\Delta u_x - \frac{B_x}{\vartheta_a}\Delta u_z \\ (\overline{N}^{-1}\Delta G)_7 \end{pmatrix}, \quad \overline{D}\Delta Q = \begin{pmatrix} -\Delta u_x \\ \Delta p + B_{\perp a}\cdot\Delta B_\perp \\ -B_x\Delta B_y \\ -B_x\Delta B_z \\ \frac{B_{y_a}}{\vartheta_a}\Delta u_x - \frac{B_x}{\vartheta_a}\Delta u_y \\ \frac{B_{z_a}}{\vartheta_a}\Delta u_x - \frac{B_x}{\vartheta_a}\Delta u_z \\ \overline{C}^2\Delta u_x \end{pmatrix},$$

with

$$\begin{aligned}(\overline{N}^{-1}\Delta G)_7 &= -(\chi + \frac{{B_{\perp a}}^2}{\vartheta_a})\Delta u_x - \kappa u_{x a}\Delta\tilde{p} + \kappa u_{y_a}B_x\Delta B_y + \kappa u_{z a}B_x\Delta B_z \\ &\quad +(\Theta - \frac{B_{\perp a}}{\vartheta_a})\cdot(-B_x\Delta u_\perp) + \kappa\Delta(\tilde{p}u_x - B_xB\cdot u) \\ &= -(\chi + \frac{{B_{\perp a}}^2}{\vartheta_a} - \kappa(\tilde{p}_a - B_x^2))\Delta u_x - B_x(\Theta - \frac{B_{\perp a}}{\vartheta_a} + \kappa B_{\perp a})\cdot\Delta u_\perp.\end{aligned}$$

Thus, it is enough to show that

$$-(\chi + \frac{{B_{\perp a}}^2}{\vartheta_a} - \kappa(\tilde{p}_a - B_x^2))\Delta u_x - B_x(\Theta - \frac{B_{\perp a}}{\vartheta_a} + \kappa B_{\perp a})\cdot\Delta u_\perp = \overline{C}^2\Delta u_x,$$

which follows from the last two relations of (2.36).
Otherwise, (C1) is obtained by considering the determinant of the system (2.36) and (C2) by evaluating κ from (2.36).$\diamond$

Now, we are able to give the proof of the Proposition 8.
First, let us suppose that $\overline{\vartheta} = \vartheta_a$. Then, by the Proposition 9, if (C1) and (C2) are satisfied, the solver (2.34) is a Roe solver, and (2.8) is true. If (C1), (C2) are not fulfilled, we notice that each member of (2.8) is continuous with respect to V_l, V_r, and we use a continuity argument.
If $\overline{\vartheta} \neq \vartheta_a$, we consider the states V'_m given by ${}^tQ(V'_m) = (\overline{\vartheta}, u_m, B_m, p_m)$ for $m = l, r$. Since $\overline{\vartheta} = (\vartheta(V'_l) + \vartheta(V'_r))/2$, (2.35) is true for the states V'_l, V'_r. Moreover, one has $\Delta G = G(V_r) - G(V_l) = G(V'_r) - G(V'_l)$. This completes the proof.$\diamond$

Characterization of the flux of the Godunov-type scheme

In this paragraph, we characterize the numerical flux of the Riemann solver (2.34) in the same way as for gas dynamics, i.e. we prove that this numerical flux is a continuous flux evaluated at an averaged point.
Before proving this result, we state two preliminary lemmas.

Lemma 1. . *For any $\overline{\vartheta}$ and $\overline{C}$, one has* $|\overline{D}(\overline{C},\overline{\vartheta},B_a)|\Delta Q =$

$$C_{al}\begin{pmatrix}0\\0\\\mathcal{A}_{al}\beta^{\perp}\\-\mathcal{B}_{al}S\overline{\vartheta}^{-1/2}\beta^{\perp}\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{\overline{\vartheta}c^2}\begin{pmatrix}-\overline{\vartheta}(\alpha_s c_s\mathcal{B}_s+\alpha_f c_f\mathcal{B}_f)\\ \alpha_s c_s^2\mathcal{A}_s+\alpha_f c_f^2\mathcal{A}_f\\ cb_x(\alpha_f\mathcal{A}_s-\alpha_s\mathcal{A}_f)\beta\\ -c\overline{\vartheta}^{-1/2}(\alpha_f c_s\mathcal{B}_s-\alpha_s c_f\mathcal{B}_f)\beta\\ \frac{c^2}{\overline{\vartheta}}(\alpha_s c_s\mathcal{B}_s+\alpha_f c_f\mathcal{B}_f)\end{pmatrix}.$$

Lemma 2. . *The following identity is true for all $\overline{\vartheta}$ and $\overline{C}$:*

$$(\overline{\tilde{p}}-\tilde{p}_a)(\overline{u}_x-u_{xa})-\frac{1}{4}\Delta\tilde{p}\Delta u_x-B_x[(\overline{B}-B_a)\cdot(\overline{u}-u_a)-\frac{1}{4}\Delta B\cdot\Delta u]=0,$$

where $\overline{\tilde{p}}$, $\overline{u}$ and $\overline{B}$ are given by,

$$\begin{aligned}
\overline{\tilde{p}}&=\tilde{p}_a-\frac{1}{2\overline{\vartheta}c^2}(\alpha_s c_s^2\mathcal{A}_s+\alpha_f c_f^2\mathcal{A}_f),\\
\overline{u}_x&=u_{xa}-\frac{1}{2c^2}(\alpha_s c_s\mathcal{B}_s+\alpha_f c_f\mathcal{B}_f),\\
\overline{u}_{\perp}&=u_{\perp a}-\frac{1}{2}\mathcal{B}_{al}\beta^{\perp}+\frac{S}{2c^2}(\alpha_s c_s\mathcal{B}_f-\alpha_f c_f\mathcal{B}_s)\beta,\\
\overline{B}_{\perp}&=B_{\perp a}+\frac{S}{2\overline{\vartheta}^{1/2}}\mathcal{A}_{al}\beta^{\perp}+\frac{1}{2\overline{\vartheta}^{1/2}c}(\alpha_f\mathcal{A}_s-\alpha_s\mathcal{A}_f)\beta.
\end{aligned}\tag{2.37}$$

We now characterize the flux.

Proposition 10. . *The numerical flux $\overline{G}(V_l,V_r)$ of the simple Riemann solver (2.34) is given by*

$${}^t\left(-\overline{u}_x,\overline{\tilde{p}},-B_x\overline{B}_y,-B_x\overline{B}_z,-B_x\overline{u}_y,-B_x\overline{u}_z,\overline{\tilde{p}}\,\overline{u}_x-B_x\overline{B}\cdot\overline{u}\right).\tag{2.38}$$

Proof: First suppose that $\overline{\vartheta}=\vartheta_a$ and that conditions (C1) and (C2) hold. In this case, the numerical flux $\overline{G}$ is a Roe flux which is given by

$$\overline{G}=G_a-\frac{1}{2}|\overline{A}|\Delta V=G_a-\frac{1}{2}\overline{N}|\overline{D}|\Delta Q.$$

We wish to show that $\overline{G}=G(\overline{\tilde{p}},\overline{u},\overline{B}_{\perp})$. From Lemma 1, one can easily see that

$$\overline{u}_x=-\overline{G}_1,\quad \overline{\tilde{p}}=\overline{G}_2,\quad {}^t\overline{B}_{\perp}=-(\overline{G}_3,\overline{G}_4)/B_x,\quad {}^t\overline{u}_{\perp}=-(\overline{G}_5,\overline{G}_6)/B_x,$$

and it remains to show that $\overline{G}_7=\overline{\tilde{p}}\,\overline{u}_x-B_x\overline{B}\cdot\overline{u}$, which is equivalent to

$$(\overline{N}^{-1}(G(\overline{\tilde{p}},\overline{u},\overline{B}_{\perp})-G_a))_7=-1/2(|\overline{D}|\Delta Q)_7.\tag{2.39}$$

Using Lemma 1, we have on the one hand, $-1/2(|\overline{D}|\Delta Q)_7=\overline{C}^2(\overline{u}_x-u_{xa})$. Noting that $\overline{B}_x=B_x$, we have on the other hand,

$$\begin{aligned}
(\overline{N}^{-1}(G(\overline{\tilde{p}},\overline{u},\overline{B}_{\perp})-G_a))_7&=-(\kappa(\tilde{p}_a-B_x^2)-\overline{C}^2)(\overline{u}_x-u_{xa})-\kappa u_{xa}(\overline{\tilde{p}}-\tilde{p}_a)\\
&\quad+\kappa B_x u_{\perp a}\cdot(\overline{B}_{\perp}-B_{\perp a})+\kappa B_x B_{\perp a}\cdot(\overline{u}_{\perp}-u_{\perp a})\\
&\quad+\kappa\left[\overline{\tilde{p}}\,\overline{u}_x-(\tilde{p}u)_a-B_x(\overline{B}\cdot\overline{u}-(B\cdot u)_a)\right]\\
&=\overline{C}^2(\overline{u}_x-u_{xa})+\kappa[-\tilde{p}_a(\overline{u}_x-u_{xa})-u_{xa}(\overline{\tilde{p}}-\tilde{p}_a)+\overline{\tilde{p}}\,\overline{u}_x-(\tilde{p}u)_a\\
&\quad+B_x(u_a\cdot(\overline{B}-B_a)+B_a\cdot(\overline{u}-u_a)+(B\cdot u)_a-\overline{B}\cdot\overline{u}))].
\end{aligned}\tag{2.40}$$

Remarking that for any quantities α, β, one has $\alpha\beta - (\alpha\beta)_a = \beta_a(\alpha\beta)_a + \alpha(\beta - \beta_a) - \frac{1}{4}\Delta\alpha\Delta\beta$, and using this identity in (2.40), we see that, in order to show (2.39), it is sufficient to prove the following relation

$$(\overline{\tilde{p}} - \tilde{p}_a)(\overline{u}_x - u_{xa}) - \frac{1}{4}\Delta\tilde{p}\Delta u_x - B_x[(\overline{B} - B_a)\cdot(\overline{u} - u_a) - \frac{1}{4}\Delta B\cdot\Delta u] = 0,$$

which is true by Lemma 2. Thus, the result holds in this first case.
If (C1) and (C2) are not true, we use the same arguments as in the proof of Proposition 8.$\diamond$

Proof of Lemma 1: We have

$$\begin{array}{l} |\overline{D}|\Delta Q = C_{al}(\phi^-_{al}r^-_{al} + \phi^+_{al}r^+_{al}) + C_s(\phi^-_s r^-_s + \phi^+_s r^+_s) + C_f(\phi^-_f r^-_f + \phi^+_f r^+_f) \\ = C_{al}(\mathcal{A}_{al}r^1_{al} + \mathcal{B}_{al}r^2_{al}) + (C_s\mathcal{A}_s r^1_s + C_f\mathcal{A}_f r^1_f) + (C_s\mathcal{A}_s r^2_s + C_f\mathcal{B}_f r^2_f) \end{array}$$

and also, $C_{al}(\mathcal{A}_{al}r^1_{al} + \mathcal{B}_{al}r^2_{al}) = C_{al}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{A}_{al}\beta^\perp \\ -\mathcal{B}_{al}S\overline{\vartheta}^{-1/2}\beta^\perp \\ 0 \end{pmatrix}$.

Moreover, one has $C_s\mathcal{A}_s r^1_s + C_f\mathcal{A}_f r^1_f = \frac{1}{\overline{\vartheta}c^2}\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_s c_s^2\mathcal{A}_s + \alpha_f c_f^2\mathcal{A}_f \\ cb_x(\alpha_f\mathcal{A}_s - \alpha_s\mathcal{A}_f)\beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

and finally, $C_s\mathcal{A}_s r^2_s + C_f\mathcal{B}_f r^2_f = \frac{1}{\overline{\vartheta}c^2}\begin{pmatrix} -\overline{\vartheta}(\alpha_s c_s\mathcal{B}_s + \alpha_f c_f\mathcal{B}_f) \\ 0 \\ 0 \\ -c\overline{\vartheta}^{-1/2}(\alpha_f c_s\mathcal{B}_s - \alpha_s c_f\mathcal{B}_f)\beta \\ \frac{c^2}{\overline{\vartheta}}(\alpha_s c_s\mathcal{B}_s + \alpha_f c_f\mathcal{B}_f) \end{pmatrix}$,

which gives the result.$\diamond$

Proof of Lemma 2: Let us denote ,

$$X_1 = (\overline{\tilde{p}} - \tilde{p}_a)(\overline{u}_x - u_{xa}), X_2 = B_x(\overline{B} - B_a)\cdot(\overline{u} - u_a), X = X_1 - X_2.$$

We have to show that $X = \frac{1}{4}(\Delta\tilde{p}\Delta u_x - B_x\Delta B\cdot\Delta u)$.
On the one hand, from (2.37) we have,

$$\begin{array}{l} X_1 = \frac{1}{4\overline{\vartheta}c^4}(\alpha_s c_s\mathcal{B}_s + \alpha_f c_f\mathcal{B}_f)(\alpha_s c_s^2\mathcal{A}_s + \alpha_f c_f^2\mathcal{A}_f) \\ = \frac{1}{4\overline{\vartheta}c^4}(\alpha_s^2 c_s^3\mathcal{A}_s\mathcal{B}_s + \alpha_f^2 c_f^3\mathcal{A}_f\mathcal{B}_f) + \frac{\alpha_s\alpha_f c_s c_f}{4\overline{\vartheta}c^4}(c_f\mathcal{A}_f\mathcal{B}_s + c_s\mathcal{A}_s\mathcal{B}_f). \end{array} \tag{2.41}$$

On the other hand, from (2.37) one has,

$$\begin{aligned}
X_2 &= \frac{SB_x}{4\overline{\vartheta}^{1/2}}[-\mathcal{A}_{al}\mathcal{B}_{al} + \frac{1}{c^3}(\alpha_f\mathcal{A}_s - \alpha_s\mathcal{A}_f)(\alpha_s c_s\mathcal{B}_f - \alpha_f c_f\mathcal{B}_s)] \\
&= -\frac{|B_x|\mathcal{A}_{al}\mathcal{B}_{al}}{4\overline{\vartheta}^{1/2}} \\
&+\frac{c|b_x|}{4\overline{\vartheta}c^4}(\alpha_s\alpha_f c_s\mathcal{A}_s\mathcal{B}_f + \alpha_s\alpha_f c_f\mathcal{A}_f\mathcal{B}_s - \alpha_f^2 c_f\mathcal{A}_s\mathcal{B}_s - \alpha_s^2 c_s\mathcal{A}_f\mathcal{B}_f) \\
&= -\frac{|B_x|\mathcal{A}_{al}\mathcal{B}_{al}}{4\overline{\vartheta}^{1/2}} \\
&+\frac{c_s c_f}{4\overline{\vartheta}c^4}(\alpha_s\alpha_f c_s\mathcal{A}_s\mathcal{B}_f + \alpha_s\alpha_f c_f\mathcal{A}_f\mathcal{B}_s - \alpha_f^2 c_f\mathcal{A}_s\mathcal{B}_s - \alpha_s^2 c_s\mathcal{A}_f\mathcal{B}_f) \\
&= -\frac{|B_x|\mathcal{A}_{al}\mathcal{B}_{al}}{4\overline{\vartheta}^{1/2}} + \frac{\alpha_s\alpha_f c_s c_f}{4\overline{\vartheta}c^4}(c_s\mathcal{A}_s\mathcal{B}_f + c_f\mathcal{A}_f\mathcal{B}_s) \\
&-\frac{1}{4\overline{\vartheta}c^4}(\alpha_f^2 c_s c_f^2\mathcal{A}_s\mathcal{B}_s + \alpha_s^2 c_s^2 c_f\mathcal{A}_f\mathcal{B}_f).
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Then, by using (2.41), (2.42) and (2.24), we obtain,

$$\begin{aligned}
X &= \frac{1}{4\overline{\vartheta}c^4}(\alpha_s^2 c_s^3\mathcal{A}_s\mathcal{B}_s + \alpha_f^2 c_f^3\mathcal{A}_f\mathcal{B}_f) + \frac{\alpha_s\alpha_f c_s c_f}{4\overline{\vartheta}c^4}(c_f\mathcal{A}_f\mathcal{B}_s + c_s\mathcal{A}_s\mathcal{B}_f) \\
&\quad +\frac{|B_x|\mathcal{A}_{al}\mathcal{B}_{al}}{4\overline{\vartheta}^{1/2}} - \frac{\alpha_s\alpha_f c_s c_f}{4\overline{\vartheta}c^4}(c_s\mathcal{A}_s\mathcal{B}_f + c_f\mathcal{A}_f\mathcal{B}_s) \\
&\quad +\frac{1}{4\overline{\vartheta}c^4}(\alpha_f^2 c_s c_f^2\mathcal{A}_s\mathcal{B}_s + \alpha_s^2 c_s^2 c_f\mathcal{A}_f\mathcal{B}_f) \\
&= \frac{|B_x|\mathcal{A}_{al}\mathcal{B}_{al}}{4\overline{\vartheta}^{1/2}} + \frac{\alpha_s^2 c_s^2 + \alpha_f^2 c_f^2}{4\overline{\vartheta}c^4}(c_s\mathcal{A}_s\mathcal{B}_s + c_f\mathcal{A}_f\mathcal{B}_f) \\
&= \frac{|B_x|\mathcal{A}_{al}\mathcal{B}_{al}}{4\overline{\vartheta}^{1/2}} + \frac{c_s\mathcal{A}_s\mathcal{B}_s + c_f\mathcal{A}_f\mathcal{B}_f}{4\overline{\vartheta}c^2}.
\end{aligned}$$

Now, let us evaluate the term $c_s\mathcal{A}_s\mathcal{B}_s + c_f\mathcal{A}_f\mathcal{B}_f$. Firstly, we have,

$$\begin{aligned}
c_s\mathcal{A}_s\mathcal{B}_s &= c_s(\alpha_s c_s\Delta u_x + \alpha_f c_f S(\beta\cdot\Delta u_\perp))(\alpha_s\overline{\vartheta}\Delta p - \alpha_f c\overline{\vartheta}^{1/2}(\beta\cdot\Delta B_\perp)) \\
&= \alpha_s^2 c_s^2\overline{\vartheta}\Delta u_x\Delta p - \alpha_f^2 c_s c_f Sc\overline{\vartheta}^{1/2}(\beta\cdot\Delta u_\perp)(\beta\cdot\Delta B_\perp) \\
&- \alpha_s\alpha_f c_s^2 c\overline{\vartheta}^{1/2}\Delta u_x(\beta\cdot\Delta B_\perp) + \alpha_s\alpha_f c_s c_f S\overline{\vartheta}\Delta p(\beta\cdot\Delta u_\perp),
\end{aligned}$$

and secondly,

$$\begin{aligned}
c_f\mathcal{A}_f\mathcal{B}_f &= c_f(\alpha_f c_f\Delta u_x - \alpha_s c_s S(\beta\cdot\Delta u_\perp))(\alpha_f\overline{\vartheta}\Delta p + \alpha_s c\overline{\vartheta}^{1/2}(\beta\cdot\Delta B_\perp)) \\
&= \alpha_f^2 c_f^2\overline{\vartheta}\Delta u_x\Delta p - \alpha_s^2 c_s c_f Sc\overline{\vartheta}^{1/2}(\beta\cdot\Delta u_\perp)(\beta\cdot\Delta B_\perp) \\
&+\alpha_s\alpha_f c_f^2 c\overline{\vartheta}^{1/2}\Delta u_x(\beta\cdot\Delta B_\perp) - \alpha_s\alpha_f c_s c_f S\overline{\vartheta}\Delta p(\beta\cdot\Delta u_\perp).
\end{aligned}$$

Thus, we obtain,

$$\begin{aligned}
c_s\mathcal{A}_s\mathcal{B}_s + c_f\mathcal{A}_f\mathcal{B}_f &= c^2\overline{\vartheta}\Delta u_x\Delta p - c_s c_f Sc\overline{\vartheta}^{1/2}(\beta\cdot\Delta u_\perp)(\beta\cdot\Delta B_\perp) \\
&\quad +\alpha_s\alpha_f(c_f^2 - c_s^2)c\overline{\vartheta}^{1/2}\Delta u_x(\beta\cdot\Delta B_\perp) \\
&= c^2\overline{\vartheta}\Delta u_x\Delta p - c^2 b_x\overline{\vartheta}^{1/2}(\beta\cdot\Delta u_\perp)(\beta\cdot\Delta B_\perp) + c^2|b_\perp|\overline{\vartheta}^{1/2}\Delta u_x(\beta\cdot\Delta B_\perp) \\
&= c^2\overline{\vartheta}[\Delta u_x\Delta p - B_x(\beta\cdot\Delta u_\perp)(\beta\cdot\Delta B_\perp) + |B_{\perp a}|\Delta u_x(\beta\cdot\Delta B_\perp)] \\
&= c^2\overline{\vartheta}[\Delta u_x\Delta\tilde{p} - B_x(\beta\cdot\Delta u_\perp)(\beta\cdot\Delta B_\perp)].
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Now, from (2.33) and (2.43), we have,

$$\begin{aligned} X &= -\frac{B_x}{4}(\beta^\perp \cdot \Delta u_\perp)(\beta^\perp \cdot \Delta B_\perp) + \frac{1}{4}[\Delta u_x \Delta \tilde{p} - B_x(\beta \cdot \Delta u_\perp)(\beta \cdot \Delta B_\perp)] \\ &= \frac{1}{4}\left(\Delta u_x \Delta \tilde{p} - B_x(\beta \cdot \Delta u_\perp)(\beta \cdot \Delta B_\perp) - B_x(\beta^\perp \cdot \Delta u_\perp)(\beta^\perp \cdot \Delta B_\perp)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\Delta u_x \Delta \tilde{p} - B_x((\beta \cdot \Delta u_\perp)\beta + (\beta^\perp \cdot \Delta u_\perp)\beta^\perp) \cdot \Delta B_\perp\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\Delta u_x \Delta \tilde{p} - B_x \Delta u \cdot \Delta B\right). \end{aligned}$$

This completes the proof.$\diamond$

Positivity and entropy stability

Concerning positivity and entropy stability, the problem for MHD is more complex than for gas dynamics. Indeed, in the general case, the two parameters $\overline{\vartheta}$ and $\overline{C}$ can be arbitrarly chosen. In this case, it is possible to show that all the intermediate states are positive for $\overline{\vartheta}$ small enough and $\overline{C}$ large enough. However, for practical reasons, it is more interesting to use only one parameter for obtaining positivity. To this goal we will keep constant the parameter $\overline{\vartheta}$, i.e., we take $\overline{\vartheta} = \vartheta_a$. With this assumption, all the intermediate states are not always positive, but this is is not a necessary condition. Indeed, noting that in each cell the solution at the next time step is given by (2.4), it is enough to show that only the states V^-, V^+ defined by

$$V^\pm = \frac{\pm 1}{C_f \Delta\tau}\int_0^{\pm C_f \Delta\tau} W(\frac{m}{\Delta\tau}; V_l, V_r)dm = \frac{\pm 1}{C_f}\int_0^{\pm C_f} W(m; V_l, V_r)dm \tag{2.44}$$

are positive. Now, let be ${}^tP = (\vartheta, u_x, u_y, u_z, B_x, B_y, \varepsilon)$. Before giving the main results, we begin with the following lemma which can be easily obtained.

Lemma 3. . *Assume $\overline{\vartheta} = \vartheta_a$. The intermediate states of the Riemann solver have finite limits and one has*

$$\lim_{\overline{C}\to+\infty} P(V_{m,1}) = \begin{pmatrix} \vartheta_m \\ u_{xa} \\ u_{\perp m} \\ B_{\perp m} \\ \varepsilon_m + \dfrac{(\Delta u_x)^2}{8} \end{pmatrix} \qquad for \quad m = l, r.$$

This leads to the following result of positivity.

Proposition 11. . *If $\overline{\vartheta} = \vartheta_a$ and $\overline{C}$ is large enough, the states V^-, V^+ are positive.*

Proof: We have $V^+ = \dfrac{1}{C_f}[C_s V_{r,3} + (C_{al} - C_s)V_{r,2} + (C_f - C_{al})V_{r,1}]$.

On the other hand, C_{al} is constant with $\overline{C}$ and it is easy to see that

$$\lim_{\overline{C}\to+\infty} C_f = +\infty \quad , \quad \lim_{\overline{C}\to+\infty} C_s = |b_x|/\vartheta_a.$$

Then, one has $\lim_{\overline{C}\to+\infty} V^+ = V_{r,1}^\infty$. Consequently, from Lemma 3, V^+ is a positive state for $\overline{C}$ large enough.$\diamond$

Finally, we have the following result of entropy stability.

Proposition 12. . *Let σ be an entropy of the system. The Godunov-type scheme derived from (2.34), with $\overline{\vartheta} = \vartheta_a$, is asymptotically entropy stable in terms of Godunov-type schemes, i.e.,*

$$\lim_{\overline{C}\to+\infty} \frac{2}{\Delta m} \int_{-\Delta m/2}^{\Delta m/2} \sigma(W(m/\tau; V_l, V_r))dm \leq \sigma(V_l) + \sigma(V_r),$$

which is equivalent to $\lim_{\overline{C}\to+\infty} \sum_{k=1,m} \lambda_k \delta\sigma_k \geq 0.$

Proof: Let us denote $W(m/\tau) = W(m/\tau; V_l, V_r)$ and $\sigma_{l,r} = \sigma(V_{l,r})$. In fact, we show a more precise result, i.e.,

$$\lim_{\overline{C}\to+\infty} \frac{1}{C_f\tau} \int_{-C_f\tau}^{0} \sigma(W(m/\tau))dm \leq \sigma_l,$$
$$\lim_{\overline{C}\to+\infty} \frac{1}{C_f\tau} \int_{0}^{C_f\tau} \sigma(W(m/\tau))dm \leq \sigma_r.$$

If $\sigma_{r,i}$ denotes $\sigma(V_{r,i})$, we have for example on the right

$$\int_0^{C_f\tau} \sigma(W(m/\tau))dm = \tau\left[C_s\sigma_{r,3} + (C_{al} - C_s)\sigma_{r,2} + (C_f - C_{al})\sigma_{r,1}\right].$$

Thus, by using the same arguments as for positivity, we see that

$\lim_{\overline{C}\to+\infty} \frac{1}{C_f\tau} \int_0^{C_f\tau} \sigma(W(m/\tau))dm = \sigma(V_{r,1}^\infty) \leq \sigma_r,$

and also $\lim_{\overline{C}\to+\infty} \frac{1}{C_f\tau} \int_{-C_f\tau}^{0} \sigma(W(m/\tau))dm = \sigma(V_{l,1}^\infty) \leq \sigma_l.$

Thus, $\lim_{\overline{C}\to+\infty} \frac{1}{C_f\tau} \int_{-C_f\tau}^{C_f\tau} \sigma(W(m/\tau))dm = \sigma(V_{r,1}^\infty) + \sigma(V_{l,1}^\infty) \leq \sigma_l + \sigma_r.$

This shows that the scheme is asymptotically entropy-preserving.$\diamond$

Remark 3. . *With similar arguments, it can be seen that the scheme is asymptotically entropic in a classical sense, with a numerical entropy flux identically equal to zero, i.e.,*

$$\lim_{\overline{C}\to+\infty} \sigma(V_i^{n+1}) \leq \sigma(V_i^n) \qquad for \quad 2C_f\Delta\tau \leq \Delta m.$$

2.4 Eulerian coordinates case

In the following section, we will develop positive and entropic Godunov-type schemes for gas dynamics and MHD system in Eulerian coordinates. It is straightforward to apply the previous construction to the well-known Roe solver [ROE] for Eulerian coordinates. Indeed, this procedure leads to Godunov-type schemes which naturally extend the Roe solver of [ROE] by relaxing the

average sound speed of the Roe matrix. Unfortunately, this construction does not lead to a positive or entropic scheme. Consequently, we reject this way, and choose to derive Eulerian Riemann solvers from Lagrangian Riemann solvers.

We present in the sequel two methods of construction of Godunov-type schemes. Both are deduced from the Lagrangian schemes studied in the first section. The first method uses a technique developed by the author [GAL8] in order to construct Roe's matrices in Lagrangian (resp. Eulerian) coordinates from Roe's matrices in Eulerian (resp. Lagrangian) coordinates. It establishes a correspondence between the jump of the intermediate states for the Riemann solvers of the two forms. The second method associates to each Lagrangian intermediate state V_k the corresponding Eulerian intermediate state $U(V_k)$. It was already used in [DUB] for obtaining an Eulerian positive Roe matrix from a Lagrangian positive Roe matrix for the gas dynamics system.

2.4.1 General Systems of Conservation Laws

Here, we consider systems of conservation laws in Eulerian form,

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0, \tag{2.45}$$

where $U = \rho n + U^0$, $F = u_x U + G^0$ and $n = {}^t(1, 0, ..., 0)$. The density ρ satisfies $\rho = \vartheta^{-1}$ and u_x is the velocity in the direction x. Moreover, $U_1^0 = G_1^0 = 0$, so that the first equation of such a system (2.45) is the mass conservation law,

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho u_x) = 0.$$

Such systems have a Lagrangian form given by,

$$\partial_\tau V + \partial_m G(V) = 0 \qquad \tau = t \quad , \quad m = \int \rho dx, \tag{2.46}$$

where $V = \vartheta n + V^0$, $V^0 = \vartheta U^0$, $G = -u_x n + G^0$.
The Lagrangian form of the mass conservation law is

$$\partial_\tau \vartheta - \partial_m u_x = 0.$$

This last equation implies that the following relation holds at a shock with slope λ,

$$\Delta u_x + \lambda \Delta \vartheta = 0. \tag{2.47}$$

Moreover, we suppose that (2.46) has an entropy-flux pair (σ, q) leading to an entropy-flux pair for (2.45) equal to $(\Sigma, u_x \Sigma + q)$ with $\Sigma = \rho\sigma$. Let us note that $q \equiv 0$ for the gas dynamics and MHD systems.

2.4.2 Construction by transformation matrices

Godunov-type schemes

In [GAL8], it is shown that if a Roe matrix is known for the Lagrangian system, Roe's matrices can be constructed for the Eulerian system and conversely. The method of [GAL8] uses a transformation matrix denoted $\overline{U}_V^\alpha$ where α is a parameter and satisfying $\Delta U = \overline{U}_V^\alpha \Delta V$. It is given by

$$\overline{U}_V^\alpha = \begin{pmatrix} -\underline{\rho}^2 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ -\underline{\rho}^2(\vartheta U)_\beta^2 & \rho_\alpha & 0 & . & . & 0 & 0 \\ -\underline{\rho}^2(\vartheta U)_\beta^3 & 0 & \rho_\alpha & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ -\underline{\rho}^2(\vartheta U)_\beta^{q-1} & 0 & 0 & . & . & \rho_\alpha & 0 \\ -\underline{\rho}^2(\vartheta U)_\beta^{q} & 0 & 0 & . & . & 0 & \rho_\alpha \end{pmatrix}$$

where q is the system order, $\underline{\rho}^2 = \rho_l \rho_r$ and (α, β) satisfy $\alpha + \beta = 1$.

Let us introduce $\mu = \dfrac{\alpha\rho_l}{\alpha\rho_l + \beta\rho_r}$ and its conjugate $\nu = 1 - \mu = \dfrac{\beta\rho_r}{\alpha\rho_l + \beta\rho_r}$. Let r be some real and X^0 some vector with its first component equal to zero. Then, it is easily seen that the matrix $\overline{U}_V^\alpha$ is characterized by the relation

$$U_V^\alpha(rn + X^0) = \rho_\alpha(-rU_\nu + X^0). \tag{2.48}$$

Finally, using the transformation matrix $\overline{U}_V^\alpha$, we define an Eulerian simple Riemann solver $((U_k)_k, (\Lambda_k)_k)$ by

$$\delta U_k = \overline{U}_V^\alpha \delta V_k \quad , \quad \Lambda_k = \frac{1}{\rho_\alpha}((\rho u_x)_\alpha + \lambda_k) \quad for \quad k = 1, m. \tag{2.49}$$

We now give a result which generalizes to simple Riemann solvers those given in [GAL8] for Roe's solvers.

Proposition 13. . *Let $((V_k)_k, (\lambda_k)_k)$ be a Lagrangian simple Riemann solver. Then, the Eulerian simple Riemann solver $((U_k)_k, (\Lambda_k)_k)$ defined by (2.49) is a Godunov-type Riemann solver if and only if $((V_k)_k, (\lambda_k)_k)$ is a Godunov-type Riemann solver.*

Proof: By using (2.49) and $\Delta G = \sum_{k=1,m} \lambda_k \delta V_k$, we have

$$\begin{aligned} \sum_{k=1,m} \Lambda_k \delta U_k &= \overline{U}_V^\alpha \sum_{k=1,m} \frac{1}{\rho_\alpha}((\rho u_x)_\alpha + \lambda_k)\delta V_k \\ &= \frac{(\rho u_x)_\alpha}{\rho_\alpha} \overline{U}_V^\alpha \sum_{k=1,m} \delta V_k + \frac{1}{\rho_\alpha} \overline{U}_V^\alpha \sum_{k=1,m} \lambda_k \delta V_k \\ = \frac{(\rho u_x)_\alpha}{\rho_\alpha} \overline{U}_V^\alpha \Delta V + \frac{1}{\rho_\alpha} \overline{U}_V^\alpha \Delta G &= \frac{(\rho u_x)_\alpha}{\rho_\alpha} \Delta U + \frac{1}{\rho_\alpha} \overline{U}_V^\alpha \Delta(-u_x n + G^0). \end{aligned}$$

Finally, from (2.48) and noting that $(\rho u_x)_\alpha = \rho_\alpha (u_x)_\mu$, we have

$$\begin{aligned}\sum_{k=1,m} \Lambda_k \delta U_k &= (u_x)_\mu \Delta U + \frac{1}{\rho_\alpha}((\Delta u_x)\rho_\alpha U_\nu + \rho_\alpha \Delta G^0) \\ &= (u_x)_\mu \Delta U + (\Delta u_x) U_\nu + \Delta G^0 = \Delta(u_x U) + \Delta G^0 = \Delta F,\end{aligned}$$

which ends the proof.$\diamond$

2.4.3 Application to Gas Dynamics and MHD

Here, we apply the above principle of construction to gas dynamics and MHD systems. In particular, we show that the corresponding Eulerian schemes are positive and entropic.

As an example, we give below the Eulerian Riemann solver for MHD

$$W_E(x/t) = \begin{cases} U_{l,0} = U_l & if \quad x/t \le \Lambda_f^-, \\ U_{l,1} = U_{l,0} + \phi_f^- \overline{U}_V^\alpha R_f^- & if \quad \Lambda_f^- < x/t \le \Lambda_{al}^-, \\ U_{l,2} = U_{l,1} + \phi_{al}^- \overline{U}_V^\alpha R_{al}^- & if \quad \Lambda_{al}^- < x/t \le \Lambda_s^-, \\ U_{l,3} = U_{l,2} + \phi_s^- \overline{U}_V^\alpha R_s^- & if \quad \Lambda_s^- < x/t \le u_\mu, \\ U_{r,3} = U_{r,2} - \phi_s^+ \overline{U}_V^\alpha R_s^+ & if \quad u_\mu < x/t \le \Lambda_s^+, \\ U_{r,2} = U_{r,1} - \phi_{al}^+ \overline{U}_V^\alpha R_{al}^+ & if \quad \Lambda_s^+ < x/t \le \Lambda_{al}^+, \\ U_{r,1} = U_{r,0} - \phi_f^+ \overline{U}_V^\alpha R_f^+ & if \quad \Lambda_{al}^+ < x/t \le \Lambda_s^+, \\ U_{r,0} = U_r & if \quad \Lambda_s^+ < x/t, \end{cases} \tag{2.50}$$

where $\Lambda_{s,al,f}^\pm = \dfrac{1}{\rho_\alpha}[(\rho u)_\alpha \pm C_{s,al,f}]$.

As in the Lagrangian case, we only keep one parameter and we take $\overline{\vartheta} = \vartheta_a$. In this case, all the intermediate states of W_E are not always positive. However, this is not necessary to ensure that the solutions of the Godunov-type scheme are positive. Indeed, we note that the solution at the next time step is given by (2.4), and that for MHD, we have

$$\frac{\pm 2}{\Delta x} \int_0^{\pm \Delta x/2} W_E(x/\Delta t; U_l, U_r) dx = y U^\pm + (1-y) U_{r,l},$$

where $y = 2\Lambda_f^\pm \Delta t/\Delta x$, and

$$U^\pm = \frac{\pm 1}{\Lambda_f^\pm} \int_0^{\Lambda_f^\pm} W_E(x; U_l, U_r) dx. \tag{2.51}$$

Here, for the sake of simplicity, we have assumed that Λ_f^- is negative and Λ_f^+ is positive, which is true for $\overline{C}$ large enough. Thus, assuming that the CFL condition $2|\Lambda_f^\pm|\Delta t \le \Delta x$ holds, it is enough to show that the states $U^\pm$ are positive, since the set of positive states is convex.

We now state the following result.

Proposition 14. *. Let us consider the Eulerian Riemann solvers induced by the transformation (2.49) and the Lagrangian Riemann solvers (2.16) with $\overline{C}_- = \overline{C}_+$ and (2.34) with $\overline{\vartheta} = \vartheta_a$. Let*

us choose the parameter α such that $\rho_\alpha = min(\rho_l, \rho_r)$. Then, for the MHD system, the states $U^\pm$ (2.51) are positive for $\overline{C}$ large enough, and for gas dynamics, all the intermediates states are positive for $\overline{C}$ large enough. Moreover, these schemes are asymptotically entropic, i.e.,

$$\lim_{\overline{C}\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} \Lambda_k \delta\Sigma_k \geq \Delta(u_x\Sigma). \tag{2.52}$$

Proof: Let us define $(\Lambda^+_{s,al})^+ = max(0, \Lambda^+_{s,al})$. If $\overline{C}$ is large enough, Λ^+_f is positive and by using (2.49), one can show that

$$U^+ = -\overline{U}^\alpha_V [\frac{(\Lambda^+_s)^+}{\Lambda^+_f}\phi^+_s R^+_s + \frac{(\Lambda^+_{al})^+}{\Lambda^+_f}\phi^+_{al} R^+_{al} + \phi^+_f R^+_f] + U_r.$$

Then, noting that the quantities $\phi^+_s R^+_s$, $\phi^+_{al} R^+_{al}$ have finite limits, and that $\lim_{\overline{C}\to+\infty} (\Lambda^+_{s,al})^+/\Lambda^+_f = 0$, we obtain

$$\begin{aligned}
\lim_{\overline{C}\to+\infty} U^+ &= U_r - \overline{U}^\alpha_V \lim_{\overline{C}\to+\infty} \phi^+_f R^+_f \\
&= U_r - \overline{U}^\alpha_V \frac{\Delta u_x}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (u_x)_a \end{pmatrix} = U_r - \rho_\alpha \frac{\Delta u_x}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (u_x)_a \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

From this, we deduce the following limits,

$$\lim_{\overline{C}\to+\infty} \rho^+ = \rho_r, \quad \lim_{\overline{C}\to+\infty} \varepsilon^+ = \varepsilon_r + \rho_\alpha (\frac{\Delta u_x}{2})^2 (1 - \frac{\rho_\alpha}{2\rho_r}). \tag{2.53}$$

Thus, $\lim_{\overline{C}\to+\infty} \varepsilon^+$ is positive if α is such that $2\rho_r \geq \rho_\alpha$. In a same way, $\lim_{\overline{C}\to+\infty} \varepsilon^-$ is positive if α is such that $2\rho_l \geq \rho_\alpha$. Hence, one can take α satisfying $\rho_\alpha = min(\rho_l, \rho_r)$. This ends the proof for the positivity.

Now, we prove the entropy stability. Firstly, by using (2.49), one has

$$\sum_{k=1}^{m} \Lambda_k \delta\Sigma_k = \frac{(\rho u_x)_\alpha}{\rho_\alpha}\Delta\Sigma + \frac{1}{\rho_\alpha}\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \delta\Sigma_k = (u_x)_\mu \Delta\Sigma + \frac{1}{\rho_\alpha}\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \delta\Sigma_k.$$

Thus, it is enough to prove that $\lim_{\overline{C}\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \delta\Sigma_k \geq \rho_\alpha \Sigma_\nu \Delta u_x$

$$\begin{aligned}
&\iff \lim_{\overline{C}\to+\infty} (\lambda_1 \delta\Sigma_1 + \lambda_m \delta\Sigma_m) \geq \rho_\alpha \Sigma_\nu \Delta u_x - \lim_{\overline{C}\to+\infty} (\sum_{k=2}^{m-1} \lambda_k \delta\Sigma_k) \\
&\iff \Sigma_l + \Sigma_r \geq \Sigma_2 + \Sigma_m + \frac{1}{\lambda_m}(\rho_\alpha \Sigma_\nu \Delta u_x - \lim_{\overline{C}\to+\infty} (\sum_{k=2}^{m-1} \lambda_k \delta\Sigma_k)),
\end{aligned}$$

since for gas dynamics and MHD equations, one has $-\lambda_1 = \lambda_m > 0$.
Also, noting that $\lim_{\overline{C}\to+\infty} \lambda_k/\lambda_m = 0$ for $k = 2, m-1$, we see that

$$\lim_{\overline{C}\to+\infty} \frac{1}{\lambda_m}(\rho_\alpha \Sigma_\nu \Delta u_x - \sum_{k=2}^{m-1} \lambda_k \delta\Sigma_k) = 0.$$

Consequently, one only needs to show

$$\lim_{\overline{C}\to+\infty} \Sigma_2 \leq \Sigma_l \quad , \quad \lim_{\overline{C}\to+\infty} \Sigma_m \leq \Sigma_r,$$

which comes from (2.53). The result follows.$\diamond$

2.4.4 Construction by canonical transformation of intermediate states

Godunov-type schemes

Now, let us consider a general simple Riemann solver for the Lagrangian system (2.46), defined by the slopes $(\lambda_k)_{k=1,m}$ and the intermediate states below

$$\left\{ \begin{array}{lll} V_1 & = V_l \quad if \quad m/\tau < \lambda_1, & \\ V_k & \quad if \quad \lambda_{k-1} < m/\tau \leq \lambda_k \quad for \quad k = 2, m, & \\ V_{m+1} & = V_r \quad if \quad \lambda_m \leq m/\tau. & \end{array} \right. \tag{2.54}$$

First, the intermediate states are assumed to satisfy the relations

$$\delta(u_x)_k + \lambda_k \delta\vartheta_k = 0. \qquad (H1)$$

Note that (H1) is a discrete analogue to (2.47), and that it is satisfied by the solvers designed in the third paragraph.

Moreover, the following natural hypothesis is used.

$$\vartheta_k \geq 0 \quad for \quad k = 1, m. \qquad (H2)$$

Let us denote $X_{\alpha,k} = \alpha X_k + \beta X_{k+1}$ for any $(X_k)_k$. Then, from (H1) we obtain the following relations

$$(u_x)_{\alpha,k} + \lambda_k \vartheta_{\alpha,k} = (u_x)_k + \lambda_k \vartheta_k = (u_x)_{k+1} + \lambda_k \vartheta_{k+1},$$

which permit to define the slopes

$$\Lambda_k = (u_x)_{\alpha,k} + \lambda_k \vartheta_{\alpha,k} \quad for \quad k = 1, m. \tag{2.55}$$

Using (H2), we deduce that the sequence $(\Lambda_k)_k$ is increasing. This allows us to consider the following Eulerian simple Riemann solver

$$\left\{\begin{array}{lcll} U_1 & = & U_l & = U(V_l) \quad if \quad x/t < \Lambda_1, \\ U_k & = & U(V_k) & if \quad \Lambda_{k-1} < x/t \leq \Lambda_k \quad for \quad k = 2, m, \\ U_{m+1} & = & U_r & = U(V_r) \quad if \quad \Lambda_m \leq x/t. \end{array}\right. \tag{2.56}$$

We now give the first result concerning the above solver.

Proposition 15. . *Assume that (H1) and (H2) are true.*
Then, the Lagrangian simple Riemann solver (2.54) is a Godunov-type Riemann solver if and only if the Eulerian simple Riemann solver (2.56) is a Godunov-type Riemann solver.

Proof: Let us suppose that (2.54) induces a Godunov-type scheme. This gives $\Delta G = \sum_{k=1,m} \lambda_k \delta V_k$. Then, one has

$$\begin{array}{rcl} \Delta F & = & \Delta(u_x U + G^0) = \Delta(\rho u_x)n + \Delta(u_x U^0) + \Delta G^0 \\ & = & \Delta(\rho u_x)n + \sum_k \delta(u_x U^0)_k + \Delta G^0 \\ & = & \Delta(\rho u_x)n + \sum_k [(u_x)_{\alpha,k}\delta U_k^0 + \delta(u_x)_k U_{\beta,k}^0] + \sum_k \lambda_k \delta V_k^0, \end{array}$$

and, since $V^0 = \vartheta U^0$, we get $\delta V_k^0 = \vartheta_{\alpha,k}\delta U_k^0 + \delta\vartheta_k U_{\beta,k}^0$.
From this, and since (H1) is true, we deduce that

$$\begin{array}{rcl} \Delta F & = & \Delta(\rho u_x)n + \sum_k [(u_x)_{\alpha,k} + \lambda_k \vartheta_{\alpha,k}]\delta U_k^0 + \sum_k [\delta(u_x)_k + \lambda_k \delta\vartheta_k] U_{\beta,k}^0 \\ & = & \Delta(\rho u_x)n + \sum_k [(u_x)_{\alpha,k} + \lambda_k \vartheta_{\alpha,k}]\delta U_k^0 = \Delta(\rho u_x)n + \sum_k \Lambda_k \delta U_k^0. \end{array} \tag{2.57}$$

Moreover, noting that, $\vartheta_{\alpha,k}\delta\rho_k + \rho_{\beta,k}\delta\vartheta_k = 0$, one obtains

$$\begin{array}{rcl} \Delta(\rho u_x) & = & \sum_k \delta(\rho u_x)_k = \sum_k [(u_x)_{\alpha,k}\delta\rho_k + \rho_{\beta,k}\delta(u_x)_k] \\ & = & \sum_k [(u_x)_{\alpha,k}\delta\rho_k - \lambda_k \rho_{\beta,k}\delta\vartheta_k] \\ & = & \sum_k [(u_x)_{\alpha,k} + \lambda_k \vartheta_{\alpha,k}]\delta\rho_k = \sum_k \Lambda_k \delta\rho_k. \end{array} \tag{2.58}$$

Thus, by using (2.57) and (2.58), one has

$$\Delta F = \sum_k \Lambda_k \delta\rho_k n + \sum_k \Lambda_k \delta U_k^0 = \sum_k \Lambda_k \delta U_k.$$

The proof is complete.◇

By construction, we have the following immediate result of positivity.

Corollary 2. . *The Lagrangian simple Riemann solver (2.54) is positive if and only if the Eulerian simple Riemann solver (2.56) is positive.*

Finally, we have the following result for entropy stability.

Proposition 16. . *Suppose that (H1) and (H2) are true.*
Then, Lagrangian simple Riemann solver (2.54) is an entropic Godunov-type Riemann solver if and only if the Eulerian simple Riemann solver (2.56) is an entropic Godunov-type Riemann solver.

Proof: Let us suppose that the Lagrangian scheme is entropy-preserving. Then, we have

$$\sum_{k=1,m} \lambda_k \delta\sigma_k \geq \Delta q. \tag{2.59}$$

On the one hand, we have

$$\begin{aligned} \sum_{k=1,m} \Lambda_k \delta\Sigma_k &= \sum_{k=1,m} [(u_x)_{\alpha,k} + \lambda_k \vartheta_{\alpha,k}]\delta\Sigma_k \\ &= \sum_{k=1,m} [(u_x)_{\alpha,k}\delta\Sigma_k + \lambda_k(\delta(\vartheta\Sigma)_k - \Sigma_{\beta,k}\delta\vartheta_k)] \\ &= \sum_{k=1,m} [(u_x)_{\alpha,k}\delta\Sigma_k + \lambda_k(\delta\sigma_k - \Sigma_{\beta,k}\delta\vartheta_k)]. \end{aligned} \tag{2.60}$$

and on the other hand, by using (H1), one obtains

$$\begin{aligned} \Delta(u_x\Sigma) &= \sum_{k=1,m} \delta(u_x\Sigma)_k = \sum_{k=1,m} [(u_x)_{\alpha,k}\delta\Sigma_k + \Sigma_{\beta,k}\delta(u_x)_k] \\ &= \sum_{k=1,m} [(u_x)_{\alpha,k}\delta\Sigma_k - \lambda_k\Sigma_{\beta,k}\delta\vartheta_k]. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Then, (2.60), (2.61) give the identity $\sum_{k=1,m} \Lambda_k \delta\Sigma_k = \sum_{k=1,m} \lambda_k \delta\sigma_k + \Delta(u_x\Sigma)$.
Consequently, from (2.59) one has $\sum_{k=1,m} \Lambda_k \delta\Sigma_k \geq \Delta q + \Delta(u_x\Sigma)$.
This ends the proof.$\diamond$

Finally, we conclude with a result whose proof is similar to the previous one.

Proposition 17. . *Let us assume that (H_1), (H_2) are satisfied and that the Lagrangian simple Riemann solver depends on a parameter p.*
Then, the Lagrangian simple Riemann solver (2.54) is asymptotically entropic with respect to p if and only if the Eulerian simple Riemann solver (2.56) is asymptotically entropic with respect to p, i.e.,

$$\lim_{p\to p_\infty} \sum_{k=1,m} \lambda_k \delta\sigma_k \geq \Delta q \Longleftrightarrow \lim_{p\to p_\infty} \sum_{k=1,m} \Lambda_k \delta\Sigma_k \geq \Delta(u_x\Sigma + q).$$

Application to Gas dynamics and MHD equations

Now, with the above construction it is possible to define Eulerian simple Riemann solvers with nice properties for gas dynamics and MHD.

First, let us consider the Riemann solver for gas dynamics (2.16). Looking at (2.16) and the expressions of vectors $R_\pm$ (2.15), it is easy to see that the intermediate specific volumes $\vartheta^*_{l,r}$ are positive for $\overline{C}_\pm$ large enough, and to show the following identities,

$$(u_x)^*_l - (u_x)_l - \overline{C}_-(\vartheta^*_l - \vartheta_l) = 0 \quad , \quad (u_x)^*_r - (u_x)_r + \overline{C}_+(\vartheta^*_r - \vartheta_r) = 0.$$

Also, a short calculation gives $(u_x)^*_l = (u_x)^*_r = \overline{u}_x$, with $\overline{u}_x$ given by (2.18).
Thus, (H1) is true. This leads to the following result.

Proposition 18. . *The Lagrangian simple Riemann solver (2.16) induces an Eulerian simple Riemann solver for gas dynamics which is positive and entropic for $\overline{C}_\pm$ large enough.*

Now, let us consider the MHD case. The Eulerian Riemann solver induced by (2.34) takes the form below.

$$W_E(x/t) = \begin{cases} U_{l,0} = U_l & if \quad x/t \le \Lambda^-_f, \\ U_{l,1} = U(V_{l,1}) & if \quad \Lambda^-_f < x/t \le \Lambda^-_{al}, \\ U_{l,2} = U(V_{l,2}) & if \quad \Lambda^-_{al} < x/t \le \Lambda^-_s, \\ U_{l,3} = U(V_{l,3}) & if \quad \Lambda^-_s < x/t \le \Lambda_0, \\ U_{r,3} = U(V_{r,3}) & if \quad \Lambda_0 < x/t \le \Lambda^+_s \\ U_{r,2} = U(V_{r,2}) & if \quad \Lambda^+_s < x/t \le \Lambda^+_{al}, \\ U_{r,1} = U(V_{r,1}) & if \quad \Lambda^+_{al} < x/t \le \Lambda^+_s, \\ U_{r,0} = U_r & if \quad \Lambda^+_s < x/t, \end{cases} \tag{2.62}$$

where, for this tranformation, Λ_0, $\Lambda^\pm_{s,al,f}$ are given by (2.55).

As for the first transformation, in order to ensure that the induced Godunov-type scheme is positive, we only have to show that the states $U^\pm$ defined by (2.51) are positive.

In the same way as for the first transformation, we give the above result.

Proposition 19. . *For the MHD system, the states $U^\pm$ induced by (2.62) with $\overline{\vartheta} = \vartheta_a$ are positive for $\overline{C}$ large enough. Otherwise, the induced Godunov-type scheme is asymptotically entropic, i.e.,*

$$\lim_{\overline{C}\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} \Lambda_k \delta\Sigma_k \ge \Delta(u_x S).$$

Proof: Let be $(\Lambda^+_{s,al})^+ = max(0, \Lambda^+_{s,al})$. If $\overline{C}$ is large enough, Λ^+_f is positive and one has

$$U^+ = [\frac{(\Lambda^+_s)^+}{\Lambda^+_f}(U_{r,3} - U_{r,2}) + \frac{(\Lambda^+_{al})^+}{\Lambda^+_f}(U_{r,2} - U_{r,1})] + U_{r,1}.$$

Once again, since $U_{r,2}$, $U_{r,3}$ have finite limits, and also,

$$\lim_{\overline{C}\to+\infty} \Lambda^+_f = +\infty \quad , \quad \lim_{\overline{C}\to+\infty} \frac{(\Lambda^+_{s,al})^+}{\Lambda^+_f} = 0,$$

we have $\lim_{\overline{C}\to+\infty} U^+ = \lim_{\overline{C}\to+\infty} U_{r,1} = U^\infty_{r,1} = U(V^\infty_{r,1})$,
which is a positive state from Lemma 3.

Finally, Propositions 12 and 17 directly imply that the scheme is asymptotically entropic.$\diamond$

Remark 4. . *Both simple eulerian solvers (2.50) and (2.62) are exact at material contact discontinuities. Indeed, for solver (2.50), if the two states are separated by a material contact discontinuity, one has* $\phi^{\pm}_{al,f,s} = 0$, *which directly leads to* $U_{l,i} = U_l$ *and* $U_{r,i} = U_r$ *for* $i = 0, 3$. *For solver (2.62), one has* $V_{l,i} = V_l$ *and* $V_{r,i} = V_r$ *for* $i = 0, 3$, *thus* $U_{l,i} = U(V_{l,i}) = U(V_l) = U_l$ *and* $U_{r,i} = U(V_{r,i}) = U(V_r) = U_r$ *for* $i = 0, 3$.

2.5 MHD simple Riemann solvers with two intermediate states

In the fourth section, we have derived Eulerian Godunov-type schemes from the Lagrangian Godunov-type schemes of the third section, both for gas dynamics and MHD systems. Here, we restrict our study to the Riemann solvers built with the canonical transformation $V \rightarrow U(V)$. For gas dynamics, the constructed scheme is satisfactory and numerical tests give good results. Moreover, the scheme is very easy to implement. For MHD, the scheme also provides good results but it has the same complexity as the Roe scheme. This leads us to look for simpler schemes. Moreover, we want these solvers to satisfy properties (H1), (H2) allowing us to derive Eulerian schemes with the same properties. To this goal, we could think of the HLL scheme, which is the simpler form of a Riemann solver and can be shown to be positive and entropic for sufficiently large slopes. But unfortunately, if condition (H1) is imposed, we have too many constraints to satisfy and the construction is not possible. Otherwise, the HLL scheme does not preserve contact discontinuities. Consequently, in the following we will look for solvers with two intermediate states, satisfying (H1) and preserving material contact discontinuities. Before beginning the construction, let us note that we restrict to the most interesting case $B_x \neq 0$. Indeed, the case $B_x = 0$ is similar to the gas dynamics one.

Now, in order to simplify, let us assume that the slopes of the solver are $-\overline{C}$, 0, $+\overline{C}$, and let us denote the left and right intermediate states by V_l^*,V_r^*. Since the solver induces a Godunov-type scheme, one has

$$-\overline{C}(V_l^* - V_l) + \overline{C}(V_r - V_r^*) = \Delta G \Longleftrightarrow V_l^* + V_r^* = V_l + V_r - \frac{\Delta G}{\overline{C}}. \tag{2.63}$$

Moreover, (H1) leads to the following relations

$$(u_x)_l^* - \overline{C}\vartheta_l^* = (u_x)_l - \overline{C}\vartheta_l \quad , \quad (u_x)_r^* + \overline{C}\vartheta_r^* = (u_x)_r + \overline{C}\vartheta_r, \tag{2.64}$$

$$(u_x)_l^* = (u_x)_r^*. \tag{2.65}$$

The two first equations of (2.63) and (2.64) give the following linear system

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \vartheta_l^* + \vartheta_r^* & = & \vartheta_l + \vartheta_r + \dfrac{\Delta u_x}{\overline{C}}, \\ (u_x)_l^* + (u_x)_r^* & = & (u_x)_l + (u_x)_r - \dfrac{\Delta \tilde{p}}{\overline{C}}, \\ (u_x)_l^* - \overline{C}\vartheta_l^* & = & (u_x)_l - \overline{C}\vartheta_l, \\ (u_x)_r^* + \overline{C}\vartheta_r^* & = & (u_x)_r + \overline{C}\vartheta_r. \end{array} \right.$$

This system is non-singular and has the following solutions

$$\begin{gathered}\vartheta_l^* = \vartheta_l + \frac{1}{2\overline{C}}(\Delta u_x - \Delta\tilde{p}/\overline{C}) \quad , \quad \vartheta_r^* = \vartheta_r + \frac{1}{2\overline{C}}(\Delta u_x + \Delta\tilde{p}/\overline{C}), \\ (u_x)_l^* = (u_x)_r^* = u_x^* = 1/2((u_x)_l + (u_x)_r - \frac{\Delta\tilde{p}}{\overline{C}}).\end{gathered} \tag{2.66}$$

Here, we note that the relation (2.65) is true.

Now, in order to close the system, we impose some relations which are true at a material contact discontinuity, i.e.,

$$(u_\perp)_l^* = (u_\perp)_r^* = u_\perp^* \quad , \quad (B_\perp)_l^* = (B_\perp)_r^* = B_\perp^*. \tag{2.67}$$

By using these relations together with (2.63), we get easily

$$\begin{gathered}u_\perp^* = (u_\perp)_a + B_x\frac{\Delta B_\perp}{2\overline{C}}, \\ (\vartheta_l^* + \vartheta_r^*)B_\perp^* = \vartheta_l(B_\perp)_l + \vartheta_r(B_\perp)_r + B_x\frac{\Delta u_\perp}{\overline{C}}.\end{gathered} \tag{2.68}$$

Then, there remains the last equation of (2.63) in order to determine the intermediate internal energies ε_l^* and ε_r^*. It can be rewritten

$$\varepsilon_l^* + \varepsilon_r^* = \tilde{e}_l + \tilde{e}_r - (u^*)^2 - \frac{1}{2}(\vartheta_l^* + \vartheta_r^*)(B^*)^2 - \frac{\Delta(\tilde{p}u_x - B_xB\cdot u)}{\overline{C}}. \tag{2.69}$$

At this stage, there is an infinity of possibilities to evaluate ε_l^* and ε_r^*. In the sequel, we will perform this in two ways.

2.5.1 HLLC-type scheme

A priori, the most natural way to compute ε_l^* and ε_r^* is to impose equal intermediate pressures, i.e. $p_l^* = p_r^* = p^*$. Indeed, this relation is true at a contact discontinuity. In fact, this choice corresponds to the HLLC scheme [TORO] applied to the Lagrangian MHD. We also refer to [BEZ] who has used this approach, but with different expressions for ϑ_l^*, ϑ_r^*.

In this case, the positivity is easy to fulfill. Indeed, we have for an ideal gas,

$$\frac{\vartheta_l^* + \vartheta_r^*}{\gamma - 1}p^* = \tilde{e}_l + \tilde{e}_r - (u^*)^2 - \frac{1}{2}(\vartheta_l^* + \vartheta_r^*)(B^*)^2 - \frac{\Delta(\tilde{p}u_x - B_xB\cdot u)}{\overline{C}}. \tag{2.70}$$

Passing to the limit, one obtains $\lim_{\overline{C}\to+\infty}\vartheta_{l,r}^* = \vartheta_{l,r}$, and

$$\lim_{\overline{C}\to+\infty} p^* = \frac{\vartheta_l p_l + \vartheta_r p_r}{\vartheta_l + \vartheta_r} + \frac{\gamma - 1}{4(\vartheta_l + \vartheta_r)}(\Delta u)^2 + \frac{(\gamma-1)\vartheta_l\vartheta_r}{2(\vartheta_l + \vartheta_r)^2}(\Delta B)^2,$$

which is positive. Unfortunately, if $\sigma = p\vartheta^\gamma$ and $\Delta u = \Delta B = 0$, an easy calculation shows that

$$\lim_{\overline{C}\to+\infty}\left(\frac{\sigma_l^* + \sigma_r^*}{\sigma_l + \sigma_r} - 1\right) = -\vartheta_l\vartheta_r\frac{\Delta p\Delta\vartheta^{\gamma-1}}{(\vartheta_l + \vartheta_r)(p_l\vartheta_l^\gamma + p_r\vartheta_r^\gamma)},$$

which can be positive or negative. Thus, we have shown the result below.

Proposition 20. . *The HLLC-type simple Riemann solver induced by (2.70) is positive for $\overline{C}$ large enough, but is not asymptotically entropic. It induces an HLLC-type simple Riemann solver for Eulerian MHD which is positive for $\overline{C}$ large enough, but not asymptotically entropic. Moreover, both lagrangian and eulerian HLLC-type simple Riemann solvers are exact at material contact discontinuities.*

2.5.2 Entropic scheme

Here, we suggest a choice for ε_l^* and ε_r^* which is obtained by analogy with gas dynamics. It is obtained in such a way that it gives exactly the intermediate internal energies of the gas dynamics case when $(u_\perp)_{l,r}$ and $B_{l,r}$ are identically equal to zero. In the gas dynamics case, it is easy to see that the intermediate internal energies are given by

$$\begin{aligned}(\varepsilon_l^*)_{gd} &= \varepsilon_l + \frac{(u_x)_l^2}{2} - \frac{(u_x^*)^2}{2} + \frac{1}{2\overline{C}^2}(\Delta p - \overline{C}\Delta u_x)(p_a - (u_x)_a\overline{C}),\\ (\varepsilon_r^*)_{gd} &= \varepsilon_r + \frac{(u_x)_r^2}{2} - \frac{(u_x^*)^2}{2} - \frac{1}{2\overline{C}^2}(\Delta p + \overline{C}\Delta u_x)(p_a + (u_x)_a\overline{C}).\end{aligned}$$

Now, let us note $\delta\varepsilon_{l,r}^* = \varepsilon_{l,r}^* - (\varepsilon_{l,r}^*)_{gd}$.
By using (2.69), we obtain $\delta\varepsilon_l^* + \delta\varepsilon_r^* = X$, where

$$\begin{aligned}X &= \frac{1}{2}\left[((u_\perp)_l^2 + (u_\perp)_r^2 - 2(u_\perp^*)^2) + (\vartheta_l B_l^2 + \vartheta_r B_r^2 - (\vartheta_l^* + \vartheta_r^*)(B^*)^2)\right]\\ &\quad -\frac{1}{2\overline{C}}\Delta(\frac{B^2 u_x}{2} - B_x B\cdot u).\end{aligned}$$

Now, we have to distribute the quantity X on each side. We do this in the simplest way, i.e., we take, $\delta\varepsilon_l^* = \delta\varepsilon_r^* = \dfrac{X}{2}$.
Thus, our choice is the following,

$$\begin{aligned}\varepsilon_l^* &= \varepsilon_l + \frac{(u_x)_l^2}{2} - \frac{(u_x^*)^2}{2} + \frac{1}{2\overline{C}^2}(\Delta p - \overline{C}\Delta u_x)(p_a - (u_x)_a\overline{C})\\ &+ \frac{1}{4}((u_\perp)_l^2 + (u_\perp)_r^2 - 2(u_\perp^*)^2) + \frac{1}{4}(\vartheta_l B_l^2 + \vartheta_r B_r^2 - (\vartheta_l^* + \vartheta_r^*)(B^*)^2)\\ &- \frac{1}{2\overline{C}}\Delta(\frac{B^2 u_x}{2} - B_x B\cdot u),\\ \varepsilon_r^* &= \varepsilon_r + \frac{(u_x)_r^2}{2} - \frac{(u_x^*)^2}{2} - \frac{1}{2\overline{C}^2}(\Delta p + \overline{C}\Delta u_x)(p_a + (u_x)_a\overline{C})\\ &+ \frac{1}{4}((u_\perp)_l^2 + (u_\perp)_r^2 - 2(u_\perp^*)^2) + \frac{1}{4}(\vartheta_l B_l^2 + \vartheta_r B_r^2 - (\vartheta_l^* + \vartheta_r^*)(B^*)^2)\\ &- \frac{1}{2\overline{C}}\Delta(\frac{B^2 u_x}{2} - B_x B\cdot u).\end{aligned} \tag{2.71}$$

Now, we give the main result of this section.

Proposition 21. . *The Lagrangian simple Riemann solver induced by (2.66), (2.67), (2.68), (2.71) is positive and entropic for $\overline{C}$ large enough. It induces an Eulerian simple Riemann solver*

which is positive and entropic for $\overline{C}$ large enough. Moreover, both lagrangian and eulerian solvers are exact at contact discontinuities.

Proof: Firstly, let us denote $B^*_\infty = \lim_{\overline{C}\to+\infty} B^* = \dfrac{\vartheta_l B_l + \vartheta_r B_r}{\vartheta_l + \vartheta_r}$.
Then, for instance, we have on the left,

$$\begin{aligned}
\lim_{\overline{C}\to+\infty} \varepsilon_l^* &= \varepsilon_l + \frac{(u_x)_l^2}{2} - \frac{((u_x)_a)^2}{2} + \frac{(u_x)_a \Delta u_x}{2} \\
&+ \frac{1}{4}((u_\perp)_l^2 + (u_\perp)_r^2 - 2(u_\perp)_a^2) \\
&+ \frac{1}{4}(\vartheta_l B_l^2 + \vartheta_r B_r^2 - (\vartheta_l + \vartheta_r)(B^*_\infty)^2) \\
&= \varepsilon_l + \frac{(\Delta u)^2}{8} + \frac{\vartheta_l \vartheta_r}{\vartheta_l + \vartheta_r}\frac{(\Delta B)^2}{4},
\end{aligned} \tag{2.72}$$

which is positive for $\overline{C}$ large enough.

Concerning entropy stability, we only give the proof in the ideal gas case. With this hypothesis, we have to show

$$\varepsilon_l^* (\vartheta_l^*)^{\gamma-1} \geq \varepsilon_l \vartheta_l^{\gamma-1}. \tag{2.73}$$

On the one hand, if $\Delta u \neq 0$ or $\Delta B \neq 0$, it is clear from (2.66), (2.72) that (2.73) will be true for $\overline{C}$ large enough.
On the other hand, if $\Delta u = 0$ and $\Delta B = 0$, let us set,

$$u_{\perp l} = u_{\perp r} = u_\perp \quad , \quad (u_x)_l = (u_x)_r = u_x \quad , \quad B_l = B_r = B.$$

Then, one has $B^* = B$, $u^*_\perp = u_\perp$, $\vartheta_l^* + \vartheta_r^* = \vartheta_l + \vartheta_r$,
and also,

$$\vartheta_l^* = \vartheta_l - \frac{\Delta p}{2\overline{C}^2} \quad , \quad u_x^* = u_x - \frac{\Delta p}{2\overline{C}}.$$

Consequently, if $\pi_l = 4p_a - \Delta p$. we get,

$$\varepsilon_l^* = \varepsilon_l + \frac{u_x^2}{2} - \frac{(u_x^*)^2}{2} + \frac{1}{2\overline{C}^2}\Delta p(p_a - u_x\overline{C}) = \varepsilon_l + \frac{\pi_l}{8\overline{C}^2}\Delta p.$$

This allows us to express the product $\varepsilon_l^*(\vartheta_l^*)^{\gamma-1}$, and this leads to

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon_l^*}{\varepsilon_l}\left(\frac{\vartheta_l^*}{\vartheta_l}\right)^{\gamma-1} &= (1 + \frac{\pi_l}{8\varepsilon_l\overline{C}^2}\Delta p)(1 - \frac{\Delta p}{2\vartheta_l\overline{C}^2})^{\gamma-1} \\
&= 1 + \frac{\pi_l}{8\varepsilon_l\overline{C}^2}\Delta p - \frac{\gamma-1}{2\vartheta_l\overline{C}^2}\Delta p + O(1/\overline{C}^4) \\
&= 1 + \frac{(\Delta p)^2}{8\varepsilon_l\overline{C}^2} + O(1/\overline{C}^4),
\end{aligned}$$

which gives the proof.$\diamond$

Remark 5. . *The above results can be extended without difficulties to the case of discontinuities of arbitrary slopes $-\overline{C}_-, 0, +\overline{C}_+$.*

2.6 Conclusion

In this paper, we have developed entropic Godunov-type schemes both for the lagrangian and eulerian systems of gas dynamics and MHD equations. They are based on simple Riemann solvers for which an easy characterization is obtained and Roe solvers can be considered as particular cases. In lagrangian coordinates, we have shown that the numerical flux of the solver (2.16) for gas dynamics and (2.34) for MHD is equal to the continuous flux evaluated at an average point. This is a remarkable property, and one may think that it can be extended to more general systems. Probably, the key point is that gas dynamics and MHD equations belong to the class of systems whose entropy flux is equal to zero in lagrangian coordinates. This point is currently under investigation by the author [GAL9], and let us denote that this class of systems has already been studied in [B-D]. Numerical tests made by the author show that all schemes given in this paper behave well. Practically, for gas dynamics, it is enough to choose $\overline{C}_- = \overline{C}_+ = \overline{C}$. Unfortunatly, even in this simple case, the author has not been able to obtain analytical expressions of $\overline{C}$ in order to have entropy stability. However, there exists some cases for which it is possible. For example, when $\gamma = 2$ and $\Delta u_x = 0$, we obtain the following stability condition, $\overline{C} \geq Max(C_l X_l, C_r X_r)$, where $X_l^2 = \dfrac{p_r + 3p_l}{4p_l}$, $X_r^2 = \dfrac{p_l + 3p_r}{4p_r}$. We note that this is a reasonable condition. In the general case, the condition must be obtained by an iterative procedure whose convergence is generally obtained in two or three steps. For MHD equations, the solver (2.34) has exactly the same complexity as the Roe scheme of [CGR] because it differs from it by the value of $\overline{C}$. The added complexity is due to the search for this value. But the entropy stability is only asymptotic and in this case we look for $\overline{C}_p$ giving the positivity of the states (2.44) by an iterative procedure and we take $\overline{C} = Max(C_l, C_r, \overline{C}_p)$. With this choice, the scheme satisfactorily works. However, as it is explained at the end of subsection 2.3.2, it is possible to obtain entropy stability when the specific volume $\overline{\vartheta}$ is also relaxed, but this would lead to a very complex procedure. This is the reason why we have developed the simple solver of section 2.5. Once again, for the solver defined by (2.66), (2.67), (2.68), (2.71) it is not possible to have exact entropy condition and an iterative procedure must be used. Numerical tests indicate that the value obtained for $\overline{C}$ is generally of the same order of $Max(C_l, C_r, \overline{C}_{Roe})$ and numerical solutions do not reveal excessive numerical dissipation. In this paper, two methods of construction of eulerian solvers from lagrangian solvers were developed. Although the transformation of sub-section 2.4.2 is easier to implement, and transforms a lagrangian Roe matrix into an eulerian Roe matrix [GAL8], a parameter α must be chosen. On the other hand, it is theoretically less interesting than that of sub-section 2.4.4 because, contrary to the latter, it does not preserve the property of entropy stability. Numerical experiments show that this eulerian solver is approximately between 1.3 and 1.5 more expensive than the Roe solver of [CG]. Moreover, this solver can be naturally extended for multi-species and bi-temperature MHD models, the properties of positivity and entropy stability being preserved. Finally, extension to Powell [POWELL] and Janhunen [JAN] systems for multidimensional eulerian MHD have also been performed in [GAL9].

Chapitre 3

Schémas équilibre et Solveurs de Riemann simples entropiques pour des systèmes hyperboliques avec terme source : application à la Dynamique des Gaz avec gravité et au système de Saint-Venant

3.1 Introduction

Le but de cette étude est de développer des schémas de type Godunov pour des systèmes hyperboliques avec terme source et possédant à la fois une forme lagrangienne et une forme eulérienne. On se réfèrera à [DES, DUBOIS] où de tels systèmes sont étudiés dans le cas sans second membre. Des exemples avec terme source sont fournis par la Dynamique des gaz avec gravité et le système de Saint-Venant. Dans une première partie, on généralise la notion classique de schémas de type Godunov [HLL, RAV] pour de tels systèmes et on caractérise la classe particulière des solveurs simples déjà introduite dans [GAL2] pour les systèmes sans second membre. Dans une seconde partie, on montre l'équivalence sous certaines conditions naturelles entre solveurs simples pour la forme eulérienne et solveurs simples pour la forme lagrangienne. L'équivalence pour les schémas entropiques est aussi montrée, généralisant ainsi les résultats de [GAL4]. On considère ensuite le problème des solutions équilibre pour les systèmes avec terme source. Ce problème a déjà été abordé dans de nombreux travaux [BER-VAZ, CAR-LER, GAL1, GALL, GNVC, GL1, GL2, JIN, LER, LEV, PER1, PER2, ZHOU] et une bibliographie plus complète pourra être trouvée chez ces auteurs. Enfin, dans la dernière partie, on étudie successivement le système de la Dynamique des gaz avec gravité et le système de Saint-Venant. On construit des schémas de type Godunov positifs et entropiques pour les formes eulérienne et lagrangienne de ces deux systèmes. Ces schémas sont des schémas équilibres dans le sens où ils

préservent les solutions stationnaires.

3.2 Schémas de type Godunov pour un système hyperbolique avec un terme source

Dans ce paragraphe, nous décrivons de quelle façon il est possible d'étendre au cas d'un système hyperbolique avec terme source la notion de schéma de type Godunov.
Considérons un système hyperbolique général avec terme source de la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{P}(\mathbf{U}, x, t) \\ \mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}_0(x) \end{cases} \tag{3.1}$$

L'approche la plus classique pour résoudre ce système est de discrétiser la dérivée du flux $\partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U})$ de la même façon que dans le cas conservatif et le terme source par sa valeur au point considéré ou encore par une approximation consistante dépendante des points voisins.
Considérons une discrétisation de l'espace $(x_{i+1/2})_i$ et notons $\Delta x_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ ainsi que $x_i = (x_{i-1/2} + x_{i+1/2})/2$. Etant donnée une approximation $(\mathbf{U}_i^n)_{i,n}$ de la solution de (3.1) constante à chaque instant t^n dans chaque intervalle $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, un exemple de solution numérique pour (3.1) est donne par le schéma ci-dessous :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_i}(\mathbf{H}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n) - \mathbf{H}(\mathbf{U}_{i-1}^n, \mathbf{U}_i^n)) + \Delta t \overline{\mathbf{P}}(\mathbf{U}_{i-1}^n, \mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, t^n, t^{n+1}), \tag{3.2}$$

où $\mathbf{H}$ est un flux numérique consistant, i.e. $\mathbf{H}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \mathbf{F}(\mathbf{U})$ et $\overline{\mathbf{P}}$ une approximation consistante du terme source, i.e. : $\overline{\mathbf{P}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}, \mathbf{U}, x, x, x, t, t) = \mathbf{P}(\mathbf{U}, x, t)$.
On supposera aussi que ce système possède un couple entropie-flux (η, q), i.e., il existe η strictement convexe tel que $\nabla\eta\nabla\mathbf{F} = \nabla q$. On pose alors $p(\mathbf{U}, x, t) = \nabla\eta \cdot \mathbf{P}(\mathbf{U}, x, t)$ et on considèrera des solutions entropiques vérifiant l'inégalité d'entropie suivante,

$$\partial_t \eta + \partial_x q \leq p. \tag{3.3}$$

On cherchera alors des solutions numériques vérifiant l'inégalité d'entropie numérique :

$$\eta_i^{n+1} \leq \eta_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(Q(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n) - Q(\mathbf{U}_{i-1}^n, \mathbf{U}_i^n)) + \Delta t \overline{p}(\mathbf{U}_{i-1}^n, \mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, t^n, t^{n+1}), \tag{3.4}$$

où Q est un flux d'entropie numérique, i.e., $Q(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = q(\mathbf{U})$, et $\overline{p}$ est une approximation consistante du terme source de l'inéquation d'entropie, i.e., $\overline{p}(\mathbf{U}, \mathbf{U}, \mathbf{U}, x, x, x, t, t) = p(\mathbf{U}, x, t)$.
Ceci conduit à introduire les définitions suivantes :

Définition 1. *Un schéma numérique pour le système (3.1) sera dit à flux conservatif s'il s'écrit sous la forme (3.2).*
Un schéma numérique pour le système (3.1) sera dit à flux d'entropie conservatif si ses solutions vérifient l'inéquation (3.4).

Dans le cas conservatif, l'ingrédient essentiel pour définir un schéma numérique pour (3.1) est la notion de problème de Riemann. Dans le cas non-conservatif, cette notion s'étend sans difficulté. Un problème de Riemann est constitué par le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{P}(\mathbf{U}, x, t) \\ \mathbf{U}(x, t_0) = \left\{ \begin{array}{lll} \mathbf{U}_g & \text{si} & x \leq x_0 \\ \mathbf{U}_d & \text{si} & x > x_0 \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{3.5}$$

Soit $\mathbf{W}(x, t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d; x_0, t_0)$ une approximation du problème de Riemann précédent. On appellera $\mathbf{W}$ solveur de Riemann approché. On notera que le système (3.1) n'étant pas homogène, le solveur $\mathbf{W}$ ne l'est pas non plus a priori.
Afin d'alléger les notations, on pose $\mathbf{W}^n_{i+1/2}(x,t) = \mathbf{W}(x, t; \mathbf{U}^n_i, \mathbf{U}^n_{i+1}; x_{i+1/2}, t^n)$. A l'aide du solveur $\mathbf{W}$, on peut alors construire le schéma suivant :

$$\mathbf{U}^{n+1}_i = \frac{1}{\Delta x_i} \left(\int_{x_{i-1/2}}^{x_i} \mathbf{W}^n_{i-1/2}(x, t^{n+1}) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} \mathbf{W}^n_{i+1/2}(x, t^{n+1}) dx \right). \tag{3.6}$$

Soit X une quantité quelconque. On adoptera dans la suite la notation suivante : $\Delta X = X_d - X_g$.
On étend ci-dessous les définitions de [HLL] :

Définition 2.
Supposons que les pas de temps et d'espace vérifient la majoration uniforme suivante : $\dfrac{\tau}{x_d - x_g} \leq C$.
Soit $\mathbf{W}(x, t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d; x_0, t_0)$ *une approximation du problème de Riemann (3.5) sur l'intervalle* $[x_g, x_d]$. *On dira que* $\mathbf{W}$ *est consistant avec la forme intgrale du système (3.1) si et seulement si il existe* Π *telle que pour* τ *suffisamment petit et tout* $\mathbf{U}_g$, $\mathbf{U}_d$, *on ait l'égalité*

$$\int_{x_g}^{x_d} \mathbf{W}(x, t_0 + \tau) dx = (x_0 - x_g)\mathbf{U}_g + (x_d - x_0)\mathbf{U}_d - \tau \Delta \mathbf{F} + \Pi(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d, x_g, x_0, x_d, t_0, \tau), \tag{3.7}$$

où Π *est une approximation consistante de (3.1) au sens suivant :*

$$\lim_{\substack{\tau \to 0 \\ x_g, x_d \to x_0 \\ \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d \to \mathbf{U}_0}} \frac{\Pi(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d, x_g, x_0, x_d, t_0, \tau)}{\tau(x_d - x_g)} = \mathbf{P}(\mathbf{U}_0, x_0, t_0). \tag{3.8}$$

On dira que $\mathbf{W}$ *est consistant avec l'inégalité d'entropie si et seulement si il existe* π *telle que pour* τ *suffisamment petit et tout* $\mathbf{U}_g$, $\mathbf{U}_d$, *on ait l'inégalité*

$$\int_{x_g}^{x_d} \eta(\mathbf{W}) dx \leq (x_0 - x_g)\eta_g + (x_d - x_0)\eta_d - \tau \Delta q + \pi(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d, x_g, x_0, x_d, t_0, \tau), \tag{3.9}$$

où π *est une approximation consistante de (3.3) au sens suivant :*

$$\lim_{\substack{\tau \to 0 \\ x_g, x_d \to x_0 \\ \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d \to \mathbf{U}_0}} \frac{\pi(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d, x_g, x_0, x_d, t_0, \tau)}{\tau(x_d - x_g)} = p(\mathbf{U}_0, x_0, t_0).$$

$\diamond$

Bien qu'élémentaire, la définition 2 n'est pas réellement naturelle. En particulier, le terme $\mathbf{\Delta F}$ dans la formule (3.7) n'est pas celui auquel on s'attend si dans (3.7) on considère la solution exacte du problème de Riemann. En effet, celle-ci n'est plus constante sur les droites $x = x_g$ et $x = x_d$. On peut cependant exhiber facilement dans ce cas le terme Π. On effectue pour cela une intégration dans le domaine $[x_g, x_d] \times [t_0, t_0 + \tau]$ du système (3.5) avec $\mathbf{U}$ la solution exacte. On obtient :

$$\int_{x_g}^{x_d} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \left(\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U})\right) dxdt = \int_{x_g}^{x_d} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathbf{P}(\mathbf{U}) dxdt,$$

avec,

$$\begin{aligned}
\int_{x_g}^{x_d} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \left(\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U})\right) dxdt &= \int_{x_g}^{x_d} \mathbf{U}(x, t_0+\tau)dx - (x_0 - x_g)\mathbf{U}_g - (x_d - x_0)\mathbf{U}_d \\
&+ \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_d, t))dt - \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_g, t))dt, \\
&= \int_{x_g}^{x_d} \mathbf{U}(x, t_0+\tau)dx - (x_0 - x_g)\mathbf{U}_g - (x_d - x_0)\mathbf{U}_d + \tau\mathbf{\Delta F} \\
&+ \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_d, t))d\theta - \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_g, t))dt - \tau\mathbf{\Delta F}.
\end{aligned}$$

Ceci donne l'expression de Π suivante,

$$\begin{aligned}
\Pi(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d, x_g, x_0, x_d, t_0, \tau) &= \int_{x_g}^{x_d} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathbf{P}(\mathbf{U}) dxdt \\
&- \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_d, t))dt + \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_g, t))dt + \tau\mathbf{\Delta F}.
\end{aligned}$$

Il reste maintenant à vérifier que Π est consistant au sens de (3.8). En ce qui concerne le premier terme, on a :

$$\lim_{\substack{\tau \to 0 \\ x_g, x_d \to x_0 \\ \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d \to \mathbf{U}_0}} \frac{1}{\tau(x_d - x_g)} \int_{x_g}^{x_d} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathbf{P}(\mathbf{U}) dxdt = \mathbf{P}(\mathbf{U}_0, x_0, t_0).$$

Montrons maintenant que les autres termes tendent ver 0.
Remarquons tout d'abord qu'en $x = x_g$ (resp. $x = x_d$), $\mathbf{U}$ ne dépend que de t, x_g et $\mathbf{U}_g$ (resp. x_d et $\mathbf{U}_d$). On a alors $\partial_t \mathbf{U} = \mathbf{P}(\mathbf{U})$, et donc aussi $\partial_t \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \nabla \mathbf{F}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{U})$. Posons $g(\mathbf{U}_\alpha, x_\alpha, t) = \nabla \mathbf{F}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{U})(x_\alpha, t)$, pour $\alpha = g, d$. On a alors,

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}(x_\alpha, t)) = \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_\alpha, t_0)) + \int_{t_0}^{t} g(\mathbf{U}_\alpha, x_\alpha, t')dt',$$

et par suite,

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_d, t))dt - \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_g, t))dt - \tau\mathbf{\Delta F} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{t_0}^{t} \left(g(\mathbf{U}_d, x_d, t') - g(\mathbf{U}_g, x_g, t')\right) dt'dt.$$

Or, on a la majoration suivante,

$$|\int_{t_0}^{t_0+\tau}\int_{t_0}^{t}\left(g(\mathbf{U}_d,t')-g(\mathbf{U}_g,t')\right)dt'dt| \leq C\tau^2\left(||\mathbf{U}_d-\mathbf{U}_g||+|x_d-x_g|\right),$$

ce qui permet de conclure, et ainsi de montrer que la définition 2 est malgré tout satisfaite dans le cas où le solveur $\mathbf{W}$ est construit à l'aide de la solution exacte du problème de Riemann. Ceci légitime par conséquent cette définition.
On vérifie maintenant les résultats ci-dessous généralisant ceux de [HLL] :

Proposition 22.
Si le solveur de Riemann $\mathbf{W}$ est consistant avec la forme intégrale de la loi de conservation alors le schéma (3.6) est à flux conservatif. Le solveur $\mathbf{W}$ est alors appelé solveur de type Godunov, et le schéma (3.6) schéma de type Godunov.
Si le solveur de Riemann $\mathbf{W}$ est consistant avec l'inégalité d'entropie alors le schéma (3.6) est à flux d'entropie conservatif. Le solveur $\mathbf{W}$ est alors appelé solveur de type Godunov entropique, et le schéma (3.6) schéma de type Godunov entropique.

Preuve :
Soit (η,q,p) un triplet entropie-flux-production avec η non nécessairement convexe. On notera $\mathbf{W}^n_{i+1/2}(x,t) = \mathbf{W}(x,t;\mathbf{U}^n_i,\mathbf{U}^n_{i+1},x_{i+1/2},t^n)$, $\pi^n_{i+1/2} = \pi(\mathbf{U}^n_i,\mathbf{U}^n_{i+1},x_i,x_{i+1/2},x_{i+1},t^n,\Delta t)$ où $\Delta t = t^{n+1}-t^n$, et aussi,

$$I^+_{i+1/2} = \int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+1}} \eta(\mathbf{W}^n_{i+1/2}(x,t^{n+1}))dx \quad , \quad I^-_{i+1/2} = \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} \eta(\mathbf{W}^n_{i+1/2}(x,t^{n+1}))dx,$$

$$\eta^+_{i+1/2} = \frac{2}{\Delta x_{i+1}}\int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+1}} \eta(\mathbf{W}^n_{i+1/2}(x,t^{n+1}))dx \quad , \quad \eta^-_{i+1/2} = \frac{2}{\Delta x_i}\int_{x_i}^{x_{i+1/2}} \eta(\mathbf{W}^n_{i+1/2}(x,t^{n+1}))dx.$$

On a alors par convexité :

$$\begin{aligned}
\Delta x_i\,\eta(\mathbf{U}^{n+1}_i) &= \Delta x_i\,\eta\left(\frac{1}{\Delta x_i}\int_{x_{i-1/2}}^{x_i}\mathbf{W}^n_{i-1/2}dx + \frac{1}{\Delta x_i}\int_{x_i}^{x_{i+1/2}}\mathbf{W}^n_{i+1/2}dx\right)\\
&\leq \frac{\Delta x_i}{2}\eta\left(\frac{2}{\Delta x_i}\int_{x_{i-1/2}}^{x_i}\mathbf{W}^n_{i-1/2}dx\right) + \frac{\Delta x_i}{2}\eta\left(\frac{2}{\Delta x_i}\int_{x_i}^{x_{i+1/2}}\mathbf{W}^n_{i+1/2}dx\right)\\
&\leq I^+_{i-1/2} + I^-_{i+1/2} \qquad \text{, d'après Jensen.}
\end{aligned}$$

En utilisant (3.9), on en déduit l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
\Delta x_i\,\eta(\mathbf{U}^{n+1}_i) &\leq \int_{x_{i-1}}^{x_i}\eta(\mathbf{W}^n_{i-1/2})dx + I^-_{i+1/2} - I^-_{i-1/2}\\
&\leq \frac{\Delta x_{i-1}}{2}\eta_{i-1} + \frac{\Delta x_i}{2}\eta_i - \Delta t(q_i-q_{i-1}) + \pi_{i-1/2} + I^-_{i+1/2} - I^-_{i-1/2}\\
&\leq \Delta x_i\,\eta_i + \frac{\Delta x_{i-1}}{2}\eta_{i-1} - \frac{\Delta x_i}{2}\eta_i - \Delta t(q_i-q_{i-1}) + \pi_{i-1/2} + I^-_{i+1/2} - I^-_{i-1/2}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

De même, on montre,

$$\begin{aligned}\Delta x_i\,\eta(\mathbf{U}_i^{n+1}) &\leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} \eta(\mathbf{W}_{i+1/2})dx + I^+_{i-1/2} - I^+_{i+1/2}\\ &\leq \frac{\Delta x_i}{2}\eta_i + \frac{\Delta x_{i+1}}{2}\eta_{i+1} - \Delta t(q_{i+1}-q_i) + \pi_{i+1/2} + I^+_{i-1/2} - I^+_{i+1/2}\\ &\leq \Delta x_i\,\eta_i + \frac{\Delta x_{i+1}}{2}\eta_{i+1} - \frac{\Delta x_i}{2}\eta_i - \Delta t(q_{i+1}-q_i) + \pi_{i+1/2} + I^+_{i-1/2} - I^+_{i+1/2}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Des inégalités (3.10) et (3.11) on tire :

$$\begin{aligned}2\Delta x_i\,\eta(\mathbf{U}_i^{n+1}) &\leq 2\Delta x_i\,\eta_i - \Delta t(q_{i+1}-q_{i-1}) + \pi_{i-1/2} + \pi_{i+1/2}\\ &+ \frac{\Delta x_{i-1}}{2}\eta_{i-1} - \frac{\Delta x_i}{2}\eta_i + I^-_{i+1/2} - I^-_{i-1/2} + \frac{\Delta x_{i+1}}{2}\eta_{i+1} - \frac{\Delta x_i}{2}\eta_i + I^+_{i-1/2} - I^+_{i+1/2}\\ &\leq 2\Delta x_i\,\eta_i - 2\Delta t\left(Q_{i+1/2} - Q_{i-1/2}\right) + \pi_{i+1/2} + \pi_{i-1/2},\end{aligned}$$

où Q est défini par,

$$Q_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left[q_i + q_{i+1} - \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{\Delta x_{i+1}}{2}(\eta_{i+1} - \eta^+_{i+1/2}) - \frac{\Delta x_i}{2}(\eta_i - \eta^-_{i+1/2})\right)\right]. \tag{3.12}$$

On conclut ensuite en considérant les entropies linéaires et les entropies strictement convexes.

◇

De la démonstration précédente, et en particulier de la relation (3.12), on tire l'expression suivante du schéma (3.6) associé à un solveur de type Godunov :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_i}\left(\mathbf{H}_{i+1/2} - \mathbf{H}_{i-1/2}\right) + \frac{\Pi_{i+1/2} + \Pi_{i-1/2}}{2\Delta x_i},$$

où $\Pi_{i+1/2} = \Pi(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}, x_i, x_{i+1/2}, x_{i+1}, t^n, \Delta t)$ et où le flux numérique $\mathbf{H}_{i+1/2}$ est donné par

$$\mathbf{H}_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1} - \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{\Delta x_{i+1}}{2}(\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}^+_{i+1/2}) - \frac{\Delta x_i}{2}(\mathbf{U}_i - \mathbf{U}^-_{i+1/2})\right)\right],$$

avec

$$\mathbf{U}^+_{i+1/2} = \frac{2}{\Delta x_{i+1}}\int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+1}} \mathbf{W}_{i+1/2}(x, t^{n+1})dx \quad , \quad \mathbf{U}^-_{i+1/2} = \frac{2}{\Delta x_i}\int_{x_i}^{x_{i+1/2}} \mathbf{W}_{i+1/2}(x, t^{n+1})dx.$$

De même, si le solveur $\mathbf{W}$ est entropique, alors l'inégalité d'entropie numérique s'écrit

$$\eta_i^{n+1} \leq \eta_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_i}\left(Q_{i+1/2} - Q_{i-1/2}\right) + \frac{\pi_{i+1/2} + \pi_{i-1/2}}{2\Delta x_i},$$

où le flux d'entropie numrique $Q_{i+1/2}$ est défini par (3.12).

Bien sûr, on a le théorème de type Lax-Wendroff suivant pour le schéma (3.6) :

Théorème 1.
Supposons les fonctions Π et π suffisamment régulières. Alors, si le solveur $\mathbf{W}$ est de type Godunov entropique et si la suite $(\mathbf{U}_i^n)_{i,n}$ obtenue par le schéma (3.6) est convergente dans L^1_{loc}, la limite $\mathbf{U}$ est solution entropique de (3.1).

On omet la démonstration de ce résultat qui est très classique.

◇

La définition précédente est très générale et concerne en outre des maillages non nécessairement réguliers. Dans la suite, afin d'alléger les notations, on se limitera au cas de grilles régulières de pas Δx constant, i.e. $\Delta x_i = \Delta x$ pout tout i, et, bien que ce ne soit pas restrictif, on supposera aussi que le terme source $\mathbf{P}$ ne dépend pas de t. Ceci permet d'omettre la dépendance de Π et π par rapport à x_0 et de $\mathbf{W}$ par rapport à t_0. En outre, on se limitera au cas où les fonctions Π et π sont de la forme

$$\Pi(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d, x_g, x_0, x_d, t_0, \Delta t) = \Delta t\, \Delta x\, \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d, x_g, x_d),$$
$$\pi(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d, x_g, x_0, x_d, t_0, \Delta t) = \Delta t\, \Delta x\, \tilde{p}(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d, x_g, x_d).$$

Ceci conduit à adopter la définition ci-dessous :

Définition 3.
Soit $\mathbf{W}(x, t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d; x_0)$ une approximation du problème de Riemann (3.5) sur l'intervalle $[x_g, x_d]$ avec $x_g = x_0 - \Delta x/2$, $x_d = x_0 + \Delta x/2$. On dira que $\mathbf{W}$ est consistant avec la forme intégrale du système (3.1) si et seulement si il existe $\tilde{\mathbf{P}}$ une approximation consistante de $\mathbf{P}$, i.e. $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}, x, x) = \mathbf{P}(\mathbf{U}, x)$, telle que pour τ suffisamment petit et tout $\mathbf{U}_g$, $\mathbf{U}_d$:

$$\int_{x_g}^{x_d} \mathbf{W} dx = \frac{\Delta x}{2}(\mathbf{U}_g + \mathbf{U}_d) - \Delta t \Delta \mathbf{F} + \Delta t \Delta x \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d, x_g, x_d). \tag{3.13}$$

On dit que $\mathbf{W}$ est consistant avec l'inégalité d'entropie si et seulement si il existe $\tilde{p}$ une approximation consistante de p, i.e. $\tilde{p}(\mathbf{U}, \mathbf{U}, x, x) = p(\mathbf{U}, x)$ telle que pour τ suffisamment petit et tout $\mathbf{U}_g$, $\mathbf{U}_d$:

$$\int_{x_g}^{x_d} \eta(\mathbf{W}) dx \leq \frac{\Delta x}{2}(\eta_g + \eta_d) - \Delta t \Delta q + \Delta t \Delta x \tilde{p}(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d, x_g, x_d). \tag{3.14}$$

◇

Dans ce cas, le schéma (3.6) prend la forme,

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\mathbf{H}_{i+1/2} - \mathbf{H}_{i-1/2}\right) + \frac{\Delta t}{2}\left(\tilde{\mathbf{P}}_{i+1/2} + \tilde{\mathbf{P}}_{i-1/2}\right), \tag{3.15}$$

où $\tilde{\mathbf{P}}_{i+1/2} = \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}, x_i, x_{i+1})$ et où le flux numérique $\mathbf{H}_{i+1/2}$ est donné par,

$$\mathbf{H}_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t}(\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i - \mathbf{U}^+_{i+1/2} + \mathbf{U}^-_{i+1/2})\right], \tag{3.16}$$

avec,

$$\mathbf{U}^+_{i+1/2} = \frac{2}{\Delta x}\int_0^{\Delta x/2} \mathbf{W}_{i+1/2}(x, \Delta t) dx \quad , \quad \mathbf{U}^-_{i+1/2} = \frac{2}{\Delta x}\int_{-\Delta x/2}^{0} \mathbf{W}_{i+1/2}(x, \Delta t) dx.$$

De même, si le solveur $\mathbf{W}$ est entropique, alors l'inégalité d'entropie numérique s'écrit

$$\eta_i^{n+1} \leq \eta_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(Q_{i+1/2} - Q_{i-1/2}\right) + \frac{\Delta t}{2}\left(\tilde{p}_{i+1/2} + \tilde{p}_{i-1/2}\right),$$

où le flux d'entropie numérique $Q_{i+1/2}$ est défini par

$$Q_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left[q_i + q_{i+1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t}(\eta_{i+1} - \eta_i - \eta^+_{i+1/2} + \eta^-_{i+1/2})\right].$$

3.2.1 Construction de solveurs de Riemann

Construction à l'aide de solveurs pour le problème homogène

Dans ce paragraphe, on montre comment associer à tout solveur de Riemann pour le problème sans terme source un solveur de Riemann pour le problème avec terme source.
En effet, considérons un solveur de Riemann $\mathbf{W}^h$ pour le problème homogène. Il vérifie l'égalité

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{W}^h_{i+1/2} dx = \frac{\Delta x}{2}(\mathbf{U}_i + \mathbf{U}_{i+1}) - \tau \Delta \mathbf{F}.$$

On se donne en outre à chaque interface un couple d'approximation du terme source $\tilde{\mathbf{P}}^-_{i+1/2}$ et $\tilde{\mathbf{P}}^+_{i+1/2}$ avec $\tilde{\mathbf{P}}^\pm_{i+1/2} = \tilde{\mathbf{P}}^\pm(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}, x_i, x_{i+1})$. On définit alors un solveur de Riemann par les égalités suivantes

$$\begin{cases} \mathbf{W}_{i+1/2}(x,\tau) = \mathbf{W}^h_{i+1/2}(x,\tau) + \tau \tilde{\mathbf{P}}^-_{i+1/2} & \text{si } x_i \le x < x_{i+1/2}, \\ \mathbf{W}_{i+1/2}(x,\tau) = \mathbf{W}^h_{i+1/2}(x,\tau) + \tau \tilde{\mathbf{P}}^+_{i+1/2} & \text{si } x_{i+1/2} \le x < x_{i+1}. \end{cases} \tag{3.17}$$

Il est clair que $\mathbf{W}$ est un solveur de Riemann pour le problème non homogène car on montre que

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{W}_{i+1/2} dx = \frac{\Delta x}{2}(\mathbf{U}_i + \mathbf{U}_{i+1}) - \tau \Delta \mathbf{F} + \tau \Delta x \tilde{\mathbf{P}}_{i+1/2},$$

avec $\tilde{\mathbf{P}}_{i+1/2} = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{P}}^-_{i+1/2} + \tilde{\mathbf{P}}^+_{i+1/2})$.
En outre, on obtient aisément le résultat suivant,

Proposition 23.
Si le solveur $\mathbf{W}^h$ est de type Godunov entropique pour le problème homogène, alors le solveur $\mathbf{W}$ est de type Godunov entropique pour le problème non homogène au sens de la Définition 2.

◇

Inversement, soit $\mathbf{W}$ un solveur pour le problème non homogène. Il satisfait l'égalité

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{W}_{i+1/2} dx = \frac{\Delta x}{2}(\mathbf{U}_i + \mathbf{U}_{i+1}) - \tau \Delta \mathbf{F} + \tau \Delta x \tilde{\mathbf{P}}_{i+1/2}.$$

On construit alors un solveur $\mathbf{W}^h$ pour le problème homogène en posant

$$\mathbf{W}^h_{i+1/2}(x,\tau) = \mathbf{W}_{i+1/2}(x,\tau) - \tau \tilde{\mathbf{P}}_{i+1/2} \quad \text{si } x_i \le x < x_{i+1}.$$

Exemples particuliers

L'exemple le plus simple de solveur du type (3.17) s'obtient en imposant que $\tilde{\mathbf{P}}^-_{i+1/2} = \tilde{\mathbf{P}}^+_{i+1/2} = \tilde{\mathbf{P}}_{i+1/2}$. On peut alors choisir, par exemple,

$$\tilde{\mathbf{P}}_{i+1/2} = \mathbf{P}(\frac{\mathbf{U}_i + \mathbf{U}_{i+1}}{2}, x_{i+1/2}) \text{ ou bien } \tilde{\mathbf{P}}_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{P}((\mathbf{U}_i, x_i) + \mathbf{P}((\mathbf{U}_{i+1}, x_{i+1})\right).$$

Un autre exemple est le suivant. On choisit,

$$\tilde{\mathbf{P}}^-_{i+1/2} = \mathbf{P}(\mathbf{U}_i, x_i) = \mathbf{P}_i \quad , \quad \tilde{\mathbf{P}}^+_{i+1/2} = \mathbf{P}(\mathbf{U}_{i+1}, x_{i+1}) = \mathbf{P}_{i+1}, \tag{3.18}$$

qui donne $\tilde{\mathbf{P}}_{i+1/2} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_{i+1})$.
Pour le choix (3.18), il est intéressant de remarquer qu'il induit une autre écriture du schéma. En effet, posons,

$$(\mathbf{U}^h_{i+1/2})^+ = \frac{2}{\Delta x}\int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+1}} \mathbf{W}^h_{i+1/2}(x, \Delta t)dx \quad , \quad (\mathbf{U}^h_{i+1/2})^- = \frac{2}{\Delta x}\int_{x_i}^{x_{i+1/2}} \mathbf{W}^h_{i+1/2}(x, \Delta t)dx.$$

Si $\mathbf{H}^h$ est le flux associé au problème homogène, on a par construction,

$$\frac{1}{2}((\mathbf{U}^h_{i+1/2})^+ + (\mathbf{U}^h_{i-1/2})^-) = \mathbf{U}^n_i - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\mathbf{H}^h_{i+1/2} - \mathbf{H}^h_{i-1/2}\right),$$

d'où l'on tire,

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^{n+1}_i &= \frac{1}{2}(\mathbf{U}^+_{i-1/2} + \mathbf{U}^-_{i+1/2}) \\
&= \frac{1}{2}((\mathbf{U}^h_{i-1/2})^+ + (\mathbf{U}^h_{i+1/2})^-) + \frac{\Delta t}{2}(\tilde{\mathbf{P}}^+_{i-1/2} + \tilde{\mathbf{P}}^-_{i+1/2}) \\
&= \mathbf{U}^n_i - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\mathbf{H}^h_{i+1/2} - \mathbf{H}^h_{i-1/2}\right) + \frac{\Delta t}{2}(\tilde{\mathbf{P}}^+_{i-1/2} + \tilde{\mathbf{P}}^-_{i+1/2}).
\end{aligned}$$

Et, puisque $\tilde{\mathbf{P}}^+_{i-1/2} = \tilde{\mathbf{P}}^-_{i+1/2} = \mathbf{P}_i$, on a donc la nouvelle forme du schéma, soit,

$$\mathbf{U}^{n+1}_i = \mathbf{U}^n_i - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\mathbf{H}^h_{i+1/2} - \mathbf{H}^h_{i-1/2}\right) + \Delta t\, \mathbf{P}_i, \tag{3.19}$$

qui est une écriture du type (3.2), et donc différente de la forme (3.15).

3.2.2 Solutions équilibre

Dans [GAL6], les notions de solutions équilibre et de solutions équilibre fortes ont été introduites. On en rappelle ci-dessous les définitions.

Définition 4.
On dira qu'une suite $(\mathbf{U}_i)_i$ est solution d'équilibre pour le schéma (3.6) si et seulement si les égalités ci-dessous sont vérifiées à chaque interface :

$$\mathbf{U}^-_{i+1/2} = \mathbf{U}_i \quad et \quad \mathbf{U}^+_{i+1/2} = \mathbf{U}_{i+1}. \tag{3.20}$$

Définition 5.
On dira qu'une suite $(\mathbf{U}_i)_i$ est solution d'équilibre forte pour le schéma (3.6) si et seulement si :

$$\begin{cases} \mathbf{W}(x,t;\mathbf{U}_i,\mathbf{U}_{i+1}) = \mathbf{U}_i & si \quad x/t \le 0, \\ \mathbf{W}(x,t;\mathbf{U}_i,\mathbf{U}_{i+1}) = \mathbf{U}_{i+1} & si \quad x/t > 0. \end{cases}$$

Ces deux dernières relations expriment simplement le fait que dans une situation d'équilibre, les états intermédiaires gauche doivent être égaux à l'état gauche et les états intermédiaires droite doivent être égaux à l'état droit.
Ces solutions d'équilibre ont l'avantage de vérifier à chaque interface l'équation d'équilibre suivante [GAL6],

$$\mathbf{F}_{i+1} - \mathbf{F}_i = \Delta x \tilde{\mathbf{P}}_{i+1/2}. \tag{3.21}$$

Cette relation est simple à satisfaire et notamment bien plus que celle induite par une équation d'équilibre de maille donnée pour un schéma du type (3.2), soit

$$\mathbf{H}_{i+1/2} - \mathbf{H}_{i-1/2} = \Delta x \overline{\mathbf{P}}(\mathbf{U}_{i-1}, \mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}).$$

Par exemple, avec le choix (3.18) les solutions d'équilibre satisfont la relation simple suivante,

$$\mathbf{F}_{i+1} - \mathbf{F}_i = \frac{\Delta x}{2}(\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_{i+1}).$$

Si l'on considère maintenant la forme (3.19), on peut construire une nouvelle famille de solutions stationnaires définies par

$$\mathbf{H}^h_{i+1/2} - \mathbf{H}^h_{i-1/2} = \Delta x \mathbf{P}_i.$$

L'inconvénient de cette dernière équation est a priori sa complexité. En effet, il suffit de considérer l'exemple des équations d'Euler avec un terme source quelconque où le flux numérique serait celui du schéma de Roe.

3.3 Solveurs simples

Nous nous intéressons maintenant au cas le plus simple de solveurs homogènes, à savoir les solveurs simples déjà introduits dans [GAL3, GAL4] pour le cas conservatif, et dans [GAL6] pour les systèmes avec terme source indépendant de x. On étend ci-dessous cette notion au cas avec terme source dépendant de x.

Définition 6.
On dira que le solveur de Riemann $\mathbf{W}$ *est simple si et seulement si* $\mathbf{W}(x,t)$ *est constitué de (m+1) états constants* $(\mathbf{U}_k)_{k=1,m+1}$*, séparés par des droites, avec* $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_g$ *et* $\mathbf{U}_{m+1} = \mathbf{U}_d$*.*
Il existe donc des réels $(\lambda_k)_{k=1,m}$ *tels que :*

$$\mathbf{W}(x,t) = \begin{cases} \mathbf{U}_g & si \quad x/t \leq \lambda_1, \\ \mathbf{U}_k & si \quad \lambda_{k-1} < x/t \leq \lambda_k \quad pour \quad k = 2, m, \\ \mathbf{U}_d & si \quad \lambda_m < x/t. \end{cases}$$

◇

Etant donnée une suite $(X_k)_k$, on notera par la suite : $\delta X_k = X_{k+1} - X_k$.
Il est alors facile d'obtenir le résultat suivant, dont la démonstration est identique à celle du cas où $\mathbf{P}$ ne dépend pas de x [GAL6].

Proposition 24.
Un solveur de Riemann simple est de type Godunov si et seulement si il existe une approximation

du terme source $\tilde{\mathbf{P}}$ *consistante, i.e.,* $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{U},\mathbf{U},x,x)=\mathbf{P}(\mathbf{U},x)$*, telle que*

$$\Delta\mathbf{F}-\Delta x\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{U}_g,\mathbf{U}_d,x_g,x_d)=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\delta\mathbf{U}_k. \tag{3.22}$$

Un solveur de Riemann simple est de type Godunov entropique si et seulement si il existe une approximation du terme source de production d'entropie $\tilde{p}$ *consistante, i.e.,* $\tilde{p}(\mathbf{U},\mathbf{U},x,x)=p(\mathbf{U},x)$*, telle que*

$$\Delta q-\Delta x\tilde{p}(\mathbf{U}_g,\mathbf{U}_d,x_g,x_d)\leq\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\delta\eta_k. \tag{3.23}$$

Preuve :
On ne considère que l'inégalité d'entropie (3.23). L'égalité (3.22) s'en déduit aisément.
Pour $\Delta t\leq\dfrac{\Delta x}{2Max_k|\lambda_k|}$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2}\eta(\mathbf{W})dx &= (\lambda_1\Delta t+\frac{\Delta x}{2})\eta_g+(\lambda_2-\lambda_1)\Delta t\eta_2+...\\ &\quad ...+(\lambda_{m-1}-\lambda_m)\Delta t\eta_m+(\frac{\Delta x}{2}+\lambda_m\Delta t)\eta_d\\ &= \frac{\Delta x}{2}(\eta_g+\eta_d)-\Delta t\sum_{k=1}^{m}\lambda_k(\eta_{k+1}-\eta_k),\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure en utilisant la définition 3.

◇

3.3.1 Un exemple simple

On s'intéresse ici à l'exemple simple donné par l'équation scalaire linéaire suivante,

$$\partial_t u+a\partial_x u=B(u,x), \tag{3.24}$$

avec a positif.
Dans [PER1], un schéma cinétique équilibre est dérivé dans le cadre plus général d'un flux non-linéaire. On cherche à construire un solveur simple pour l'équation (3.24), et ceci de la façon la plus élémentaire possible.
Supposons que le solveur possède une unique onde de pente λ. On doit alors avoir,

$$a\Delta u-\Delta x\tilde{B}(u,x)=\lambda\Delta u.$$

Si $u_g=u_d=u$, on en dduit que l'on doit avoir $B(u,x)=0$, ce qui est absurde en général. On supposera donc que le solveur possède deux ondes avec un état intermédiaire u^*. Si l'on impose que le solveur possède des solutions d'équilibre fortes (voir définition 5), ceci nécessite qu'à l'équilibre le solveur possède une onde de pente nulle. Afin de simplifier l'étude, on fera

l'hypothèse que c'est toujours le cas. En outre, il est naturel de supposer que l'autre onde a pour pente $\lambda = a$. Dans ce cas, la relation (3.22) devient,

$$a\Delta u - \Delta x\tilde{B}(u,x) = 0\ (u^* - u_g) + a\ (u_d - u^*) = a(u_d - u^*).$$

Il est intéressant alors de noter que le flux numérique s'écrit,

$$\begin{aligned} h_{i+1/2} &= \frac{1}{2}\left(au_i + au_{i+1} - a(u_{i+1} - (u^*)_{i+1/2})\right), \\ &= \frac{1}{2}\left(au_i + au_{i+1} - \left(a(u_{i+1} - u_i) - \Delta x\tilde{B}_{i+1/2}\right)\right), \\ &= au_i + \frac{\Delta x}{2}\tilde{B}_{i+1/2}. \end{aligned}$$

On en déduit alors le schéma de type Godunov suivant,

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(au_i^n + \frac{\Delta x}{2}\tilde{B}_{i+1/2}^n - au_{i-1}^n - \frac{\Delta x}{2}\tilde{B}_{i-1/2}^n) + \frac{\Delta t}{2}\left(\tilde{B}_{i+1/2}^n + \tilde{B}_{i-1/2}^n\right), \\ &= u_i^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_i^n - u_{i-1}^n) + \Delta t\tilde{B}_{i-1/2}^n. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Si l'on considère maintenant les solutions équilibre au sens de la définition 4, la relation d'équilibre (3.21) induit l'équation suivante à l'interface $x_{i+1/2}$,

$$a\left(u_{i+1} - u_i\right) = \Delta x\tilde{B}_{i+1/2}.$$

On peut aussi considèrer les solutions équilibre induites directement par le schéma (3.25). Elles vérifient $u_i^{n+1} = u_i^n$, et donc,

$$a\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right) = \Delta t\tilde{B}_{i-1/2}^n.$$

On constate alors que dans ce cas particulier, les équations d'équilibre sont identiques. Cependant, il faut se garder de penser qu'il en sera toujours ainsi, et il est facile de construire des contre-exemples.

Pour en terminer avec cet exemple, on va montrer maintenant que par un choix judicieux de $\tilde{B}_{i+1/2}$, on peut obtenir des solutions stationnaires exactes. En effet, considérons l'application S suivante,

$$x \to S(x, u_0, x_0)$$

où $S(x, u_0, x_0)$ est la solution exacte de l'équation différentielle,

$$a\frac{du}{dx} = B(u,x) \qquad \text{avec} \quad u(x_0) = u_0.$$

Soient α quelconque dans l'intervalle $[0,1]$, et $\beta = 1 - \alpha$. On propose alors comme approximation du terme source,

$$\tilde{B}_{i+1/2} = \alpha B_{i+1/2}^+ + \beta B_{i+1/2}^-, \tag{3.26}$$

où

$$B^+_{i+1/2} = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_i}^{x_{i+1}} B(S(y,u_i,x_i),y)dy \quad , \quad B^-_{i+1/2} = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_i}^{x_{i+1}} B(S(y,u_{i+1},x_{i+1}),y)dy.$$

On a alors le résultat suivant,

Proposition 25.

Si Δx est assez petit, les solutions équilibre du schéma de type Godunov (3.25, 3.26) sont exactes.

Preuve :

Montrons tout d'abord que les solutions stationnaires sont définies de manière unique pour Δx assez petit. Elles satisfont,

$$a\left(u_{i+1}-u_i\right) = \Delta x\left(\alpha B^+_{i+1/2} + \beta B^-_{i+1/2}\right). \tag{3.27}$$

Puisque a est positif, la condition limite est imposé sur le bord gauche du domaine de calcul et on connaît alors u_0. Supposons donc connu de manière générale u_i. L'équation (3.27) constitue une équation du type $f(u_{i+1}) = u_{i+1}$ qui sera contractante pour Δx assez petit, ce qui définit u_{i+1} de façon unique. Il suffit maintenant de montrer que la solution exacte vérifie (3.27).
Si u est solution exacte, elle vérifie,

$$a\frac{du}{dx} = B(u,x),$$

et en intégrant cette équation, on obtient,

$$a(u(x+\Delta x)-u(x)) = \int_x^{x+\Delta x} B(u(y),y)dy.$$

Or, on a, $u(y) = S(y,u(x),x)$, et aussi $u(y) = S(y,u(x+\Delta x),x+\Delta x)$. On en déduit,

$$\int_x^{x+\Delta x} B(u(y),y)dy = \int_x^{x+\Delta x} B(S(y,u(x),x),y)dy = \int_x^{x+\Delta x} B(S(y,u(x+\Delta x),x+\Delta x),y)dy,$$
$$= \alpha\int_x^{x+\Delta x} B(S(y,u(x),x),y)dy + \beta\int_x^{x+\Delta x} B(S(y,u(x+\Delta x),x+\Delta x),y)dy,$$

d'où le résultat.

◇

Pour illustrer ceci, prenons comme cas particulier, $B(u,x) = z'(x)u$ (cet exemple est traité dans [PER1]). Les solutions exactes sont données dans ce cas par,

$$S(x,u_0,x_0) = u_0 e^{\dfrac{z(x)-z(x_0)}{a}},$$

et on a alors, en posant $z(x_i) = z_i$ pour tout i,

$$\begin{aligned} B^+_{i+1/2} &= \frac{1}{\Delta x}\int_{x_i}^{x_{i+1}} z'(y)S(y,u_i,x_i)dy = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_i}^{x_{i+1}} z'(y)u_i e^{\dfrac{z(y)-z(x_i)}{a}}dy, \\ &= \frac{au_i}{\Delta x}\left(e^{\dfrac{z_{i+1}-z_i}{a}} - 1\right). \end{aligned}$$

De même, on a,

$$\begin{aligned} B^-_{i+1/2} &= \frac{1}{\Delta x}\int_{x_i}^{x_{i+1}} z'(y)S(y,u_{i+1},x_{i+1})dy = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_i}^{x_{i+1}} z'(y)u_{i+1}e^{\dfrac{z(y)-z(x_{i+1})}{a}}dy, \\ &= \frac{au_{i+1}}{\Delta x}\left(1-e^{\dfrac{z_i-z_{i+1}}{a}}\right). \end{aligned}$$

On en déduit que,

$$\tilde{B}_{i+1/2} = \frac{a}{\Delta x}\left(\alpha u_i\left(e^{\dfrac{z_{i+1}-z_i}{a}}-1\right)+\beta u_{i+1}\left(1-e^{\dfrac{z_i-z_{i+1}}{a}}\right)\right).$$

Les solutions stationnaires vérifient donc,

$$a\left(u_{i+1}-u_i\right) = a\left(\alpha u_i\left(e^{\dfrac{z_{i+1}-z_i}{a}}-1\right)+\beta u_{i+1}\left(1-e^{\dfrac{z_i-z_{i+1}}{a}}\right)\right).$$

Posons, $A = \dfrac{z_{i+1}-z_i}{a}$. L'égalité précédente devient alors,

$$\begin{aligned} & u_{i+1}-u_i = \alpha u_i\left(e^A-1\right)+\beta u_{i+1}\left(1-e^{-A}\right), \\ \Longleftrightarrow\ & u_{i+1}\left(1-\beta\left(1-e^{-A}\right)\right) = u_i\left(1+\alpha\left(e^A-1\right)\right), \\ \Longleftrightarrow\ & u_{i+1}\left(1-\beta+\beta e^{-A}\right) = u_i\left(1-\alpha+\alpha e^A\right), \\ \Longleftrightarrow\ & u_{i+1}\left(\alpha+\beta e^{-A}\right) = u_i\left(\beta+\alpha e^A\right), \\ \Longleftrightarrow\ & u_{i+1} = u_i e^A, \end{aligned}$$

soit encore, $u_{i+1} = u_i e^{\dfrac{z_{i+1}-z_i}{a}}$, qui est bien la solution exacte.
On notera en outre que l'égalité est vrai dans ce cas pour tout Δx.

3.3.2 Equivalence entre solveurs simples lagrangiens et solveurs simples eulériens

Nous étendons ci-dessous les résultats de [GAL4] établis dans le cas homogène. En particulier, on montre qu' il y a équivalence entre solveurs simples lagrangiens et solveurs simples eulériens pour une classe assez large de solveurs de Riemann.

3.3.3 Systèmes de lois de conservation généraux

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à des systèmes hyperboliques possédant à la fois une forme eulérienne et une forme lagrangienne [DES, DUBOIS]. La forme eulérienne d'un tel systéme est identique à la forme (3.1) soit,

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F} = \mathbf{P}_e, \tag{3.28}$$

avec en outre, $\mathbf{F} = u\mathbf{U} + \mathbf{G}^0$ où $\mathbf{G}^0$ a sa première composante nulle et u est la vitesse en x. Habituellement, la première composante de $\mathbf{U}$ est la densité ρ qui est positive. On supposera de plus que $\mathbf{P}_e$ a sa première composante nulle. La première équation est alors

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0.$$

Pour obtenir la forme lagrangienne, on définit les variables $\tau = t$, $m = \int \rho dx$ et les vecteurs :

$${}^t\mathbf{n} = (1, 0, ..., 0) \quad \mathbf{U} = \rho\mathbf{n} + \mathbf{U}^0 \quad \mathbf{V}^0 = \vartheta\mathbf{U}^0 \quad \mathbf{V} = \vartheta\mathbf{n} + \mathbf{V}^0 \quad \mathbf{G} = -u\mathbf{n} + \mathbf{G}^0 \quad \vartheta = 1/\rho.$$

En posant $\mathbf{P}_l = \vartheta\mathbf{P}_e$, la forme lagrangienne est alors la suivante,

$$\partial_\tau \mathbf{V} + \partial_m \mathbf{G} = \mathbf{P}_l. \tag{3.29}$$

On supposera aussi que (3.29) possède un triplet entropie-flux-production (σ, q, p_l) et on considèrera les solutions vérifiant l'inéquation d'entropie suivante

$$\partial_\tau \sigma + \partial_m q \leq p_l.$$

Celle-ci induit alors pour la forme eulérienne l'inéquation d'entropie ci-dessous,

$$\partial_t(\rho\sigma) + \partial_x(\rho\sigma u + q) \leq p_e,$$

où $p_e = \rho p_l$.

3.3.4 Construction de solveurs simples via les états intermédiaires

Considérons un schéma de type Godunov pour le système lagrangien (3.29) et supposons le associé à un solveur de Riemann simple défini par les pentes $(\lambda_k)_{k=1,m}$ et les états intermédiaires suivants :

$$\mathbf{W}_L(m/\tau) = \begin{cases} \mathbf{V}_1 & = \mathbf{V}_g \quad \text{si} \quad m/\tau < \lambda_1, \\ \mathbf{V}_k & \quad \text{pour} \quad \lambda_{k-1} < m/\tau \leq \lambda_k \quad \text{et} \quad k = 2, m, \\ \mathbf{V}_{m+1} & = \mathbf{V}_d \quad \text{si} \quad \lambda_m \leq m/\tau. \end{cases} \tag{3.30}$$

Puisque le schéma associé est de type Godunov, il existe $\tilde{S}_l$ consistant tel que l'on ait la relation suivante :

$$\Delta\mathbf{G} - \Delta m\tilde{\mathbf{P}}_l = \sum_{k=1,m} \lambda_k \delta\mathbf{V}_k$$

Rappelons ici que la première équation du système lagrangien a la forme ci-dessous,

$$\partial_\tau \vartheta - \partial_m u = 0. \tag{3.31}$$

Elle implique qu'au travers d'un choc de pente λ, on a la relation de saut,

$$\Delta u + \lambda \Delta\vartheta = 0. \tag{3.32}$$

Dans la suite, on considèrera des solveurs simples vérifiant l'analogue discret de (3.31) au travers de chaque changement d'états, i.e., on supposera que :

$$\delta u_k + \lambda_k \delta \vartheta_k = 0 \quad pour \quad k = 1, m. \quad (H_1)$$

Cette hypothèse est naturelle car l'équation (3.31) est linéaire. Elle est en outre vérifiée par les schémas étudiés dans (GAL2).
Soient (α, β) un couple de réels conjugués, i.e., vérifiant, $\alpha + \beta = 1$, ainsi qu'une suite $(X_k)_k$. On notera alors, $X_{\alpha,k} = \alpha X_k + \beta X_{i+1}$.
Soient enfin deux couples (X_g, X_d) et (Y_g, Y_d); on montre facilement l'identité ci-dessous,

$$\Delta(XY) = X_\alpha \Delta Y + Y_\beta \Delta X.$$

En utilisant la notation précédente, on note que si (H_1) est vérifiée, on a alors pour tout α et tout k :

$$u_{\alpha,k} + \lambda_k \vartheta_{\alpha,k} = u_k + \lambda_k \vartheta_k = u_{k+1} + \lambda_k \vartheta_{k+1}.$$

On notera dans ce cas :

$$\Lambda_k = u_{\alpha,k} + \lambda_k \vartheta_{\alpha,k} \tag{3.33}$$

On remarque enfin que si les quantités $(\vartheta_k)_k$ sont positives, alors la suite $(\Lambda_k)_k$ est croissante. Ceci nous amènera à considérer par la suite l'hypothèse suivante :

$$\vartheta_k \geq 0 \quad pour \quad k = 1, m. \quad (H_2)$$

On construit maintenant pour le système eulérien (3.28) le solveur de Riemann ci-dessous défini par les pentes $(\Lambda_k)_{k=1,m}$ et les états intermédiaires ci-dessous :

$$\mathbf{W}_E(x/t) = \left\{ \begin{array}{lcll} \mathbf{U}_1 & = & \mathbf{U}_g & = \mathbf{U}(\mathbf{V}_g) \quad \text{si} \quad x/t < \Lambda_1, \\ \mathbf{U}_k & = & \mathbf{U}(\mathbf{V}_k) & \text{pour} \quad \Lambda_{k-1} < x/t \leq \Lambda_k \quad \text{et} \quad k = 2, m, \\ \mathbf{U}_{m+1} & = & \mathbf{U}_d & = \mathbf{U}(\mathbf{V}_d) \quad \text{si} \quad \Lambda_m \leq x/t. \end{array} \right. \tag{3.34}$$

Nous allons déterminer par la suite sous quelles conditions le solveur $\mathbf{W}_E$ est un solveur de type Godunov. Cependant, avant d'énoncer le résultat principal, on donne le lemme suivant :

Lemme 1.
Supposons (H1) vérifiée. Soit $(x_k)_k$ une suite quelconque et $(X_k)_k = (\rho_k x_k)_k$.
On a l'identité suivante :

$$\sum_{k=1,m} \Lambda_k \delta X_k = \Delta(uX) + \sum_{k=1,m} \lambda_k \delta x_k.$$

Preuve :

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_k \Lambda_k \delta X_k &= \sum_k [u_{\alpha,k} + \lambda_k \vartheta_{\alpha,k}] \delta X_k \\
&= \sum_k [u_{\alpha,k} \delta X_k - \lambda_k X_{\beta,k} \delta \vartheta_k] + \sum_k \lambda_k [\vartheta_{\alpha,k} \delta X_k + X_{\beta,k} \delta \vartheta_k] \\
&= \sum_k [u_{\alpha,k} \delta X_k + X_{\beta,k} \delta u_k] + \sum_k \lambda_k [\vartheta_{\alpha,k} \delta X_k + X_{\beta,k} \delta \vartheta_k] \qquad \text{en utilisant (H1)} \\
&= \sum_k \delta(uX)_k + \sum_k \lambda_k \delta(\vartheta X)_k \\
&= \Delta(uX) + \sum_k \lambda_k \delta x_k.
\end{aligned}$$

◇

De même, on a le corollaire immédiat suivant :

Corollaire 1.
Pour tout réel A, l'équivalence suivante est vérifiée :

$$\sum_{k=1,m} \lambda_k \delta x_k \geq A \Longleftrightarrow \sum_{k=1,m} \Lambda_k \delta X_k \geq \Delta(uX) + A.$$

◇

On énonce maintenant le résultat principal donnant l'équivalence entre solveurs lagrangiens et solveurs eulériens.

Proposition 26.
Supposons (H_1) et (H_2) vérifiées.
Le solveur de Riemann simple lagrangien (3.30) est un solveur de type Godunov si et seulement si le solveur de Riemann eulérien (3.34) est un solveur de type Godunov. Plus précisément, posons $\Delta m = \rho_a \Delta x$ où ρ_a dùsigne la moyenne arithmétique de ρ_g et ρ_d. On a alors l'équivalence suivante,

$$\Delta \mathbf{F} - \Delta x \tilde{\mathbf{P}}_e = \sum_{k=1,m} \Lambda_k \delta \mathbf{U}_k \Longleftrightarrow \Delta \mathbf{G} - \Delta m \tilde{\mathbf{P}}_l = \sum_{k=1,m} \lambda_k \delta \mathbf{V}_k, \tag{3.35}$$

avec $\tilde{\mathbf{P}}_e = \rho_a \tilde{\mathbf{P}}_l$.
De même, le solveur de Riemann simple lagrangien (3.30) est un solveur de type Godunov entropique si et seulement si le solveur de Riemann eulérien (3.34) est un solveur de type Godunov entropique. Plus précisément, on a l'équivalence suivante,

$$\Delta(\rho\sigma u + q) - \Delta x \tilde{p}_e \leq \sum_{k=1,m} \Lambda_k \delta(\rho\sigma)_k \Longleftrightarrow \Delta q - \Delta m \tilde{p}_l \leq \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \delta \sigma_k, \tag{3.36}$$

avec $\tilde{p}_e = \rho_a \tilde{p}_l$.

Preuve :
Supposons que (3.30) soit un solveur de type Godunov. Il existe alors $\tilde{\mathbf{P}}_l$ tel que :

$$\Delta\mathbf{G} - \Delta m\tilde{\mathbf{P}}_l = \sum_{k=1,m} \lambda_k \delta\mathbf{V}_k.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{G}^0 - \Delta m\tilde{\mathbf{P}}_l^0 &= \sum_{k=1,m} \lambda_k \delta\mathbf{V}_k^0 \\ &= -\Delta(u\tilde{\mathbf{U}}^0) + \sum_{k=1,m} \Lambda_k \delta\mathbf{U}_k^0, \qquad \text{d'après le lemme 1.}\end{aligned}$$

Compte-tenu de l'égalité $\Delta\mathbf{F} = \Delta(u\mathbf{U}) + \Delta\mathbf{G}^0$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{F} &= \Delta(u\mathbf{U}) - \Delta(u\mathbf{U}^0) + \sum_{k=1,m} \Lambda_k \delta\mathbf{U}_k^0 + \Delta m\tilde{\mathbf{P}}_l^0 \\ &= \Delta(\rho u)\mathbf{n} + \sum_{k=1,m} \Lambda_k \delta\mathbf{U}_k^0 + \Delta m\tilde{\mathbf{P}}_l^0\end{aligned}$$

Or en utilisant le lemme 1 avec $x = 1$, on obtient $\Delta(\rho u) = \sum_{k=1,m} \Lambda_k \delta\rho_k$. D'où finalement :

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{F} &= \sum_{k=1,m} \Lambda_k \delta\rho_k\mathbf{n} + \sum_{k=1,m} \Lambda_k \delta\mathbf{U}_k^0 + \Delta m\tilde{\mathbf{P}}_l^0 \\ &= \sum_{k=1,m} \Lambda_k \delta\mathbf{U}_k + \Delta m\tilde{\mathbf{P}}_l \qquad \text{car} \quad \tilde{\mathbf{P}}_l^0 = \tilde{\mathbf{P}}_l\end{aligned}$$

On définit alors Δx par $\Delta m = \rho_a \Delta x$, et on pose $\tilde{\mathbf{P}}_e = \rho_a \tilde{\mathbf{P}}_l$, ce qui donne le résultat.
La démonstration de la réciproque étant identique, ceci achève la démonstration.
Le cas de l'inégalité d'entropie se traite de façon identique en utilisant le Corollaire 1.

◇

Finalement, on a le corollaire immédiat suivant :

Corollaire 2.
Supposons (H_1) et (H_2) vérifiées.
Le solveur de Riemann simple lagrangien (3.30) est positif si et seulement si le solveur de Riemann simple eulérien (3.34) est positif.

◇

3.4 Application à la Dynamique des gaz avec gravité

3.4.1 Forme eulérienne et forme lagrangienne

Dans la suite de ce document, on adoptera les notations suivantes :
– ρ pour la densité,

- ϑ pour le volume spécifique,
- u pour la vitesse,
- p pour la pression,
- ε pour l'énergie interne donnée par $\varepsilon = p\vartheta/(\gamma - 1)$ en gaz parfait (γ rapport des chaleurs spécifiques),
- s pour l'entropie spécifique donnée en gaz parfait par $s = f(p\vartheta^\gamma)$ où f croissante convexe,
- E pour l'énergie totale donnée par $E = \varepsilon + 1/2u^2$,
- g constante de gravité.

Dans le cas eulérien, le modèle de la Dynamique des gaz avec gravité est donné par :

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F} = \mathbf{P}_e \tag{3.37}$$

où les vecteurs $\mathbf{U}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{P}_e$ ont les expressions ci-dessous :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u E + p u \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{P}_e = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho g \\ -\rho u g \end{pmatrix}$$

Les solutions entropiques de (3.37) vérifient l'inéquation d'entropie classique :

$$\partial_t(\rho s) + \partial_x(\rho u s) \leq 0 \tag{3.38}$$

Le modèle lagrangien est quant à lui donné par :

$$\partial_\tau \mathbf{V} + \partial_m \mathbf{G} = \mathbf{P}_l \tag{3.39}$$

où les vecteurs $\mathbf{V}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{P}_l$ vérifient :

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \vartheta \\ u \\ E \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} -u \\ p \\ pu \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{P}_l = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ -ug \end{pmatrix}$$

D'autre part, les solutions entropiques de (3.39) vérifient :

$$\partial_\tau s \leq 0 \tag{3.40}$$

On termine maintenant ce paragraphe en donnant une forme moins connue du système (3.37). Celle-ci a été étudiée dans [CAR-LER]. Elle est définie par le système eulérien conservatif ci-dessous :

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho \mathcal{E} \\ \rho q \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho u \mathcal{E} + P u \\ \rho q u \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{3.41}$$

et sa version lagrangienne :

$$\partial_t \begin{pmatrix} \vartheta \\ u \\ \mathcal{E} \\ q \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} -u \\ P \\ Pu \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{3.42}$$

avec $\mathcal{E} = E - \dfrac{q}{\rho}$, $q = \displaystyle\int \rho g dx$ et $P = p + q$ la pression totale.
Dans [CAR-LER], un schéma quilibre basé sur un solveur de choc est construit pour (3.41). Il permet de préserver les atmosphères au repos pour le système (3.41).
Enfin, on notera que les systèmes (3.41) et (3.42) ont respectivement (3.38) et (3.40) pour inéquations d'entropie.

3.4.2 Solveur de type Godunov pour la forme conservative

Dans le cas de la Dynamique des gaz, nous avons pu construire un solveur simple ayant des pentes données a priori [GAL2]. Il est donné par :

$$\mathbf{W}(m/\tau, \mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d) = \begin{cases} \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_g & \text{si} \quad m/\tau \leq -C_-, \\ \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_g^* = \mathbf{V}_g + \phi_- \mathbf{R}_- & \text{si} \quad -C_- < m/\tau \leq 0, \\ \mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_d^* = \mathbf{V}_d - \phi_+ \mathbf{R}_+ & \text{si} \quad 0 < m/\tau \leq C_+, \\ \mathbf{V}_4 = \mathbf{V}_d & \text{si} \quad C_+ < m/\tau, \end{cases} \tag{3.43}$$

$$\mathbf{R}_\pm = {}^t(-1, \pm C_\pm, p_\beta \pm u_\alpha C_\pm) \qquad , \qquad \phi_\pm = \frac{\Delta p \pm C_\mp \Delta u}{C_- C_+ + (C_\pm)^2}. \tag{3.44}$$

La notation x_α désigne la moyenne $x_\alpha = \alpha x_g + \beta x_d$ pour un couple (x_g, x_d), avec β le conjugué de α, i.e., $\beta = 1 - \alpha$.
Il est facile d'étendre ce solveur au cas du système conservatif de la Dynamique des gaz avec gravité (3.42). En effet, définissons le solveur suivant :

$$\mathbf{W}_c(m/\tau, \mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d) = \begin{cases} \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_g & si \quad m/\tau \leq -C_-, \\ \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_g^* = \mathbf{V}_g + \phi_- \mathbf{R}_- & si \quad -C_- < m/\tau \leq 0, \\ \mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_d^* = \mathbf{V}_d - \phi_+ \mathbf{R}_+ & si \quad 0 < m/\tau \leq C_+, \\ \mathbf{V}_4 = \mathbf{V}_d & si \quad C_+ < m/\tau, \end{cases} \tag{3.45}$$

$$\mathbf{R}_\pm = {}^t(-1, \pm C_\pm, P_\beta \pm u_\alpha C_\pm, 0) \qquad , \qquad \phi_\pm = \frac{\Delta P \pm C_\mp \Delta u}{C_- C_+ + (C_\pm)^2}. \tag{3.46}$$

On en tire les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
u_g^* = u_d^* &= \frac{1}{C_- + C_+}(C_- u_g + C_+ u_d - \Delta P) \\
\vartheta_g^* &= \vartheta_g - \frac{1}{C_-(C_- + C_+)}(\Delta P - C_+ \Delta u) \\
\vartheta_d^* &= \vartheta_d + \frac{1}{C_+(C_- + C_+)}(\Delta P + C_- \Delta u) \\
\mathcal{E}_g^* - \mathcal{E}_g &= \frac{1}{C_-(C_- + C_+)}(\Delta P - C_+ \Delta u)(P_\beta - u_\alpha C_-) \\
\mathcal{E}_d^* - \mathcal{E}_d &= \frac{-1}{C_+(C_- + C_+)}(\Delta P + C_- \Delta u)(P_\beta + u_\alpha C_+) \\
q_g^* = q_g \quad &, \quad q_d^* = q_d
\end{aligned} \tag{3.47}$$

On a alors le résultat suivant dont on omettra la démonstration :

Proposition 27.
Le solveur de Riemann (3.45) est un schéma de type Godunov. Il préserve les discontinuités de contact, et si $\alpha = \dfrac{C_-}{C_- + C_+}$, *il est positif et entropique pour* C_-, C_+ *assez grand.*

◇

On ne donne pas la preuve de ce résultat car elle est en tout point identique à la démonstration du même résultat pour le solveur (3.43) [GAL3]. On notera en outre qu'en utilisant les résultats de [GAL4], on en déduit un solveur de type Godunov positif et entropique pour la forme eulérienne (3.41).

◇

3.4.3 Solveur de type Godunov pour la forme non-conservative

Dans ce paragraphe, on construit un solveur de Riemann simple à deux états intermédiaires $\mathbf{V}_g^*$ et $\mathbf{V}_d^*$ pour le système non-conservatif de la Dynamique des gaz avec gravité (3.39). On imposera à ce solveur de vérifier les propriétés (H1) et (H2). Celles-ci permettront d'en déduire un solveur simple pour la forme eulérienne.
Définissons les états intermédiaires suivants :

$$\mathbf{V}_g^* = \begin{pmatrix} \vartheta_g^* \\ u_d^* \\ E_g^* \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{V}_g^* = \begin{pmatrix} \vartheta_d^* \\ u_d^* \\ E_d^* \end{pmatrix}$$

Ces états doivent vérifier l'égalité suivante :

$$-C_-(\mathbf{V}_g^* - \mathbf{V}_g) + C_+(\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_d^*) = \mathbf{\Delta G} - \Delta m \mathbf{P}_l$$

ou encore

$$-C_-(\vartheta_g^* - \vartheta_g) + C_+(\vartheta_d - \vartheta_d^*) = -\Delta u \tag{3.48}$$

$$-C_-(u_g^* - u_g) + C_+(u_d - u_d^*) = \Delta p + \Delta mg \tag{3.49}$$
$$-C_-(E_g^* - E_g) + C_+(E_d - E_d^*) = \Delta(pu) + \tilde{u}\Delta mg \tag{3.50}$$

où $\tilde{u}$ est une approximation de la vitesse à définir.
Par analogie avec le cas conservatif, on définit (à une constante près) la variable q par $\Delta q = g\Delta m$ et on désigne la pression totale par $P = p + q$. Les équations (3.49, 3.50) deviennent alors :

$$-C_-(u_g^* - u_g) + C_+(u_d - u_d^*) = \Delta p + \Delta q = \Delta P \tag{3.51}$$
$$-C_-(E_g^* - E_g) + C_+(E_d - E_d^*) = \Delta(pu) + \tilde{u}\Delta q \tag{3.52}$$

En outre, puisque (H1) est vrai, on a aussi :

$$u_g^* - C_-\vartheta_g^* = u_g - C_-\vartheta_g \tag{3.53}$$
$$u_d^* + C_+\vartheta_d^* = u_d + C_+\vartheta_d \tag{3.54}$$
$$u_g^* = u_d^* \tag{3.55}$$

D'après (3.55), les vitesses des états intermédiaires sont identiques, ce qui permet de poser $u^* = u_g^* = u_d^*$. Des égalités (3.48, 3.51, 3.53, 3.54), on tire les expressions suivantes pour $\vartheta_{g,d}^*$ et u^* :

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{1}{C_- + C_+}(C_-u_g + C_+u_d - \Delta P) \\ \vartheta_g^* &= \vartheta_g - \frac{1}{C_-(C_- + C_+)}(\Delta P - C_+\Delta u) \\ \vartheta_d^* &= \vartheta_d + \frac{1}{C_+(C_- + C_+)}(\Delta P + C_-\Delta u) \end{aligned} \tag{3.56}$$

On note que ces expressions sont identiques à celles obtenues dans le cas conservatif pour le solveur (3.45). Il reste maintenant à déterminer les énergies des états intermédiaires E_g^* et E_d^*. Pour cela, on va utiliser les expressions des états intermédiaires associés au solveur simple pour le système conservatif. Ceux-ci vérifient les relations (3.47). On en tire l'expression suivante de E_g^* :

$$\begin{aligned} E_g^* - E_g &= q_g^*\vartheta_g^* - q_g\vartheta_g + \frac{1}{C_-(C_- + C_+)}(\Delta P - C_+\Delta u)(P_\beta - u_\alpha C_-) \\ &= q_g(\vartheta_g^* - \vartheta_g) + \frac{1}{C_-(C_- + C_+)}(\Delta P - C_+\Delta u)(P_\beta - u_\alpha C_-) \\ &= \frac{q_g}{C_-}(u^* - u_g) + \frac{1}{C_-(C_- + C_+)}(\Delta P - C_+\Delta u)(P_\beta - u_\alpha C_-) \qquad \text{d'après (H1)} \end{aligned} \tag{3.57}$$

De même, on a à droite :

$$\begin{aligned} E_d^* - E_d &= q_d^*\vartheta_d^* - q_d\vartheta_d - \frac{1}{C_+(C_- + C_+)}(\Delta P + C_-\Delta u)(P_\beta + u_\alpha C_+) \\ &= q_d(\vartheta_d^* - \vartheta_d) - \frac{1}{C_+(C_- + C_+)}(\Delta P + C_-\Delta u)(P_\beta + u_\alpha C_+) \\ &= -\frac{q_d}{C_+}(u^* - u_d) - \frac{1}{C_+(C_- + C_+)}(\Delta P + C_-\Delta u)(P_\beta + u_\alpha C_+) \qquad \text{d'aprï¿½s (H1)} \end{aligned} \tag{3.58}$$

Ces relations permettent alors de définir le solveur simple non-conservatif suivant :

$$\mathbf{W}_{nc}(m/\tau, \mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d) = \left\{ \begin{array}{rcll} \mathbf{V}_1 & = & \mathbf{V}_g & si \quad m/\tau \leq -C_- \\ \mathbf{V}_2 & = & \mathbf{V}_g^* & si \quad -C_- < m/\tau \leq 0 \\ \mathbf{V}_3 & = & \mathbf{V}_d^* & si \quad 0 < m/\tau \leq C_+ \\ \mathbf{V}_4 & = & \mathbf{V}_d & si \quad C_+ < m/\tau \end{array} \right. \tag{3.59}$$

où les états intermédiaires $\mathbf{V}_g^*$ et $\mathbf{V}_d^*$ sont définis par (3.56, 3.57, 3.58).
On a alors le résultat ci-dessous :

Proposition 28.
Le solveur de Riemann (3.59) est un solveur de type Godunov pour le système lagrangien de la Dynamique des gaz avec gravité (3.39). En particulier, on a les relations :

$$\begin{array}{c} -C_-(\vartheta_g^* - \vartheta_g) + C_+(\vartheta_d - \vartheta_d^*) = -\Delta u \\ -C_-(u_g^* - u_g) + C_+(u_d - u_d^*) = \Delta p + \Delta mg \\ -C_-(E_g^* - E_g) + C_+(E_d - E_d^*) = \Delta(pu) + u^*\Delta mg \end{array}$$

Preuve :
Les deux relations (3.48, 3.49) sont vérifiées par construction. Pour obtenir (3.50), on multiplie (3.57) par $-C_-$ et (3.58) par $-C_+$ et on somme les deux relations. On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} -C_-(E_g^* - E_g) + C_+(E_d - E_d^*) & = & -q_g(u^* - u_g) + q_d(u^* - u_d) \\ & & -\dfrac{1}{C_- + C_+}(\Delta P - C_+\Delta u)(P_\beta - u_\alpha C_-) \\ & & +\dfrac{1}{C_- + C_+}(\Delta P + C_-\Delta u)(P_\beta + u_\alpha C_+) \\ & = & u^*\Delta q - \Delta(qu) + \Delta(Pu) \\ & = & u^*\Delta q + \Delta(pu) \end{array}$$

L'égalité (3.50) est donc vérifiée en prenant $\tilde{u} = u^*$.

◇

Nous nous intéressons maintenant aux propriétés de positivité et de préservation d'entropie du solveur (3.59). Afin de simplifier les calculs, on effectue d'abord le choix suivant pour les coefficients α et β :

$$\alpha = \frac{C_-}{C_- + C_+} \quad , \quad \beta = \frac{C_+}{C_- + C_+}. \tag{3.60}$$

Ce choix est canonique car il permet d'exprimer le flux numérique du solveur simple construit dans [GAL2] pour la Dynamique des gaz lagrangienne, sous la forme d'un flux continu évalué en un état moyen. On a alors la propriété suivante :

Proposition 29.
Les états intermédiaires du solveur de Riemann simple (3.59) avec le choix (3.60) sont positifs pour C_-, C_+ assez grands (i.e. $\vartheta_{g,d}^* > 0$ et $\varepsilon_{g,d}^* > 0$).

Preuve :
Définissons $r = C_+/C_-$. En utilisant les relations (3.56), on a par exemple à gauche

$$\vartheta_g^* = \vartheta_g + \frac{rC_-\Delta u - \Delta P}{C_-^2(1+r)} \tag{3.61}$$

dont en déduit facilement la positivité de ϑ_g^* pour C_+ et C_- assez grands.
De plus, en utilisant (3.53), (3.56) et (3.57) on obtient :

$$\begin{aligned} E_g^* - E_g &= \frac{q_g}{C_-}(u^* - u_g) + \frac{1}{C_-(C_- + C_+)}(\Delta P - C_+\Delta u)(P_\beta - u_\alpha C_-) \\ &= \frac{q_g}{C_-}(u^* - u_g) - (u^* - u_g)\left(\frac{P_\beta}{C_-} - u_\alpha\right) \\ &= \left(\frac{q_g}{C_-} - \frac{P_\beta}{C_-} + u_\alpha\right)(u^* - u_g) \end{aligned}$$

d'où l'on tire :

$$\begin{aligned} \varepsilon_g^* - \varepsilon_g &= -\frac{1}{2}((u^*)^2 - u_g^2) + \left(\frac{q_g}{C_-} - \frac{P_\beta}{C_-} + u_\alpha\right)(u^* - u_g) \\ &= -\left(\frac{1}{2}(u^* + u_g) - \frac{q_g}{C_-} + \frac{P_\beta}{C_-} - u_\alpha\right)(u^* - u_g) \end{aligned}$$

En utilisant l'expression de u^* donnée par (3.56), on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(u^* + u_g) - \frac{q_g}{C_-} + \frac{P_\beta}{C_-} - u_\alpha &= \frac{1}{2}\left(\frac{C_-u_g + C_+u_d - \Delta P}{C_- + C_+} + u_g\right) - \alpha u_g - \beta u_d + \frac{P_\beta - q_g}{C_-} \\ &= \frac{1}{2}\left(\alpha u_g + \beta u_d - \frac{\Delta P}{C_- + C_+} + u_g\right) - \alpha u_g - \beta u_d + \frac{P_\beta - q_g}{C_-} \\ &= \frac{1-\alpha}{2}u_g - \frac{\beta}{2}u_d - \frac{\Delta P}{2(C_- + C_+)} + \frac{P_\beta}{C_-} - \frac{q_g}{C_-} \\ &= -\frac{\beta}{2}\Delta u - \frac{P_d - P_g}{2(C_- + C_+)} + \frac{rP_g + P_d}{C_- + C_+} - \frac{q_g}{C_-} \\ &= -\frac{\beta}{2}\Delta u + \frac{1}{C_- + C_+}\left(\frac{1}{2}P_d + (\frac{1}{2} + r)P_g - (1+r)q_g\right) \\ &= -\frac{1}{2(C_- + C_+)}\left(rC_-\Delta u - \pi_g\right) \end{aligned}$$

où $\pi_g = P_d + (1+2r)P_g - 2(1+r)q_g$.
En utilisant de nouveau (3.53) et (3.56), on en déduit finalement l'expression de l'énergie interne de l'état intermédiaire gauche :

$$\varepsilon_g^* = \varepsilon_g + \frac{1}{2{C_-}^2(1+r)^2}(rC_-\Delta u - \pi_g)(rC_-\Delta u - \Delta P), \tag{3.62}$$

Par suite, on a à la limite :

$$\liminf_{C_\pm \to +\infty} \varepsilon_g^* = \varepsilon_g + \frac{(\Delta u)^2}{2} \liminf_{C_\pm \to +\infty} (\frac{r}{1+r})^2, \tag{3.63}$$

ce qui achève la démonstration.

◇

Remarque 1.
Lorsque le paramètre $r = C_+/C_-$ est constant (par exemple, $r = 1$), la condition de positivité peut être obtenue explicitement en résolvant deux équations du second degré.

◇

Nous considérons maintenant le caractère entropique du solveur de Riemann simple (3.59). On rappelle ici que le flux d'entropie du système (3.39) est nul. On a alors le résultat suivant :

Proposition 30.
Soit s une entropie du système(3.39). Supposons que $\lim_{C_\pm \to +\infty} r = r_\infty > 0$. Alors, pour C_-, C_+ suffisamment grands, le solveur (3.59), (3.60) est un solveur de type Godunov entropique. De plus, si $Max(C_-, C_+)\Delta\tau \leq \Delta m/2$, l'inégalité d'entropie suivante est vérifiée maille à maille :

$$s(V_i^{n+1}) \leq s(V_i^n).$$

Preuve :
Afin de montrer que le schéma est un schéma de type Godunov entropique, il suffit de vérifier que l'on a $s_g^* \leq s_g$ et $s_d^* \leq s_d$ pour C_- et C_+ suffisamment grands. Dans le cas d'un gaz parfait, toute entropie est de la forme $s = f(\varepsilon\vartheta^{\gamma-1})$ avec f une fonction croissante. Par suite, nous devons montrer

$$\frac{\varepsilon_g^*}{\varepsilon_g}\left(\frac{\vartheta_g^*}{\vartheta_g}\right)^{\gamma-1} \geq 1. \tag{3.64}$$

Lorsque $\Delta u \neq 0$, d'après (3.61) et (3.62) il est clair que pour $C_\pm$ assez grands, l'inégalité (3.64) sera vérifiée.
Pour $\Delta u = 0$, si $\Delta P = 0$, alors $V_g^* = V_g$, et aussi, $s_g^* = s_g$. L'inégalité (3.64) est donc satisfaite. Maintenant, si $\Delta P \neq 0$, on a

$$\frac{\varepsilon_g^*}{\varepsilon_g} = 1 + \frac{\pi_g \Delta P}{2(1+r)^2 \varepsilon_g {C_-}^2}, \qquad \frac{\vartheta_g^*}{\vartheta_g} = 1 - \frac{\Delta P}{(1+r)\vartheta_g {C_-}^2}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon_g^*}{\varepsilon_g}\left(\frac{\vartheta_g^*}{\vartheta_g}\right)^{\gamma-1} &= (1 + \frac{\pi_g \Delta P}{2(1+r)^2 \varepsilon_g {C_-}^2})(1 - \frac{\Delta P}{(1+r)\vartheta_g {C_-}^2})^{\gamma-1} \\
&= 1 + \frac{\pi_g \Delta P}{2(1+r)^2 \varepsilon_g {C_-}^2} - \frac{(\gamma-1)\Delta P}{(1+r)\vartheta_g {C_-}^2} + O(1/{C_-}^4) \\
&= 1 + \frac{\Delta P}{2(1+r)^2 \varepsilon_g {C_-}^2}(\pi_g - 2(1+r)p_g) + O(1/{C_-}^4) \\
&= 1 + \frac{\Delta P}{2(1+r)^2 \varepsilon_g {C_-}^2}(P_d + (1+2r)P_g - 2(1+r)q_g - 2(1+r)p_g) + O(1/{C_-}^4) \\
&= 1 + \frac{(\Delta P)^2}{2(1+r)^2 \varepsilon_g {C_-}^2} + O(1/{C_-}^4).
\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration pour un gaz parfait. Dans le cas d'un gaz réel, la preuve est identique et on ne la donne pas ici.

Nous allons maintenant montrer l'inégalité d'entropie maille par maille. Pour cela, on introduit les états suivants :

$$V^{\pm} = \frac{\pm 2}{\Delta m} \int_0^{\pm \Delta m/2} W(m/\Delta\tau; V_g, V_d) dm = \frac{2C_{\pm}\Delta\tau}{\Delta m} V^*_{d,g} + (1 - \frac{2C_{\pm}\Delta\tau}{\Delta m}) V_{d,g}.$$

En utilisant la convexité de l'entropie ainsi que (3.64), on obtient pour $C_{\pm}$ assez grands

$$s(V^{\pm}) \leq \frac{2C_{\pm}\Delta\tau}{\Delta m} s^*_{d,g} + (1 - \frac{2C_{\pm}\Delta\tau}{\Delta m}) s_{d,g} \leq s_{d,g}.$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned} s(V_i^{n+1}) &= s\left(\frac{1}{2}((V^+)^n_{i-1/2} + (V^-)^n_{i+1/2})\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(s((V^+)^n_{i-1/2}) + s((V^-)^n_{i+1/2})\right) \\ &\leq \frac{1}{2}(s(V_i^n) + s(V_i^n)) = s(V_i^n), \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat.

◇

3.4.4 Solutions équilibre

Pour le système de la Dynamique des gaz avec gravité, le problème de l'équilibre se pose a priori dans le cas eulérien pour lequel les solutions d'équilibre sont définies par :

$$u = 0 \quad \text{et} \quad \partial_x p = -\rho g.$$

En appliquant la Proposition 26, on obtient à partir du solveur lagrangien (3.59) un solveur eulérien entropique et positif dont il est possible de caractériser les solutions équilibre. On a vu que pour un solveur simple, les états intermédiaires gauche doivent être égaux à l'état gauche et les états intermédiaires droite doivent être égaux à l'état droit. Puisqu'il y a correspondance entre les états intermédiaires lagrangiens et eulériens, il suffit donc de considérer le cas lagrangien. Pour le solveur (3.59), il est aisé de vérifier que si $\Delta u = \Delta P = 0$, ces conditions seront réalisées trivialement. Puisqu'on ne s'intéresse qu'aux solutions de vitesse nulle, ceci permet de définir les solutions numériques d'équilibre par $u = 0$ et $\Delta p = -g\Delta m = -g\rho_a \Delta x$, soit

$$u_i = 0 \quad \text{et} \quad \frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta x} = -g\frac{\rho_{i+1} + \rho_i}{2} \qquad \text{pour tout i.} \tag{3.65}$$

3.4.5 Applications numériques

On considère ci-dessous uniquement des applications numériques en coordonnées eulériennes. Celles-ci ont été réalisées à l'aide du solveur eulérien obtenu à partir du solveur lagrangien (3.59). Le premier cas test considéré est celui d'une atmosphère au repos. Sur les figures (3.1, 3.2) on a superposé les vitesses et les densités obtenues par le schéma entropique et par un schéma de Roe associé à un traitement du terme source standard. Les calculs sont effectués avec un maillage de 100 cellules entre 0 et 100 km jusqu'au temps 50s. On constate que le schéma entropique préserve sans problème la condition initiale définie par (3.65), alors que la condition initiale est fortement dégradée par le schéma de Roe. En particulier, les vitesses ne sont plus nulles.

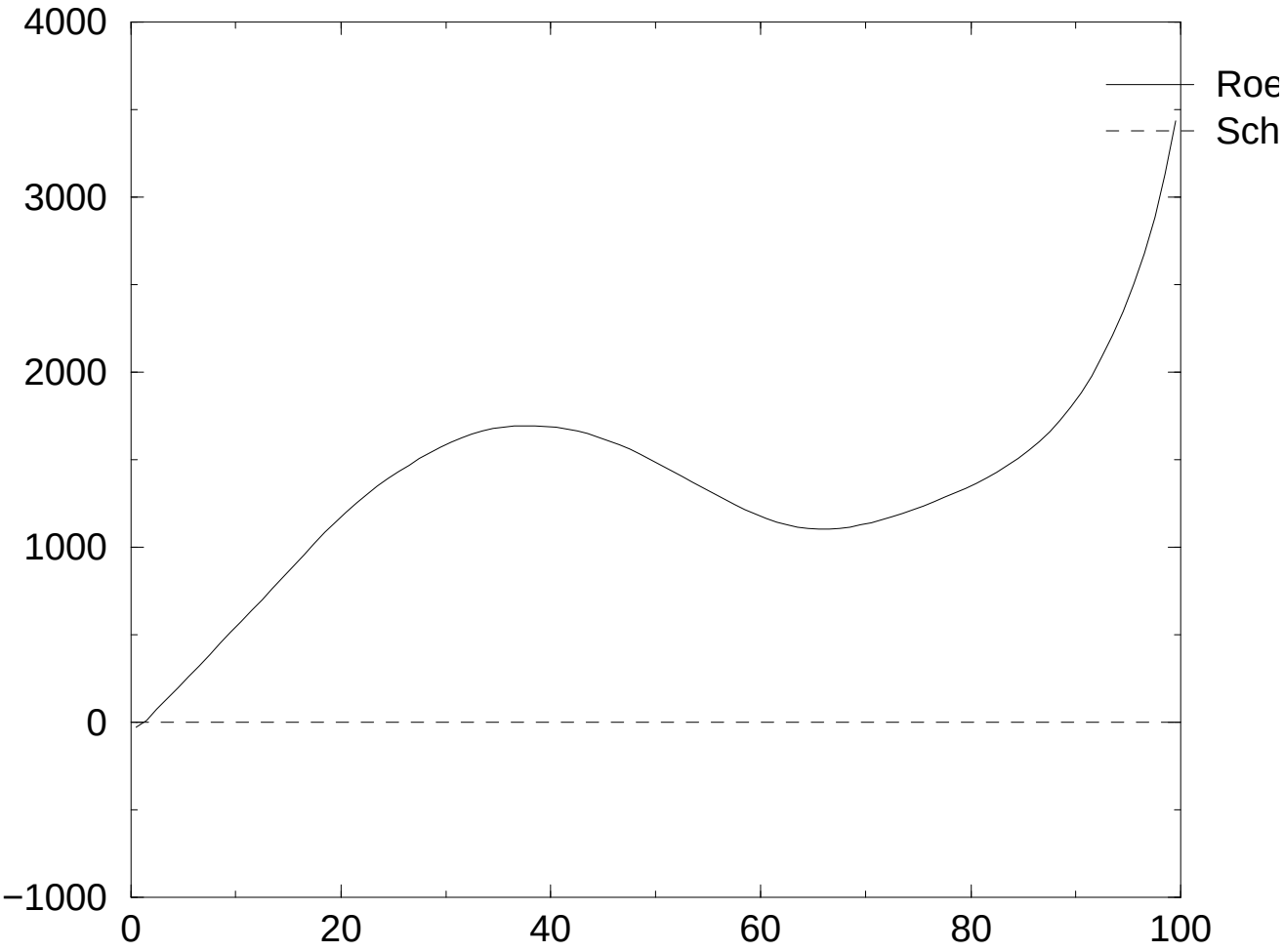


FIG. 3.1 – *Atmosphère à l'équilibre : Vitesses verticales*

Le deuxième cas test est constitué d'une atmosphère au repos sur laquelle on a superposé une zone de dépôt uniforme. Les discontinuités initiales sont de l'ordre de 10^3 à 10^4 sur les densités et de 10^4 à 10^5 sur les pressions. On constate sur les figures (3.3, 3.5, 3.4) le bon comportement du schéma qui supporte sans problème les fortes discontinuités. Ceci permet de mettre en évidence la robustesse du schéma.

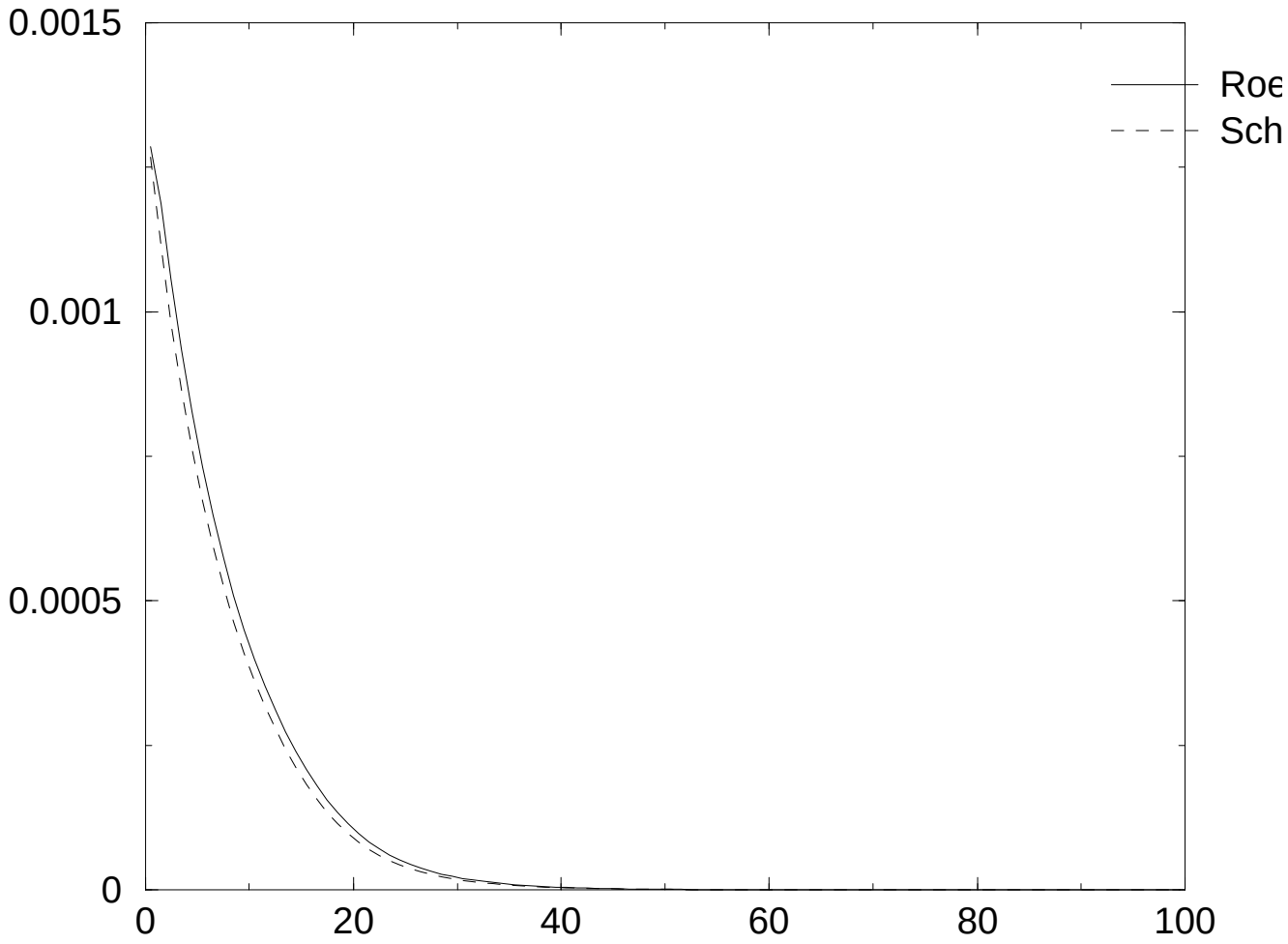


FIG. 3.2 – *Atmosphère à l'équilibre : Masses volumiques*

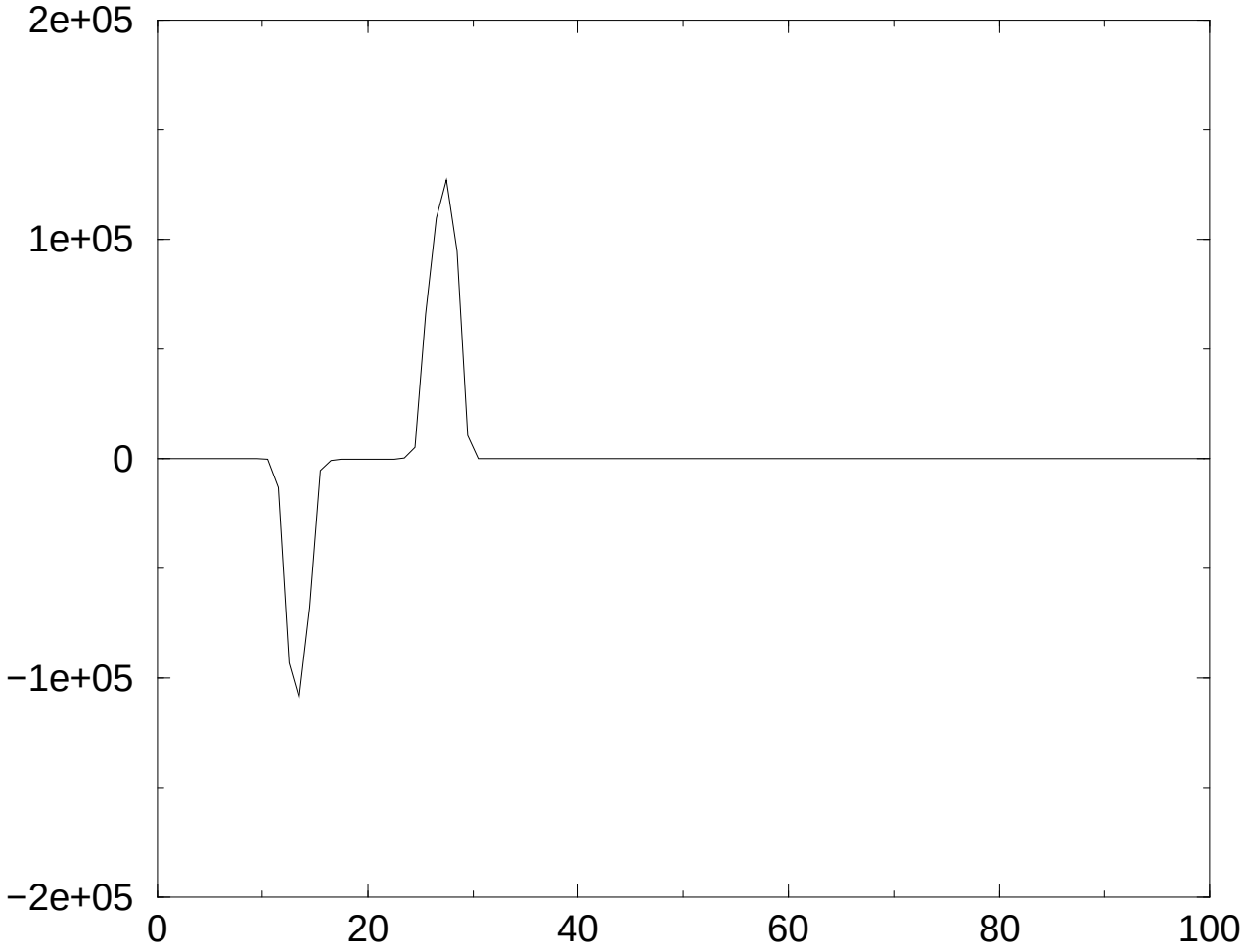


FIG. 3.3 – *Dépôt dans une atmosphère à l'équilibre : Vitesses verticales*

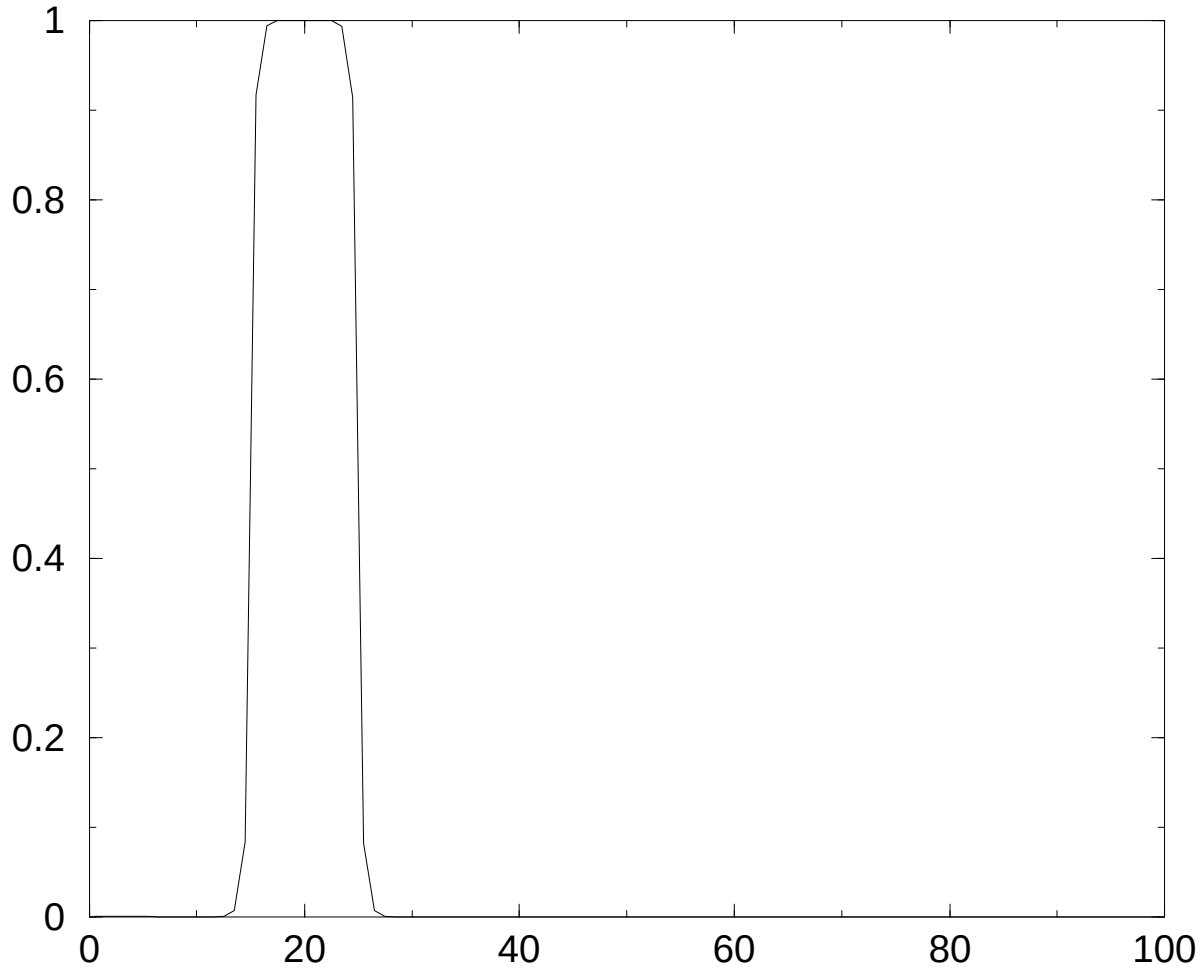


FIG. 3.4 – *Dépôt dans une atmosphère à l'équilibre : Masses volumiques*

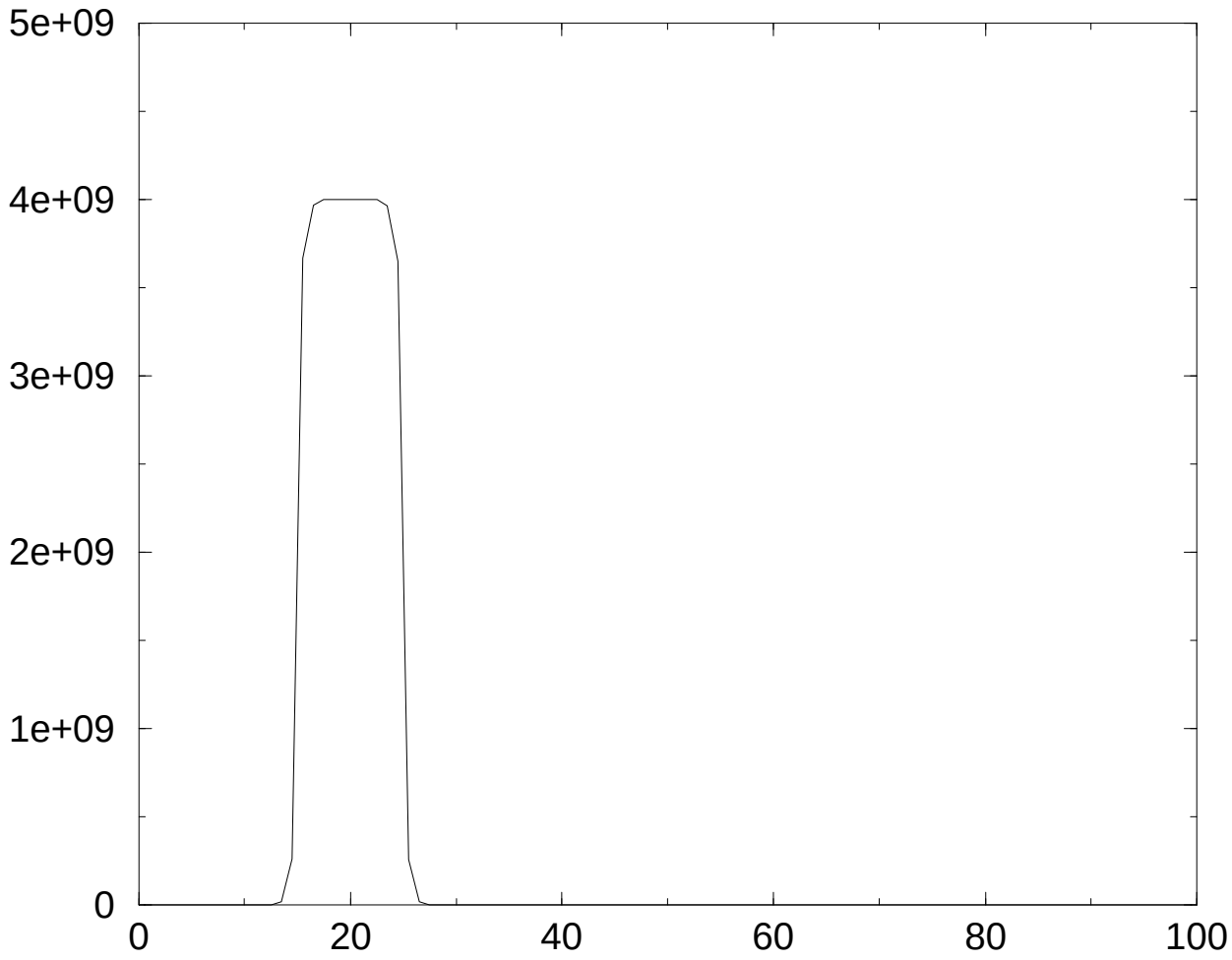


FIG. 3.5 – *Dépôt dans une atmosphère à l'équilibre : Pressions*

3.5 Application au système de Saint-Venant

3.5.1 Forme eulérienne et forme lagrangienne

Dans le cas eulérien, le modèle de Saint-Venant est donné par :

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F} = \mathbf{P}_e. \tag{3.66}$$

où les vecteurs $\mathbf{U}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{P}_e$ ont les expressions ci-dessous :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + gh^2/2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{P}_e = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh\partial_x Z \end{pmatrix}.$$

Dans les expressions ci-dessus, h désigne la hauteur d'eau, u la vitesse et Z la bathymétrie satisfaisant $Z = Z(x)$. La constante g est la constante de gravité, et quitte à remplacer h par gh et Z par gZ, on remarque que l'on peut supposer que $g = 1$, ce que l'on fera par la suite. On considèrera donc le système suivant :

$$\partial_t \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \dfrac{h^2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -h\partial_x Z \end{pmatrix}. \tag{3.67}$$

On remarquera que le terme $\dfrac{h^2}{2}$ joue le rôle d'une pression. Ceci suggère de considérer la classe plus générale des systèmes suivants, où $p = p(h)$ est une fonction croissante quelconque, soit,

$$\partial_t \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -h\partial_x Z \end{pmatrix}. \tag{3.68}$$

On note alors la forte analogie avec le système de la Dynamique des gaz isentropique.
Définissons maintenant l'énergie interne $\varepsilon = \varepsilon(h)$ par $\dfrac{d\varepsilon}{dh} = \dfrac{p}{h^2}$. On définit alors l'énergie par $E = \varepsilon + \dfrac{u^2}{2}$. Avec ces notations, l'inéquation d'entropie en coordonnées eulériennes s'écrit,

$$\partial_t(hE) + \partial_x(uhE + up) \leq -hu\partial_x Z, \tag{3.69}$$

mais possède aussi la forme suivante,

$$\partial_t(hE_t) + \partial_x(uhE_t + up) \leq 0, \tag{3.70}$$

où $E_t = E + Z$. Cette dernière inéquation est trivialement équivalente à la précédente dans le cas où Z est régulière.
Le modèle lagrangien est quant à lui donné par :

$$\partial_\tau \mathbf{V} + \partial_m \mathbf{G} = \mathbf{P}_l, \tag{3.71}$$

où les vecteurs $\mathbf{V}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{P}_l$ vérifient :

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \vartheta \\ u \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} -u \\ p \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{P}_l = \begin{pmatrix} 0 \\ -h\partial_m Z \end{pmatrix},$$

où par analogie avec la Dynamique des gaz, ϑ désigne l'inverse de la hauteur d'eau.
Enfin, l'inéquation d'entropie lagrangienne est la suivante,

$$\partial_\tau E + \partial_m(up) \leq -hu\partial_m Z, \tag{3.72}$$

et l'inéquation d'entropie eulérienne (3.70) a pour équivalent lagrangien,

$$\partial_\tau E_t + \partial_m(up) \leq 0. \tag{3.73}$$

3.5.2 Construction d'un solveur de type Godunov

Dans ce paragraphe, on construit un solveur de Riemann simple à deux états intermédiaires $\mathbf{V}_g^*$ et $\mathbf{V}_d^*$ pour le système non-conservatif de Saint-Venant (3.71). On imposera à ce solveur de vérifier les propriétés (H1) et (H2). Celles-ci permettront d'en déduire un solveur simple pour la forme eulérienne.
Considérons les états intermédiaires suivants :

$$\mathbf{V}_g^* = \begin{pmatrix} \vartheta_g^* \\ u_g^* \end{pmatrix} \qquad , \qquad \mathbf{V}_d^* = \begin{pmatrix} \vartheta_d^* \\ u_d^* \end{pmatrix}.$$

On définit alors le solveur de Riemann simple suivant,

$$\mathbf{W}(m/\tau, \mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d) = \begin{cases} \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_g & si \quad m/\tau \leq -C_- \\ \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_g^* & si \quad -C_- < m/\tau \leq 0 \\ \mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_d^* & si \quad 0 < m/\tau \leq C_+ \\ \mathbf{V}_4 = \mathbf{V}_d & si \quad C_+ < m/\tau \end{cases} \tag{3.74}$$

Afin que ce solveur soit de type Godunov, les états intermédiaires doivent vérifier l'égalité (3.35), soit,

$$-C_-(\mathbf{V}_g^* - \mathbf{V}_g) + C_+(\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_d^*) = \Delta\mathbf{G} - \Delta m\tilde{\mathbf{P}}_l,$$

ou encore, en notant $\overline{h\partial_m Z}$ une approximation quelconque de $h\partial_m Z$ à définir, et aussi $\overline{h\Delta Z} = \Delta m\overline{h\partial_m Z}$,

$$-C_-(\vartheta_g^* - \vartheta_g) + C_+(\vartheta_d - \vartheta_d^*) = -\Delta u, \tag{3.75}$$

$$-C_-(u_g^* - u_g) + C_+(u_d - u_d^*) = \Delta p + \overline{h\Delta Z}. \tag{3.76}$$

Par analogie avec la dynamique des gaz, et afin d'alléger les calculs, on notera aussi, $\overline{\Delta p} = \Delta p + \overline{h\Delta Z}$. La quantité $\overline{\Delta p}$ joue le rôle du saut de pression totale. L' équation (3.76) devient alors,

$$-C_-(u_g^* - u_g) + C_+(u_d - u_d^*) = \overline{\Delta p}. \tag{3.77}$$

En outre, puisque (H1) est vrai, on a aussi :

$$u_g^* - C_-\vartheta_g^* = u_g - C_-\vartheta_g, \tag{3.78}$$

$$u_d^* + C_+\vartheta_d^* = u_d + C_+\vartheta_d, \tag{3.79}$$

$$u_g^* = u_d^*. \tag{3.80}$$

D'après (3.80), les vitesses des états intermédiaires sont identiques, ce qui permet de poser $u^* = u_g^* = u_d^*$. Des égalités (3.75, 3.77, 3.78, 3.79), on tire les expressions suivantes pour $\vartheta_{g,d}^*$ et u^* :

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{1}{C_- + C_+}(C_- u_g + C_+ u_d - \overline{\Delta p}) \\ \vartheta_g^* &= \vartheta_g - \frac{1}{C_-(C_- + C_+)}(\overline{\Delta p} - C_+ \Delta u), \\ \vartheta_d^* &= \vartheta_d + \frac{1}{C_+(C_- + C_+)}(\overline{\Delta p} + C_- \Delta u). \end{aligned} \tag{3.81}$$

Pour une approximation donnée de $h\partial_m Z$, on note que ces expressions définissent de façon unique le solveur de Riemann. On a donc montré le résultat ci-dessous :

Proposition 31.
Le solveur de Riemann (3.74) défini par les relations (3.81) est un solveur de type Godunov pour le système lagrangien de Saint-Venant (3.71). Il induit un solveur de type Godunov pour le système eulérien de Saint-Venant (3.66).

◇

Nous nous intéressons maintenant aux propriétés de positivité du solveur (3.74, 3.81). En effet, tout comme pour la Dynamique des gaz, il est nécessaire de préserver la positivité de la hauteur d'eau h, ou ce qui revient au même de son inverse ϑ. On a alors le résultat suivant :

Proposition 32.
Les états intermédiaires du solveur de Riemann simple (3.74, 3.81) sont positifs pour C_-, C_+ assez grands (i.e. $\vartheta_{g,d}^* > 0$).

Preuve :
Définissons $r = C_+/C_-$. En utilisant les relations (3.81), on a par exemple à gauche,

$$\vartheta_g^* = \vartheta_g + \frac{rC_-\Delta u - \overline{\Delta p}}{C_-^2(1+r)},$$

dont on déduit facilement la positivité de ϑ_g^* pour C_+ et C_- assez grands, ce qui achève la démonstration.

◇

Remarque 2.
Lorsque le paramètre $r = C_+/C_-$ est constant (par exemple, $r = 1$), la condition de positivité peut être obtenue explicitement en résolvant deux équations du second degré.

◇

Nous considérons maintenant le caractère entropique du solveur de Riemann simple (3.74, 3.81). On a alors le résultat suivant :

Proposition 33.
le solveur (3.74, 3.81) est un solveur de type Godunov entropique si les pentes C_-, C_+ sont suffisamment grandes. Plus précisément, on a l'inégalité,

$$\Delta(pu) + u^* \overline{h\Delta Z} \leq -C_-(E_g^* - E_g) + C_+(E_d - E_d^*). \tag{3.82}$$

Il induit un solveur de type Godunov entropique en coordonnées eulériennes qui satifait l'inégalité,

$$\Delta(Eu+pu)+u^*\overline{h\Delta Z} \leq -c_-((hE)^*_g-(hE)_g)+u^*((hE)^*_d-(hE)^*_g)+c_+((hE)_d-(hE)^*_d), \tag{3.83}$$

où les pentes c_-, c_+ sont définies par $-c_- = u_g - C_-\vartheta_g$ et $c_+ = u_d + C_+\vartheta_d$.

Preuve :

Afin de montrer l'inégalité (3.82), nous allons évaluer la quantité définie par,

$$T = \Delta(pu)+u^*\overline{h\Delta Z}+C_-(E^*_g-E_g)+C_+(E^*_d-E_d)$$

On a tout d'abord,

$$\begin{aligned} T &= \Delta(pu)+u^*\overline{h\Delta Z}+C_-(\frac{(u^*)^2}{2}+\varepsilon^*_g-\frac{u_g^2}{2}+\varepsilon_g)+C_+(\frac{(u^*)^2}{2}+\varepsilon^*_d-\frac{u_d^2}{2}+\varepsilon_d),\\ &= \Delta(pu)+u^*\overline{h\Delta Z}+S\left(\frac{(u^*)^2}{2}-\alpha\frac{u_g^2}{2}-\beta\frac{u_d^2}{2}\right)+C_-(\varepsilon^*_g-\varepsilon_g)+C_+(\varepsilon^*_d-\varepsilon_d), \end{aligned}$$

où $\alpha = \dfrac{C_-}{C_-+C_+}$, $\beta = \dfrac{C_+}{C_-+C_+}$, et $S = C_- + C_+$.

On a maintenant, d'une part, en utilisant (3.81),

$$\begin{aligned} \frac{(u^*)^2}{2}-\alpha\frac{u_g^2}{2}-\beta\frac{u_d^2}{2} &= \frac{1}{2}\left[\left(\alpha u_g+\beta u_d-\frac{\overline{\Delta p}}{S}\right)^2-(\alpha u_g^2+\beta u_d^2)\right],\\ &= \frac{1}{2}\left[(\alpha u_g+\beta u_d)^2-(\alpha u_g^2+\beta u_d^2)\right]-\frac{\alpha u_g+\beta u_d}{S}\overline{\Delta p}+\frac{\overline{\Delta p}^2}{2S^2},\\ &= -\frac{\alpha\beta}{2}(\Delta u)^2-\frac{u_\alpha}{S}\overline{\Delta p}+\frac{\overline{\Delta p}^2}{2S^2}, \end{aligned} \tag{3.84}$$

où $u_\alpha = \alpha u_g + \beta u_d$.

D'autre part, en posant $x_g = \dfrac{1}{SC_-}(C_+\Delta u - \overline{\Delta p})$ et $x_d = \dfrac{1}{SC_+}(C_-\Delta u + \overline{\Delta p})$, on a,

$$\begin{aligned} \varepsilon^*_{g,d}-\varepsilon_{g,d} &= x_{g,d}\frac{d\varepsilon}{d\vartheta}(\vartheta_{g,d})+\frac{x_{g,d}^2}{2}\frac{d^2\varepsilon}{d\vartheta^2}(\vartheta_{g,d})+O(x^3_{g,d}),\\ &= -x_{g,d}p_{g,d}+\frac{x_{g,d}^2}{2}\frac{d^2\varepsilon}{d\vartheta^2}(\vartheta_{g,d})+O(x^3_{g,d}). \end{aligned}$$

D'où l'on tire, en posant $\mathcal{R} = C_-\dfrac{x_g^2}{2}\dfrac{d^2\varepsilon}{d\vartheta^2}(\vartheta_g)+C_+\dfrac{x_d^2}{2}\dfrac{d^2\varepsilon}{d\vartheta^2}(\vartheta_d)+C_-O(x_g^3)+C_+O(x_d^3)$,

$$\begin{aligned} C_-(\varepsilon^*_g-\varepsilon_g)+C_+(\varepsilon^*_d-\varepsilon_d) &= -C_-x_gp_g-C_+x_dp_d+\mathcal{R},\\ &= -\frac{p_g}{S}(C_+\Delta u-\overline{\Delta p})-\frac{p_d}{S}(C_-\Delta u+\overline{\Delta p})+\mathcal{R},\\ &= -\frac{\Delta u}{S}(C_+p_g+C_-p_d)-\frac{\Delta p\overline{\Delta p}}{S}+\mathcal{R},\\ &= -p_\beta\Delta u-\frac{\Delta p\overline{\Delta p}}{S}+\mathcal{R}, \end{aligned} \tag{3.85}$$

où $p_\beta = \beta p_g + \alpha p_d$.
Finalement, d'après (3.84) et (3.85), on a,

$$T = \Delta(pu) + u^*\overline{h\Delta Z} - \frac{\alpha\beta S}{2}(\Delta u)^2 - u_\alpha\overline{\Delta p} + \frac{\overline{\Delta p}^2}{2S} - p_\beta\Delta u - \frac{\Delta p\overline{\Delta p}}{S} + \mathcal{R}.$$

Or, rappelons que $\overline{\Delta p} = \Delta p + \overline{h\Delta Z}$ et que $u^* = u_\alpha - \dfrac{\overline{\Delta p}}{S}$. En utilisant l'égalité $\Delta(pu) = u_\alpha\Delta p + p_\beta\Delta u$, on en déduit que,

$$\begin{aligned} T &= \Delta(pu) + u^*\overline{h\Delta Z} - \frac{\alpha\beta S}{2}(\Delta u)^2 - u_\alpha\Delta p - u_\alpha\overline{h\Delta Z} + \frac{\overline{\Delta p}^2}{2S} - p_\beta\Delta u - \frac{\Delta p\overline{\Delta p}}{S} + \mathcal{R}, \\ &= -\frac{\alpha\beta S}{2}(\Delta u)^2 - \frac{\overline{\Delta p}}{S}\overline{h\Delta Z} + \frac{\overline{\Delta p}^2}{2S} - \frac{\Delta p\overline{\Delta p}}{S} + \mathcal{R}, \\ &= -\frac{\alpha\beta S}{2}(\Delta u)^2 - \frac{\overline{\Delta p}}{S}\left(\overline{h\Delta Z} - \frac{\overline{\Delta p}}{2} + \Delta p\right) + \mathcal{R}, \\ &= -\frac{\alpha\beta S}{2}(\Delta u)^2 - \frac{\overline{\Delta p}^2}{2S} + \mathcal{R}. \end{aligned}$$

De plus, on a,$|x_g| = \dfrac{1}{SC_-}|C_+\Delta u - \overline{\Delta p}| \leq \dfrac{1}{C_-}\left(|\Delta u| + \dfrac{|\overline{\Delta p}|}{S}\right)$,
et aussi, $|x_d| \leq \dfrac{1}{C_+}\left(|\Delta u| + \dfrac{|\overline{\Delta p}|}{S}\right)$.
On en déduit que,

$$\mathcal{R} \leq \frac{C_1}{Min(C_-, C_+)}\left(|\Delta u| + \frac{|\overline{\Delta p}|}{S}\right)^2 + \frac{C_2}{Min(C_-^2, C_+^2)}\left(|\Delta u| + \frac{|\overline{\Delta p}|}{S}\right)^3,$$

où C_1 et C_2 sont des constantes indépendantes de C_- et C_+. On a donc finalement obtenu la majoration suivante,

$$T \leq -\frac{\alpha\beta S}{2}(\Delta u)^2 - \frac{\overline{\Delta p}^2}{2S} + \frac{C_1}{Min(C_-, C_+)}\left(|\Delta u| + \frac{|\overline{\Delta p}|}{S}\right)^2 + \frac{C_2}{Min(C_-^2, C_+^2)}\left(|\Delta u| + \frac{|\overline{\Delta p}|}{S}\right)^3. \tag{3.86}$$

Supposons dans un premier temps que $\Delta u \neq 0$.
Or, on a, $\alpha\beta S = \dfrac{C_-C_+}{C_- + C_+} \longrightarrow +\infty$ quand $C_-, C_+ \longrightarrow +\infty$. Le premier terme du second membre de l'inégalité (3.86) est alors dominant, et dans ce cas il est clair que si C_- et C_+ sont assez grands, on a bien $T \leq 0$, qui est l'inï¿½galitï¿½ d'entropie (3.82).
Supposons maintenant que $\Delta u = 0$. L'inégalité (3.86) devient alors,

$$\begin{aligned} T &\leq -\frac{\overline{\Delta p}^2}{2S} + \frac{C_1}{Min(C_-, C_+)}\left(\frac{|\overline{\Delta p}|}{S}\right)^2 + \frac{C_2}{Min(C_-^2, C_+^2)}\left(\frac{|\overline{\Delta p}|}{S}\right)^3, \\ &\leq -\frac{\overline{\Delta p}^2}{2S}\left(1 - \frac{2C_1}{Min(C_-, C_+)S} - \frac{2C_2|\overline{\Delta p}|}{Min(C_-^2, C_+^2)S^2}\right), \end{aligned}$$

et T est bien négatif pour C_- et C_+ assez grands, ce qui achève la démonstration.

$\diamond$

Remarque 3.
On notera que le résultat précédent est vrai indépendamment du choix de $\overline{h\Delta Z}$.

◇

3.5.3 Solutions équilibre

Tout comme pour le système de la Dynamique des gaz avec gravité, on s'intéressera ici uniquement aux solutions stationnaires de vitesse nulle. Elles sont définies par :

$$u = 0 \quad \text{et} \quad \partial_x p = -h\partial_x Z.$$

Définissons alors $f = f(h)$ par $df = \dfrac{dp}{h}$. Les solutions stationnaires sont alors données par,

$$u = 0 \quad \text{et} \quad f + Z = Cste.$$

On remarque alors que si $\Delta u = \overline{\Delta p} = 0$, on a trivialement $\mathbf{V}_g^* = \mathbf{V}_g$ et $\mathbf{V}_d^* = \mathbf{V}_d$ pour le solveur lagrangien. Par suite, puisque les états intermédiaires du solveur eulérien sont définis par $\mathbf{U}_{g,d}^* = \mathbf{U}(\mathbf{V}_{g,d}^*)$, on a donc aussi $\mathbf{U}_g^* = \mathbf{U}_g$ et $\mathbf{U}_d^* = \mathbf{U}_d$.
Définissons maintenant $\overline{h}$ par,

$$\overline{h} = \begin{cases} \dfrac{\Delta p}{\Delta f} & \text{si} \quad \Delta h \neq 0, \\ h_g = h_d & \text{si} \quad \Delta h = 0, \end{cases} \tag{3.87}$$

et posons,

$$\overline{h\Delta Z} = \overline{h}\Delta Z. \tag{3.88}$$

Puisque par définition, $\overline{\Delta p} = \Delta p + \overline{h\Delta Z}$, avec le choix (3.88), on a alors,

$$\overline{\Delta p} = 0 \Longleftrightarrow \Delta(f + Z) = 0.$$

On a donc montré le résultat suivant,

Proposition 34.
le schéma (3.74, 3.81) préserve les solutions stationnaires définies par ,

$$u = 0 \quad et \quad f + Z = Cste.$$

◇

Cas du système de Saint-Venant originel

Dans ce paragraphe, on considère le cas spécifique du système de Saint-Venant (3.66). On a dans ce cas $p = \dfrac{gh^2}{2}$ et $f = gh$ à une constante près. Les solutions stationnaires sont donc données par $h + Z = Cste$ et $u = 0$. On en déduit en utilisant (3.87) que $\overline{h} = h_a$ où h_a désigne la moyenne arithmétique. La discrétisation du terme source est donc donnée par $\overline{h\Delta Z} = h_a\Delta Z$, ce qui constitue une approximation très naturelle et simple de surcroît.

3.5.4 Applications numériques

On considère ci-dessous uniquement des applications numériques en coordonnées eulériennes. Celles-ci ont été réalisées à l'aide du solveur eulérien obtenu à partir du solveur lagrangien (3.74, 3.81). La constante de gravité g est prise dans tous les cas égale à 1.
Le premier cas test considéré est tiré de [PER2] et est dénommé 'Still Water'. Il s'agit de vérifier que le schéma est capable de préserver les solutions à l'équilibre. Le domaine de calcul est constitué d'un canal avec une bosse parabolique sur le fond donnée par l'équation,

$$Z(x) = \left[0.2 - 0.05(x-10)^2\right]^+ .$$

La longueur du canal est de 20m et on utilise 100 mailles. La condition initiale est

$$\begin{aligned} u &= 0, \\ h + Z &= 2. \end{aligned}$$

Sur la figure (3.6), est représentée la solution à t=50s. Elle est totalement superposée avec la solution exacte.

Le deuxième cas test permet de calculer l'écoulement après la rupture de deux barrages dans un canal. Il s'agit de vérifier que le schéma fournit bien en temps long la bonne solution d'équilibre et se comporte sans problème en présence d'un fond discontinu. Le domaine de calcul est constitué d'un canal avec une bosse constituée par un créneau sur le fond donné par l'équation,

$$Z(x) = \begin{cases} 0. & \text{si} \quad 0. \leq x < 1., \\ 1. & \text{si} \quad 1. \leq x < 2., \\ 0. & \text{si} \quad 2. \leq x < 3.. \end{cases}$$

La longueur du canal est de 3m et on utilise 100 mailles. La condition initiale, représente sur la figure (3.7), est donnée par,

$$u \equiv 0 \quad \text{et} \quad h(x) = \begin{cases} 3. & \text{si} \quad 0 \leq x < 1., \\ 1. & \text{si} \quad 1. \leq x < 2., \\ 1. & \text{si} \quad 2. \leq x < 3., \end{cases}$$

et les conditions limites sont de type réflexion.
On constate sur les figures (3.8, 3.9) le bon comportement du schéma qui supporte sans problème les fortes discontinuités et converge asymptotiquement en temps vers la bonne solution stationnaire. Ceci permet de mettre en évidence la robustesse du schéma.

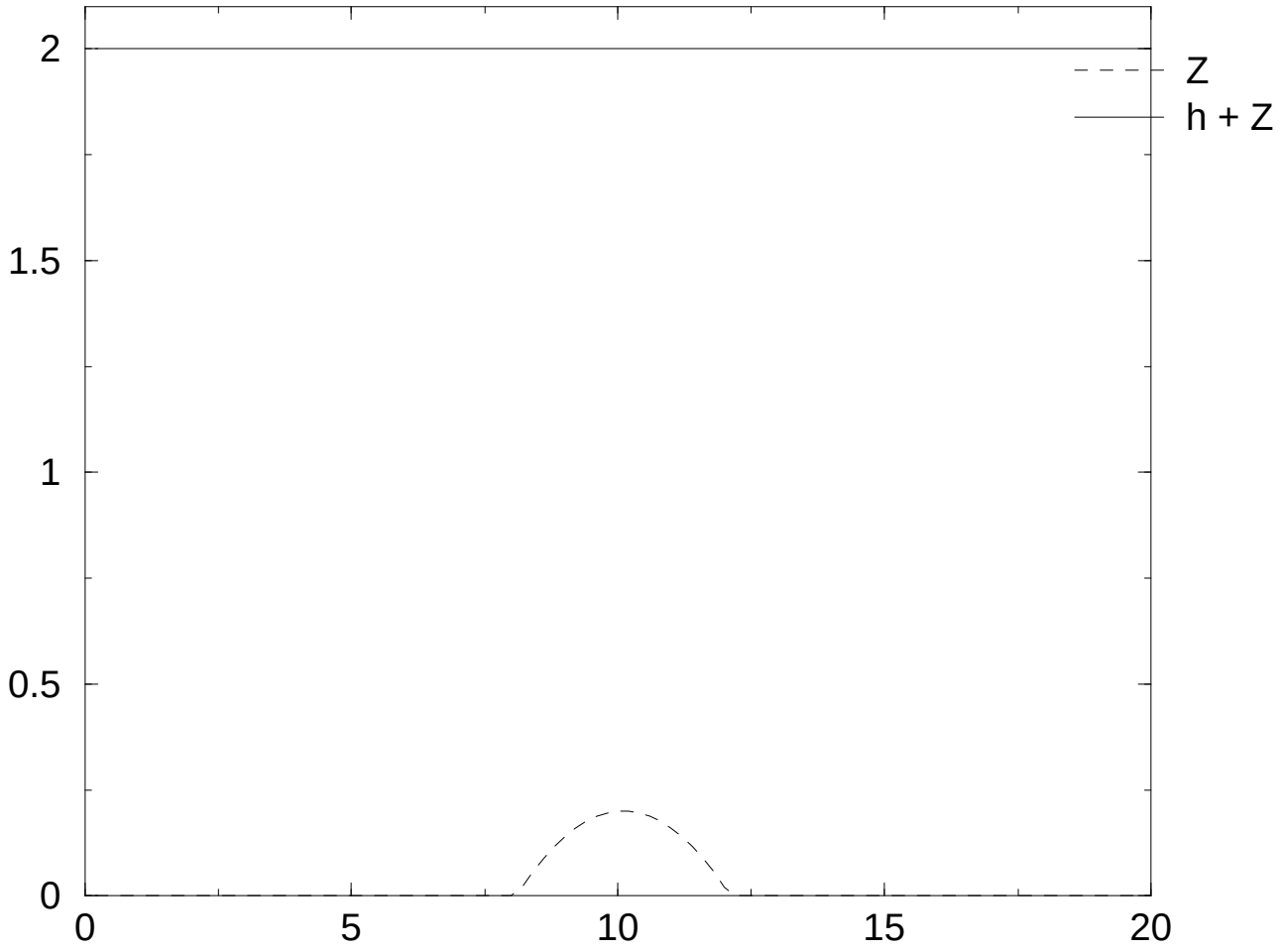


FIG. 3.6 – *Still Water : t=50s*

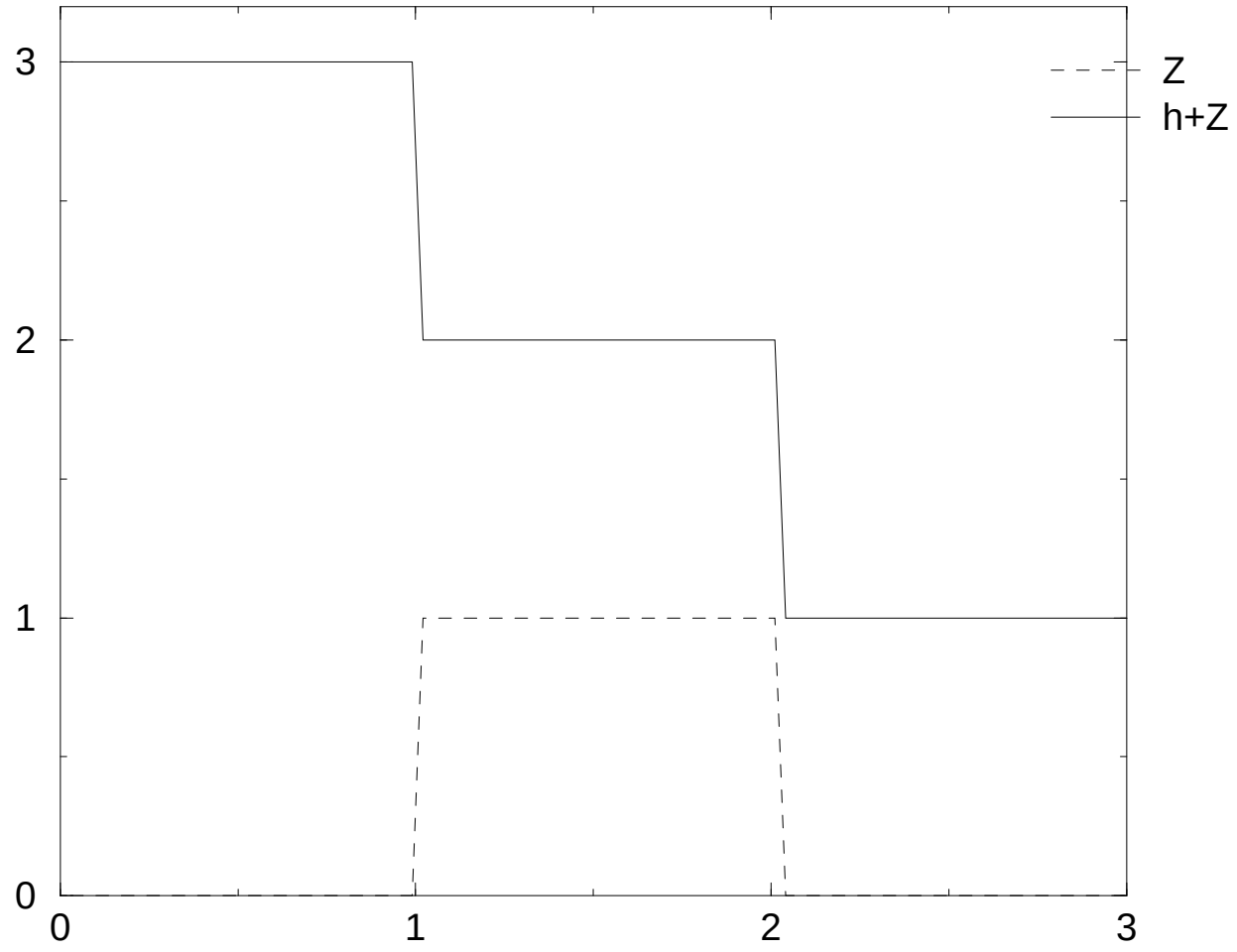


FIG. 3.7 – *Font discontinu : condition initiale*

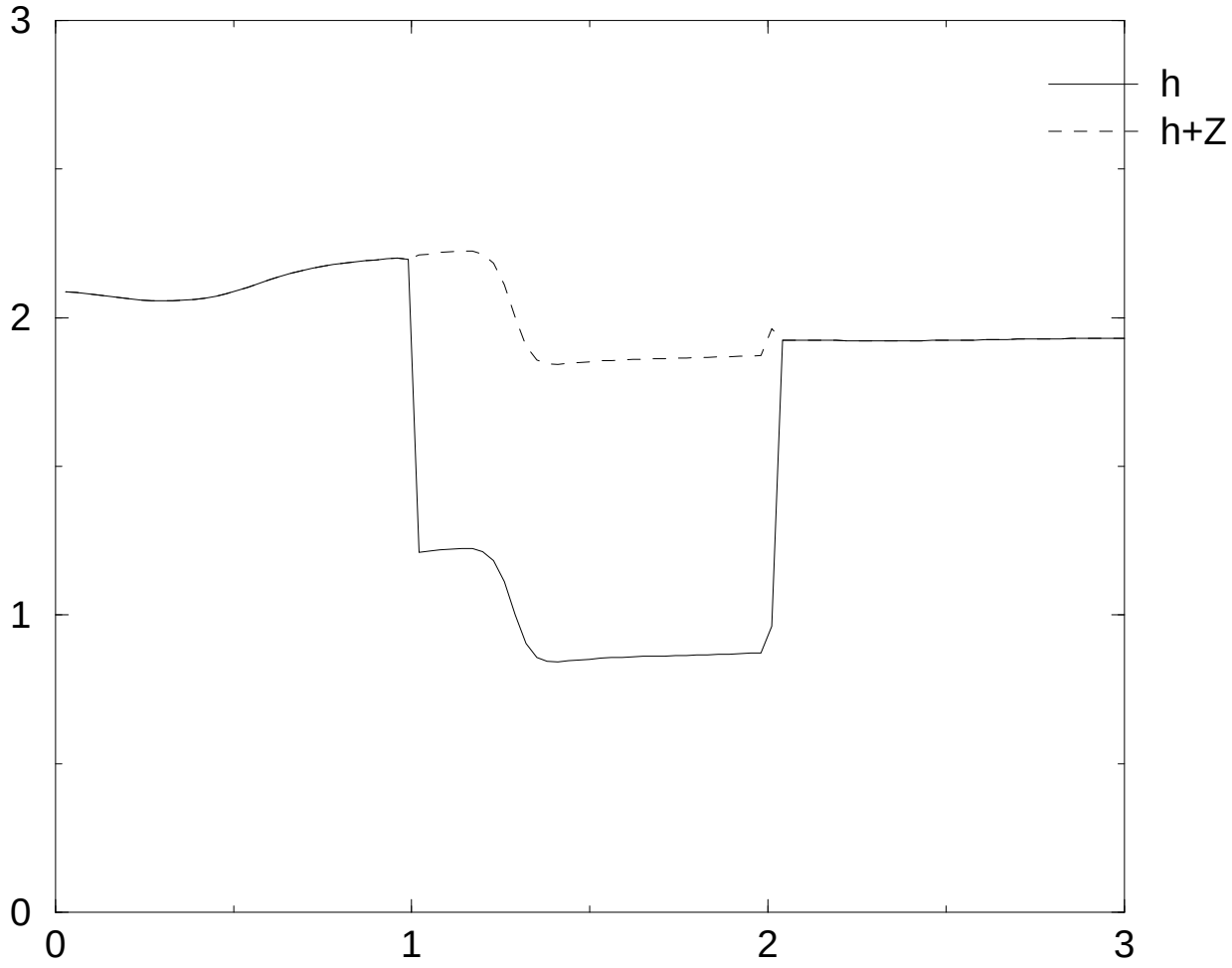


FIG. 3.8 – *Font discontinu; $t = 5s$*

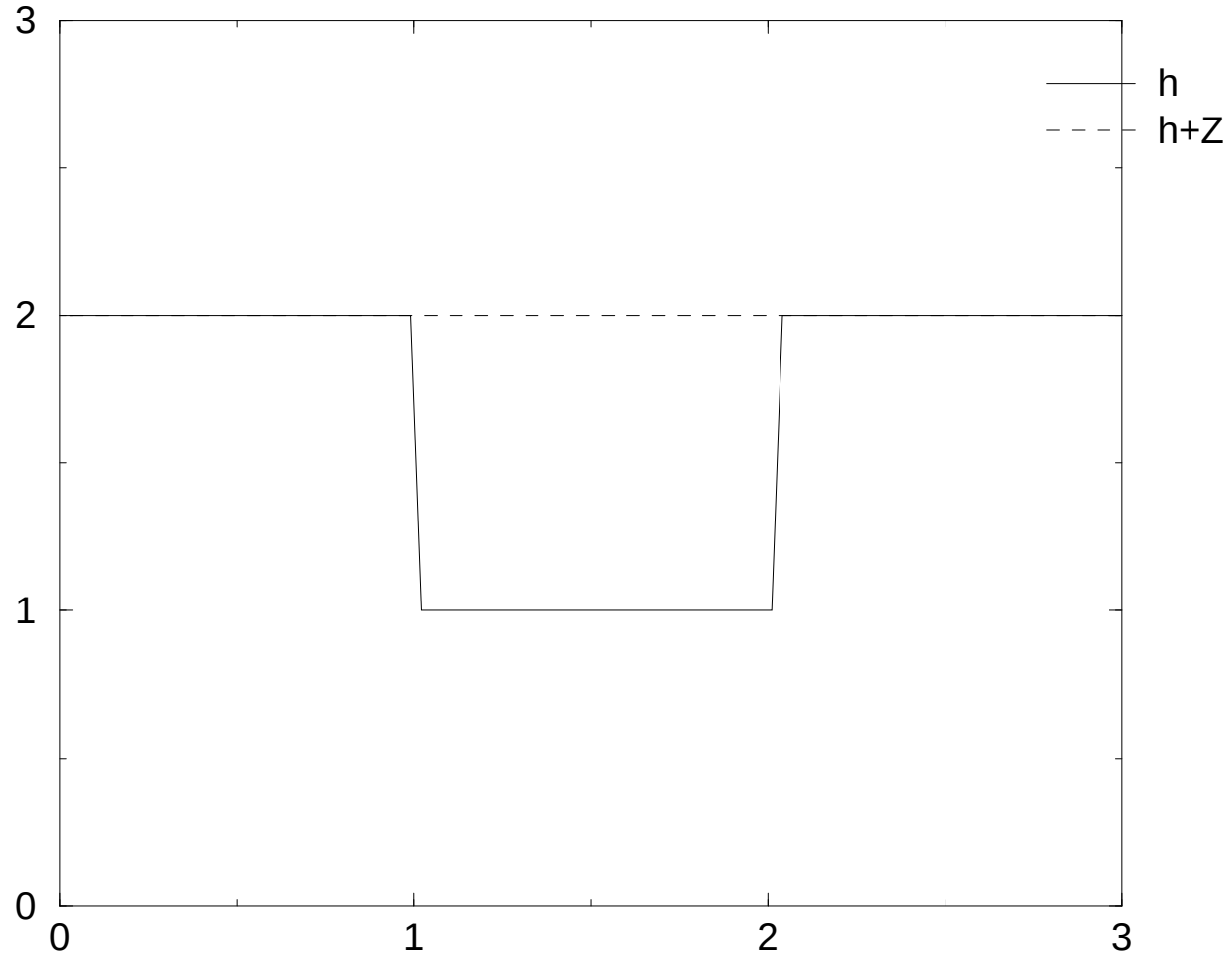


FIG. 3.9 – *Font discontinu; t = 100s*

Chapitre 4

Solveurs simples entropiques pour des systèmes hyperboliques non-conservatifs : application à la Magnétohydrodynamique

4.1 Introduction

On aborde dans cette partie la résolution numérique des systèmes hyperboliques non-linéaires et non-conservatifs. A l'origine cette étude fut menée dans le but de simuler des phénomènes régis par les équations de la Magnétohydrodynamique (MHD) en plusieurs dimensions d'espace à l'aide du système de Powell. En effet, ce système comporte au second membre un produit non-conservatif dont la justification mathématique est donnée dans [GAL7]. Nous n'aborderons pas ici les aspects théoriques induits par les problèmes d'interprétation de produits non-conservatifs. On renvoie pour cela aux travaux de [DLM], [LEFLOCH], [HOU], [C-L-N-P], [LEFLOCH-TP]. On s'intéresse ici uniquement à la résolution numérique de tels systèmes. Sur ce point, on citera les travaux de [BER], [BE-CO], [CMP], [RAV-SS], [TOUMI].
On propose ici un cadre général dans lequel on définit les solveurs de Riemann pour de tels systèmes. En particulier, on prolonge la notion de solveurs de Riemann simples développée dans [GAL4] pour les systèmes homogènes et dans [GAL5] pour les systèmes avec terme source, et on en fournit une caractérisation élémentaire. D'autre part, on montre qu'il est possible d'établir une correspondance biunivoque ente solveurs simples eulériens et solveurs simples lagrangiens pour les systèmes physiques. Cette équivalence permet de se concentrer essentiellement sur la formulation lagrangienne qui est toujours algébriquement plus simple. Par exemple, on construit pour le système de Powell deux solveurs simples entropiques lagrangiens induisant des solveurs eulériens du même type.

4.2 Schémas de type Godunov

4.2.1 Systèmes de lois de conservation généraux

Nous nous intéressons ici à la résolution numérique des systèmes hyperboliques abstraits du type suivant,

$$\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{P}(\mathbf{U})\partial_x \mathbf{B}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}, \tag{4.1}$$

ou encore de la forme,

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \mathbf{P}(\mathbf{U})\partial_x \mathbf{B}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}, \tag{4.2}$$

avec $\mathbf{U}$, $\mathbf{F}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^N$ et $\mathbf{P}$ une matrice $N \times N$.
Ces systèmes ont la particularité d'être non-conservatifs. On renvoie aux travaux de [DLM], [HOU], [LEFLOCH], [C-L-N-P], [LEFLOCH-TP] pour l'aspect théorique concernant de tels systèmes et de [BER], [BE-CO], [CMP], [RAV-SS] pour l'aspect numérique. On ne soucie pas ici du sens donné au produit non-conservatif $\mathbf{P}\partial_x\mathbf{B}$. Ce point a ét abordé dans [GAL7]. Dans [GAL4] a été introduite la notion de solveurs de Riemann simples pour les systèmes conservatifs et dans [GAL5] pour les systèmes hyperboliques avec terme source. Nous nous proposons ici de généraliser cette notion au cas des systèmes (4.1) et (4.2).
On supposera en outre que ces systèmes possèdent un couple entropie-flux (η, q), ce qui signifie qu'il existe une fonction strictement convexe $\eta(\mathbf{U})$ et un flux d'entropie $q(\mathbf{U})$ vérifiant la relation $\nabla q = \nabla\eta\mathbf{P}\nabla\mathbf{B}$ pour (4.1) ou $\nabla q = \nabla\eta\nabla\mathbf{F} + \nabla\eta\mathbf{P}\nabla\mathbf{B}$ pour (4.2). On dira alors qu'une solution $\mathbf{U}$ est entropique si elle vérifie au sens des distributions l'inégalité d'entropie suivante :

$$\partial_t \eta + \partial_x q \leq 0. \tag{4.3}$$

Nous commençons ci-dessous par rappeler les résultats de [GAL4] pour le cas conservatif.

4.2.2 Rappels sur les solveurs simples pour le cas conservatif

On introduit tout d'abord une notation, valable dans la suite de ce document. Pour tout couple (X_g, X_g), on notera $\Delta X = X_d - X_g$.
Considérons maintenant le système hyperbolique conservatif suivant :

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}. \tag{4.4}$$

Afin de résoudre numériquement (4.4), on introduit usuellement la notion de schéma de type Godunov. Soit $\mathbf{W}(x/t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)$ une approximation du problème de Riemann suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{U} + \partial_{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{U}(x,0) = \left\{ \begin{array}{lll} \mathbf{U}_g & \text{si} & x \leq 0, \\ \mathbf{U}_d & \text{si} & x > 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Définition 7.
On dit que $\mathbf{W}(x/t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)$ est consistant avec la forme intégrale de la loi de conservation (4.4) si et seulement si l'égalité suivante est vérifiée pour τ suffisamment petit :

$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \mathbf{W}(x/\tau; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)dx = \frac{\Delta x}{2}(\mathbf{U}_g + \mathbf{U}_d) - \tau\Delta\mathbf{F}. \tag{4.5}$$

On dit que $\mathbf{W}(x/t;\mathbf{U}_g,\mathbf{U}_d)$ *est consistant avec la forme intégrale de l'inégalité d'entropie (4.3) si et seulement si l'inégalité suivante est vérifiée pour* τ *suffisamment petit :*

$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2}\eta(\mathbf{W}(x/\tau;\mathbf{U}_g,\mathbf{U}_d))dx \leq \frac{\Delta x}{2}(\eta(\mathbf{U}_g)+\eta(\mathbf{U}_d)) - \tau\Delta q. \tag{4.6}$$

◇

Etant donné un pas d'espace Δx, on considère une approximation $(\mathbf{U}_i^n)_{i,n}$ de (4.4) constante à chaque instant t^n dans chaque intervalle $](i-1/2)\Delta x,(i+1/2)\Delta x]$. A l'aide du solveur de Riemann $\mathbf{W}$, on peut alors construire la solution ï¿½ l'instant t^{n+1} en utilisant la relation suivante :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x}\left(\int_0^{\Delta x/2}\mathbf{W}(x/\Delta t;\mathbf{U}_{i-1}^n,\mathbf{U}_i^n)dx + \int_{-\Delta x/2}^{0}\mathbf{W}(x/\Delta t;\mathbf{U}_i^n,\mathbf{U}_{i+1}^n)dx\right), \tag{4.7}$$

et on sait [HLL] que si $\mathbf{W}$ est consistant avec la forme intégrale de la loi de conservation (4.4), alors le schéma (4.7) est conservatif, i.e., il existe un flux numérique $\mathbf{H}$ tel que

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\mathbf{H}_{i+1/2}-\mathbf{H}_{i-1/2}).$$

De même, si $\mathbf{W}$ est consistant avec l'inégalité d'entropie, alors il existe un flux d'entropie numérique Q tel que

$$\eta_i^{n+1} \leq \eta_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(Q_{i+1/2}-Q_{i-1/2}).$$

Ceci nous conduit à la définition suivante :

Définition 8.
Si le solveur de Riemann $\mathbf{W}$ *est consistant avec la forme intégrale de la loi de conservation, alors le schéma (4.7) est appelé schéma de type Godunov. On dira alors que* $\mathbf{W}$ *est un solveur de type Godunov.*
Si le solveur de Riemann $\mathbf{W}$ *est consistant avec l'inégalité d'entropie, alors le schéma (4.7) est appelé schéma de type Godunov entropique. On dira alors que* $\mathbf{W}$ *est un solveur de type Godunov entropique.*

◇

Dans [GAL4] est introduite la notion suivante de solveur de Riemann simple.

Définition 9.
On dira que le solveur de Riemann $\mathbf{W}$ *est simple si et seulement si* $\mathbf{W}(x/t)$ *a la structure de la solution d'un problème de Riemann linéaire; i.e.* $\mathbf{W}(x/t)$ *est constitué de (m+1) tats constants* $(\mathbf{W}_k)_{k=1,m+1}$*, séparés par des discontinuités, avec* $\mathbf{U}_1=\mathbf{U}_g$ *et* $\mathbf{U}_{m+1}=\mathbf{U}_d$*.*
Il existe donc des réels $(\lambda_k)_{k=1,m}$ *tels que :*

- $\mathbf{W}(x/t)=\mathbf{U}_g$ *si* $x/t<\lambda_1$,
- $\mathbf{W}(x/t)=\mathbf{U}_k$ *pour* $\lambda_{k-1}\leq x/t<\lambda_k$ *pour* $k=2,m$,
- $\mathbf{W}(x/t)=\mathbf{U}_d$ *si* $\lambda_m\leq x/t$.

Le solveur de Riemann simple est donc caractérisé par l'application :

$$(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) \longrightarrow (\mathcal{W}, \lambda) = ((\mathbf{U}_k)_{k=1,m+1}, (\lambda_k)_{k=1,m})$$

On le notera alors simplement $(\mathcal{W}, \lambda)$.

◇

Remarque 4.
On remarquera que m n'est pas nécessairement l'ordre du systéme.
Remarque 5.
Les schémas de Roe [ROE], HLL [HLL] et HLLC [TORO] fournissent des exemples connus de solveurs simples.

◇

Le principal intérêt de cette notion est qu'il est extrêmenent facile de caractériser un solveur simple. En effet, notons pour toute suite $(X_k)_k$, $\delta X_k = X_{k+1} - X_k$. On a le résultat suivant :
Proposition 35. *[GAL4]*
Un solveur de Riemann simple est de type Godunov si et seulement si :

$$\Delta \mathbf{F} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \delta \mathbf{U}_k. \tag{4.8}$$

Un solveur de Riemann simple est de type Godunov entropique si et seulement si :

$$\Delta q \leq \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \delta \eta_k.$$

◇

Nous renvoyons à [LEV2] qui a aussi mis en évidence l'égalité (4.8).

4.2.3 Solveurs simples pour les systèmes non-conservatifs

Nous étendons maintenant de façon formelle la notion de solveur de Riemann simple aux systèmes non-conservatifs de la forme (4.1).
Définition 10.
On dira que $\mathbf{W}$ *est de type Godunov pour le système (4.1) s'il est consistant, i.e. si et seulement si il existe une matrice* $\overline{\mathbf{P}}$ *telle que* $\overline{\mathbf{P}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \mathbf{P}(\mathbf{U})$ *et vérifiant la relation*

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \delta \mathbf{U}_k = \overline{\mathbf{P}} \Delta \mathbf{B}. \tag{4.9}$$

On dira qu'un solveur de Riemann simple est de type Godunov entropique si et seulement si :

$$\Delta q \leq \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \delta \eta_k. \tag{4.10}$$

◇

Il est facile de caractériser le schéma induit par cette définition. En effet, tout d'abord on introduit les notations suivantes :

$$\overline{\mathbf{P}}^{+}\Delta\mathbf{B} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^{+}\delta\mathbf{U}_k \quad , \quad \overline{\mathbf{P}}^{-}\Delta\mathbf{B} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^{-}\delta\mathbf{U}_k,$$

où $\lambda^{+} = max(\lambda, 0)$ et $\lambda^{-} = min(\lambda, 0)$. Le schéma (4.7) s'écrit alors :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\left(\overline{\mathbf{P}}^{+}\Delta\mathbf{B}\right)_{i-1/2} + \left(\overline{\mathbf{P}}^{-}\Delta\mathbf{B}\right)_{i+1/2}\right).$$

Afin de mettre en évidence la partie dissipative du schéma, on introduit la notation suivante :

$$\overline{\mathbf{Q}\Delta\mathbf{U}} = \sum_{k=1}^{m} |\lambda_k|\delta\mathbf{U}_k.$$

Le schma précédent devient alors :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(\left(\overline{\mathbf{P}}\Delta\mathbf{B}\right)_{i-1/2}^{n} + \left(\overline{\mathbf{P}}\Delta\mathbf{B}\right)_{i+1/2}^{n} + \overline{\mathbf{Q}\Delta\mathbf{U}}_{i-1/2} - \overline{\mathbf{Q}\Delta\mathbf{U}}_{i+1/2}\right), \tag{4.11}$$

Ceci nous conduit à la définition suivante :

Définition 11.
Le schéma (4.11) associé au solveur de type Godunov $\mathbf{W}$ *sera appelé schéma de type Godunov pour (4.1).*

◇

On sait d'autre part que la forme non-conservative du système (4.1) n'est pas unique. En particulier, en posant $\mathbf{D} = \mathbf{P}\partial_{\mathbf{U}}\mathbf{B}$, on peut considérer la forme suivante :

$$\partial_t\mathbf{U} + \mathbf{D}\partial_x\mathbf{U} = \mathbf{0}. \tag{4.12}$$

En fait, si $\mathbf{W}$ est de type Godunov pour le système (4.1), il est aussi de type Godunov pour le système (4.12). En effet, il suffit de prendre :

$$\overline{\mathbf{D}}(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) = \overline{\mathbf{P}}(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)\int_0^1 \partial_{\mathbf{U}}\mathbf{B}(\mathbf{U}_g + \alpha\Delta\mathbf{U})d\alpha.$$

Dans le cas du système (4.2), il peut être souhaitable de discrétiser le terme $\partial_x\mathbf{F}$ de façon conservative. Ceci nous conduit naturellement à donner la définition suivante.

Définition 12.
On dira que $\mathbf{W}$ *est de type Godunov pour le système (4.2) s'il est consistant, i.e. si et seulement si il existe une matrice* $\overline{\mathbf{P}}$ *telle que* $\overline{\mathbf{P}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \mathbf{P}(\mathbf{U})$ *et vérifiant la relation*

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k\delta\mathbf{U}_k = \Delta\mathbf{F} + \overline{\mathbf{P}}\Delta\mathbf{B}. \tag{4.13}$$

$\diamond$

Il est intéressant dans ce cas de réécrire le schéma (4.11). Il devient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_i^{n+1} &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left((\Delta\mathbf{F}+\overline{\mathbf{P}}\Delta\mathbf{B})_{i-1/2} + (\Delta\mathbf{F}+\overline{\mathbf{P}}\Delta\mathbf{B})_{i+1/2} + \overline{\mathbf{Q}\Delta\mathbf{U}}_{i-1/2} - \overline{\mathbf{Q}\Delta\mathbf{U}}_{i+1/2}\right), \\
&= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(\mathbf{F}_{i+1} - \mathbf{F}_{i-1} + \overline{\mathbf{Q}\Delta\mathbf{U}}_{i-1/2} - \overline{\mathbf{Q}\Delta\mathbf{U}}_{i+1/2}\right) \\
&- \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left((\overline{\mathbf{P}}\Delta\mathbf{B})_{i-1/2} + (\overline{\mathbf{P}}\Delta\mathbf{B})_{i+1/2}\right), \\
&= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\mathbf{H}_{i+1/2} - \mathbf{H}_{i-1/2}\right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left((\overline{\mathbf{P}}\Delta\mathbf{B})_{i-1/2} + (\overline{\mathbf{P}}\Delta\mathbf{B})_{i+1/2}\right),
\end{aligned}$$

où $\mathbf{H}_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1} - \overline{\mathbf{Q}\Delta\mathbf{U}}_{i+1/2}\right)$.
Cette forme met en évidence d'une part une partie conservative avec un flux $\mathbf{H}_{i+1/2}$ dont le terme de dissipation numérique dépend du terme source et pas seulement de $\mathbf{F}$, et d'autre part un traitement centré du terme source.

4.2.4 Un exemple simple : HLL non-conservatif

L'exemple le plus simple de solveur simple pour un système non-conservatif est bien sûr fourni par un solveur à un seul état intermédiaire. Ce solveur est l'extension naturelle du schéma [HLL] au cadre non-conservatif. Il est donné par :

$$\mathbf{W}(x/t) = \begin{cases} \mathbf{U}_g & \text{si } x/t < \lambda_-, \\ \mathbf{U}_* & \text{si } \lambda_- < x/t \leq \lambda_+, \\ \mathbf{U}_d & \text{si } \lambda_+ \leq x/t. \end{cases}$$

avec $\mathbf{U}_*$ donné par la relation de consistance, soit $\mathbf{U}_* = \dfrac{\lambda_+\mathbf{U}_d - \lambda_-\mathbf{U}_g}{\lambda_+ - \lambda_-} - \dfrac{\Delta\mathbf{F} + \overline{\mathbf{P}}\Delta\mathbf{B}}{\lambda_+ - \lambda_-}$.
On notera que dans le cas où le système possède un couple entropie-flux, ce solveur n'est pas nécessairement entropique, contrairement au cas conservatif.

4.2.5 Solveurs de type Roe

On montre dans ce paragraphe comment étendre la notion de matrice de Roe au cas non-conservatif. Cette idée a été introduite dans [TOUMI]. Pour cela, on considère la forme (4.12). Comme pour le cas conservatif, l'idée est de remplacer à chaque interface la résolution d'un problème de Riemann exact non-linéaire par un problème de Riemann linéaire plus simple à résoudre, soit :

$$\begin{cases} \partial_t\mathbf{U} + \overline{\mathbf{D}}(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)\partial_x\mathbf{U} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{U}(x,0) = \begin{cases} \mathbf{U}_g & \text{si} \quad x \leq 0, \\ \mathbf{U}_d & \text{si} \quad x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

On propose alors la définition de matrice de type Roe pour un système non-conservatif.

Définition 13.
On dira que la matrice $\overline{\mathbf{D}}(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)$ est de type Roe pour le système (4.12) si les conditions suivantes sont réalisées :

- $\overline{\mathbf{D}}(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) \to \mathbf{D}(\mathbf{U})$ *si* $(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) \to (\mathbf{U}, \mathbf{U})$,

– $\overline{\mathbf{D}}(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)$ *possède des valeurs propres réelles et est diagonalisable.*

On dira alors que le solveur de Riemann associé $\mathbf{W}$ *est de type Roe pour le système (4.12).*

◇

On vérifie alors que si $\mathbf{W}$ est de type Roe, le schéma (4.11) s'écrit :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(\overline{\mathbf{D}}_{i+1/2}\Delta\mathbf{U}_{i+1/2} + \overline{\mathbf{D}}_{i-1/2}\Delta\mathbf{U}_{i-1/2} - |\overline{\mathbf{D}}_{i+1/2}|\Delta\mathbf{U}_{i+1/2} + |\overline{\mathbf{D}}_{i-1/2}|\Delta\mathbf{U}_{i-1/2}\right)$$

Cette écriture met en vidence le rôle de la valeur absolue de $|\overline{\mathbf{D}}|$ en tant que matrice de dissipation.

4.2.6 Le modèle d'Euler quasi-neutre

Le modèle d'Euler quasi-neutre a été introduit dans [COR1]. Il modélise un plasma composé d'ions et d'électrons pour lequel la longueur de Debye est petite devant les dimensions caractéristiques du problème. On suppose aussi le plasma suffisamment collisionnel pour qu'il puisse être considéré comme un fluide continu, et enfin que les rapports des chaleurs spécifiques γ_i et γ_e sont identiques, i.e. $\gamma_i = \gamma_e = \gamma = 5/3$. Il est donné par les équations,

$$\partial_t \begin{pmatrix} n \\ nu \\ nE \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} nu \\ nu^2 + n(T_e + T_i) \\ u(nE + n(T_e + T_i)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

et aussi,

$$\partial_t s_e + u\partial_x s_e = 0, \tag{4.15}$$

où s_e désigne l'entropie spécifique électronique donnée par $s_e = T_e/n^{\gamma-1}$.
On note que l'équation (4.15) possède une forme conservative, soit,

$$\partial_t(ns_e) + \partial_x(ns_e u) = 0, \tag{4.16}$$

et dans ce cas le système (4.14, 4.16) est globalement conservatif. Il est alors possible d'utiliser un schéma conservatif, par exemple un schéma de Roe [CO-MA, B-G].
Dans [COR1], cependant, c'est la forme (4.14, 4.15) qui a été retenue afin de numériser le modèle d'Euler quasi-neutre. En effet, on note que le système (4.14) est un système d'Euler standard pour lequel on utilise un schéma de Roe qui s'écrit :

$$\mathbf{V}_i^{n+1} = \mathbf{V}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\overline{\mathbf{A}}^+_{i-1/2}\Delta\mathbf{V}_{i-1/2} + \overline{\mathbf{A}}^-_{i+1/2}\Delta\mathbf{V}_{i+1/2}\right), \tag{4.17}$$

où $\overline{\mathbf{A}}$ est la matrice de Roe associée au système (4.14) à chaque interface $x_{i+1/2}$ et où $\mathbf{V}$ désigne le vecteur ${}^t(n, nu, nE)$.

Il est connu que cette matrice a pour valeurs propres $\overline{u} - \overline{a}$, $\overline{u}$, $\overline{u} + \overline{a}$, où $\overline{u} = \dfrac{n_g^{1/2}u_g + n_d^{1/2}u_d}{n_g^{1/2} + n_d^{1/2}}$

et $\overline{a}$ est la vitesse du son moyenne (voir [ROE]). Le schéma utilisé dans [COR1] pour discrétiser (4.15) est donné par :

$$(s_e)_i^{n+1} = (s_e)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\overline{u}^+_{i-1/2}(\Delta s_e)_{i-1/2} + \overline{u}^-_{i+1/2}(\Delta s_e)_{i+1/2}\right). \tag{4.18}$$

Posons maintenant :

$$\mathbf{V}_g^* = \mathbf{V}_g + \Phi_- \mathbf{R}_- \quad , \quad \mathbf{V}_d^* = \mathbf{V}_d - \Phi_+ \mathbf{R}_+,$$

où $\mathbf{R}_\pm$ (resp. $\Phi_\pm$) sont les vecteurs propres (resp. variables caractéristiques) associés à la matrice de Roe $\overline{\mathbf{A}}$ [ROE].

Notons maintenant $\mathbf{U} = {}^t(\mathbf{V}, s_e)$. On vérifie alors que le schéma (4.17, 4.18) est un solveur de type Godunov qui dérive du solveur de Riemann simple suivant :

$$\mathbf{W}(x/t) = \begin{cases} \mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_g & \text{si } x/t < \overline{u} - \overline{a}, \\ \mathbf{U}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_g^* \\ (s_e)_g \end{pmatrix} & \text{si } \overline{u} - \overline{a} \le x/t < \overline{u}, \\ \mathbf{U}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_d^* \\ (s_e)_d \end{pmatrix} & \text{si } \overline{u} \le x/t < \overline{u} + \overline{a}, \\ \mathbf{U}_4 = \mathbf{U}_d & \text{si } \overline{u} + \overline{a} \le x/t. \end{cases} \tag{4.19}$$

Ce solveur est en outre de type Roe avec $\overline{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{A}} & 0 \\ 0 & \overline{u} \end{pmatrix}$.

4.2.7 Le système de Powell

Dans [POWELL], Powell a proposé une modification du système de la MHD vérifiant certaines propriétés agréables dont l'invariance galiléenne. Dans sa version 1D, il prend la forme suivante :

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F} = \mathbf{P}\partial_x B_x,$$

$$\text{où} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_x \\ \rho u_y \\ \rho u_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \\ \rho\tilde{E} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x^2 + \tilde{p} - B_x^2 \\ \rho u_x u_y - B_x B_y \\ \rho u_x u_z - B_x B_z \\ 0 \\ B_y u_x - B_x u_y \\ B_z u_x - B_x u_z \\ u_x(\rho\tilde{E} + \tilde{p}) - B_x \mathbf{B}\cdot\mathbf{u} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{P} = -\begin{pmatrix} 0 \\ B_x \\ B_y \\ B_z \\ u_x \\ u_y \\ u_z \\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{u} \end{pmatrix}, \tag{4.20}$$

avec $\mathbf{u} = {}^t(u_x, u_y, u_z)$ le vecteur vitesse et $\mathbf{B} = {}^t(B_x, B_y, B_z)$ le champ magnétique.
L'énergie totale est désignée par $\tilde{E} = \tilde{\varepsilon} + \mathbf{u}^2/2$, avec $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon + \dfrac{\mathbf{B}^2}{2\rho}$ et ε l'énergie interne spécifique. De même la pression totale est $\tilde{p} = p + \mathbf{B}^2/2$, et dans la suite $\tilde{H}$ désignera l'enthalpie totale donnée par $\tilde{H} = \tilde{\varepsilon} + \dfrac{p}{\rho} + \mathbf{u}^2/2$.

La jacobienne $\partial_{\mathbf{U}}\mathbf{F}$ est donnée par :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u_x^2 + dp_1^* & 2u_x + dp_2^* & dp_3^* & dp_4^* & -2B_x + dp_5^* & dp_6^* & dp_7^* & dp_8^* \\ -u_x u_y & u_y & u_x & 0 & -B_y & -B_x & 0 & 0 \\ -u_x u_z & u_z & 0 & u_x & -B_z & 0 & -B_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{B_y}{\rho}u_x + \dfrac{B_x}{\rho}u_y & \dfrac{B_y}{\rho} & -\dfrac{B_x}{\rho} & 0 & -u_y & u_x & 0 & 0 \\ -\dfrac{B_z}{\rho}u_x + \dfrac{B_x}{\rho}u_z & \dfrac{B_z}{\rho} & 0 & -\dfrac{B_x}{\rho} & -u_z & 0 & u_x & 0 \\ dH_1 & dH_2 & dH_3 & dH_4 & dH_5 & dH_6 & dH_7 & dH_8 \end{pmatrix}$$

avec les notations suivantes :

$$dp_1^* = \frac{\gamma-1}{2}\mathbf{u}^2 \quad , \quad dp_2^* = (1-\gamma)u_x \quad , \quad dp_3^* = (1-\gamma)u_y \quad , \quad dp_4^* = (1-\gamma)u_z,$$
$$dp_5^* = (2-\gamma)B_x \quad , \quad dp_6^* = (2-\gamma)B_y \quad , \quad dp_7^* = (2-\gamma)B_z \quad , \quad dp_8^* = \gamma - 1,$$

et aussi :

$$dH_1 = -u_x\tilde{H} + u_x dp_1^* + \frac{B_x}{\rho}\mathbf{u}\cdot\mathbf{B},$$
$$dH_2 = \tilde{H} + u_x dp_2^* - \frac{B_x^2}{\rho} \quad , \quad dH_3 = u_x dp_3^* - \frac{B_x}{\rho}B_y \quad , \quad dH_4 = u_x dp_4^* - \frac{B_x}{\rho}B_z,$$
$$dH_5 = u_x dp_5^* - \mathbf{u}\cdot\mathbf{B} - B_x u_x \quad , \quad dH_6 = u_x dp_6^* - B_x u_y \quad , \quad dH_7 = u_x dp_7^* - B_x u_z,$$
$$dH_8 = u_x + u_x dp_8^*.$$

Sous forme non-conservative, le système de Powell (4.20) prend la forme ci-dessous :

$$\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{A}_p \partial_x \mathbf{U} = \mathbf{0}, \tag{4.21}$$

avec $\mathbf{A}_p = \mathbf{A} - \mathcal{P}$ et où $\mathcal{P} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{P}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$. Cette matrice est donnée par :

$$\mathbf{A}_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u_x^2 + dp_1^* & 2u_x + dp_2^* & dp_3^* & dp_4^* & -B_x + dp_5^* & dp_6^* & dp_7^* & dp_8^* \\ -u_x u_y & u_y & u_x & 0 & 0 & -B_x & 0 & 0 \\ -u_x u_z & u_z & 0 & u_x & 0 & 0 & -B_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_x & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{B_y}{\rho}u_x + \dfrac{B_x}{\rho}u_y & \dfrac{B_y}{\rho} & -\dfrac{B_x}{\rho} & 0 & 0 & u_x & 0 & 0 \\ -\dfrac{B_z}{\rho}u_x + \dfrac{B_x}{\rho}u_z & \dfrac{B_z}{\rho} & 0 & -\dfrac{B_x}{\rho} & 0 & 0 & u_x & 0 \\ dH_1 & dH_2 & dH_3 & dH_4 & dH_5 + \mathbf{u}\cdot\mathbf{B} & dH_6 & dH_7 & dH_8 \end{pmatrix}.$$

Dans [GAL0], on a vu qu'il était possible de construire un équivalent discret de la matrice $\mathbf{A}_p$, donné par :

$$\overline{\mathbf{A}}_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\overline{u}_x^2 + \overline{dp}_1^* & 2\overline{u}_x + \overline{dp}_2^* & \overline{dp}_3^* & \overline{dp}_4^* & -\underline{B}_x + \overline{dp}_5^* & \overline{dp}_6^* & \overline{dp}_7^* & \overline{dp}_8^* \\ -\overline{u}_x\overline{u}_y & \overline{u}_y & \overline{u}_x & 0 & 0 & -\underline{B}_x & 0 & 0 \\ -\overline{u}_x\overline{u}_z & \overline{u}_z & 0 & \overline{u}_x & 0 & 0 & -\underline{B}_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{u}_x & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\underline{B}_y}{\underline{\rho}}\overline{u}_x + \dfrac{\underline{B}_x}{\underline{\rho}}\overline{u}_y & \dfrac{\underline{B}_y}{\underline{\rho}} & -\dfrac{\underline{B}_x}{\underline{\rho}} & 0 & 0 & \overline{u}_x & 0 & 0 \\ -\dfrac{\underline{B}_z}{\underline{\rho}}\overline{u}_x + \dfrac{\underline{B}_x}{\underline{\rho}}\overline{u}_z & \dfrac{\underline{B}_z}{\underline{\rho}} & 0 & -\dfrac{\underline{B}_x}{\underline{\rho}} & 0 & 0 & \overline{u}_x & 0 \\ \overline{dH}_1 & \overline{dH}_2 & \overline{dH}_3 & \overline{dH}_4 & \overline{dH}_5 + \overline{\mathbf{u}\cdot\mathbf{B}} & \overline{dH}_6 & \overline{dH}_7 & \overline{dH}_8 \end{pmatrix}, \tag{4.22}$$

où, en posant $X = \dfrac{(\Delta\mathbf{B})^2}{2(\rho_g^{1/2} + \rho_d^{1/2})^2}$,

$$\overline{dp}_1^* = (2-\gamma)X + \frac{\gamma-1}{2}\overline{\mathbf{u}}^2 \quad , \quad \overline{dp}_2^* = (1-\gamma)\overline{u}_x \quad , \quad \overline{dp}_3^* = (1-\gamma)\overline{u}_y \quad , \quad \overline{dp}_4^* = (1-\gamma)\overline{u}_z,$$
$$\overline{dp}_5^* = (2-\gamma)\underline{B}_x \quad , \quad \overline{dp}_6^* = (2-\gamma)\underline{B}_y \quad , \quad \overline{dp}_7^* = (2-\gamma)\underline{B}_z \quad , \quad \overline{dp}_8^* = \gamma - 1,$$

et aussi :

$$\overline{dH}_1 = -\overline{u}_x\overline{\tilde{H}} + \overline{u}_x\overline{dp}_1^* + \frac{\underline{B}_x}{\underline{\rho}}\overline{\mathbf{u}}\cdot\underline{\mathbf{B}},$$
$$\overline{dH}_2 = \overline{\tilde{H}} + \overline{u}_x\overline{dp}_2^* - \frac{\underline{B}_x^2}{\underline{\rho}} \quad , \quad \overline{dH}_3 = \overline{u}_x\overline{dp}_3^* - \frac{\underline{B}_x}{\underline{\rho}}\underline{B}_y \quad , \quad \overline{dH}_4 = \overline{u}_x\overline{dp}_4^* - \frac{\underline{B}_x}{\underline{\rho}}\underline{B}_z,$$
$$\overline{dH}_5 = \overline{u}_x\overline{dp}_5^* - \overline{\mathbf{u}\cdot\mathbf{B}} - \underline{B}_x\overline{u}_x \quad , \quad \overline{dH}_6 = \overline{u}_x\overline{dp}_6^* - \underline{B}_x\overline{u}_y \quad , \quad \overline{dH}_7 = \overline{u}_x\overline{dp}_7^* - \underline{B}_x\overline{u}_z,$$
$$\overline{dH}_8 = \overline{u}_x + \overline{u}_x\overline{dp}_8^*.$$

On a montré dans [GAL0] que la matrice $\overline{\mathbf{A}}_p$ possède des valeurs propres réelles données par $\overline{u}_x - \overline{c}_f, \overline{u}_x - \overline{c}_a, \overline{u}_x - \overline{c}_s, \overline{u}_x, \overline{u}_x, \overline{u}_x + \overline{c}_s, \overline{u}_x + \overline{c}_a, \overline{u}_x + \overline{c}_f$, et est diagonalisable (voir [GAL0] pour les expressions des valeurs propres et des vecteurs propres). On a par conséquent le résultat suivant :

Proposition 36.
La matrice de Roe-Powell $\overline{\mathbf{A}}_p$ définie ci-dessus est une matrice de type Roe et induit un schéma de type Godunov pour le système de Powell.

◇

4.3 Equivalence Lagrange-Euler

Nous étendons ci-dessous les résultats de [GAL4] établis dans le cas conservatif et dans [GAL5] pour le cas avec terme source. En particulier, on montre qu'il y a équivalence entre solveurs simples lagrangiens et solveurs simples eulériens pour une classe assez large de solveurs de Riemann.

4.3.1 Systèmes hyperboliques physiques

Nous nous intéressons ici à une classe de systèmes hyperboliques assez générale. En particulier, on considère des systèmes physiques, i.e. possédant à la fois une forme eulérienne et une forme lagrangienne ([DES], [DUBOIS], [GAL4]). La forme eulérienne d'un tel système est identique à la forme (4.2) soit,

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F} + \mathbf{P}\partial_x \mathbf{B} = \mathbf{0}. \tag{4.23}$$

Ici $\mathbf{F}$ est donné par $\mathbf{F} = u\mathbf{U} + \mathbf{G}^0$ avec $\mathbf{G}^0$ de première composante nulle et où u est la vitesse en x. Habituellement, la première composante de $\mathbf{U}$ est la densité ρ qui est positive. On supposera de plus que $\mathbf{P}\partial_x\mathbf{B}$ a sa première composante nulle. La première équation est alors

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0.$$

Pour obtenir la forme lagrangienne, on définit les variables $\tau = t$, $m = \int \rho dx$ et les vecteurs :

$${}^t\mathbf{n} = (1, 0, ..., 0) \quad \mathbf{U} = \rho\mathbf{n} + \mathbf{U}^0 \quad \mathbf{V}^0 = \vartheta\mathbf{U}^0 \quad \mathbf{V} = \vartheta\mathbf{n} + \mathbf{V}^0 \quad \mathbf{G} = -u\mathbf{n} + \mathbf{G}^0 \quad \vartheta = 1/\rho.$$

La forme lagrangienne du système est la suivante,

$$\partial_\tau \mathbf{V} + \partial_m \mathbf{G} + \mathbf{P}\partial_m \mathbf{B} = \mathbf{0}. \tag{4.24}$$

On ne soucie pas non plus dans ce paragraphe du sens donné aux produits non-conservatifs $\mathbf{P}\partial_x\mathbf{B}$ et $\mathbf{P}\partial_m\mathbf{B}$. On supposera aussi que (4.24) possède une paire entropie-flux (σ, q) et on considèrera les solutions vérifiant l'inéquation d'entropie suivante

$$\partial_\tau \sigma + \partial_m q \leq 0.$$

Celle-ci induit alors pour la forme eulérienne l'inéquation d'entropie ci-dessous,

$$\partial_t(\rho\sigma) + \partial_x(\rho\sigma u + q) \leq 0.$$

4.3.2 Construction via les états intermédiaires

Dans ce paragraphe, nous développons une méthode de construction systématique de schémas de type Godunov eulériens (resp. lagrangiens) à partir de schémas lagrangiens (resp. eulériens). Elle établit une correspondance entre les états intermédiaires des solveurs de chaque forme.
Considérons un schéma de type Godunov pour le système lagrangien (4.24) et supposons le associé à un solveur de Riemann simple $(\mathcal{V}, \lambda)$ défini par les pentes $(\lambda_k)_{k=1,m}$ et les états intermédiaires $(\mathbf{V}_k)_{k=1,m+1}$, soit :

$$\mathbf{W}_L(m/\tau) = \begin{cases} \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_g & \text{si} \quad m/\tau < \lambda_1, \\ \mathbf{V}_k & \text{si} \quad \lambda_{k-1} \leq m/\tau < \lambda_k \quad \text{pour} \quad k = 2, m, \\ \mathbf{V}_{m+1} = \mathbf{V}_d & \text{si} \quad \lambda_m \leq m/\tau. \end{cases} \tag{4.25}$$

Puisque le schéma associé est de type Godunov, il existe $\overline{\mathbf{P}}$ tel que l'on ait la relation suivante :

$$\Delta\mathbf{G} + \overline{\mathbf{P}}\Delta\mathbf{B} = \sum_{k=1,m} \lambda_k \delta\mathbf{V}_k.$$

Rappelons ici que la première équation du système lagrangien a la forme suivante :

$$\partial_\tau \vartheta - \partial_m u = 0. \tag{4.26}$$

Cette équation correspond à la conservation de la masse et s'écrit en coordonnées eulériennes :

$$\partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0. \tag{4.27}$$

Elle implique qu'au travers d'une discontinuité de pente λ, on a la relation de saut :

$$\Delta u + \lambda \Delta \vartheta = 0. \tag{4.28}$$

Dans la suite, on considèrera des solveurs simples vérifiant l'analogue discret de (4.26) au travers de chaque changement d'états, i.e., on supposera que :

$$\delta u_k + \lambda_k \delta \vartheta_k = 0 \quad \text{pour} \quad k = 1, m \quad (H_1).$$

Cette hypothèse est naturelle car l'équation (4.26) est linéaire.
Soient (α, β) un couple de réels conjugués, i.e., vérifiant, $\alpha + \beta = 1$, ainsi qu'une suite $(X_k)_k$. On notera alors $X_{\alpha,k} = \alpha X_k + \beta X_{i+1}$.
Soient enfin deux couples (X_g, X_d) et (Y_g, Y_d). L'identité suivante est alors vérifiée :

$$\Delta(XY) = X_\alpha \Delta Y + Y_\beta \Delta X.$$

En utilisant la notation précédente, on note que si (H_1) est vérifiée, on a alors pour tout α et tout k :

$$u_{\alpha,k} + \lambda_k \vartheta_{\alpha,k} = u_k + \lambda_k \vartheta_k = u_{k+1} + \lambda_k \vartheta_{k+1}.$$

On notera dans ce cas :

$$\Lambda_k = u_{\alpha,k} + \lambda_k \vartheta_{\alpha,k}. \tag{4.29}$$

On remarque en outre que si les quantités $(\vartheta_k)_k$ sont positives, alors la suite $(\Lambda_k)_k$ est croissante. Ceci nous amènera à considérer par la suite l'hypothèse suivante :

$$\vartheta_k \geq 0 \quad \text{pour} \quad k = 1, m \quad (H_2).$$

Enfin, par souci de consistance avec les équations (4.26) et (4.27), on supposera que la première composante du vecteur $\overline{\mathbf{P}}\Delta\mathbf{B}$ est nulle, soit,

$$\left(\overline{\mathbf{P}}\Delta\mathbf{B}\right)_1 = 0 \quad (H_3).$$

On construit maintenant pour le système eulérien (4.23) le solveur de Riemann suivant $(\mathcal{U}, \Lambda)$ défini par les pentes $(\Lambda_k)_{k=1,m}$ et les états intermédiaires $(\mathbf{U}_k)_{k=1,m}$ définis par $\mathbf{U}_k = \mathbf{U}(\mathbf{V}_k)$, soit,

$$\mathbf{W}_E(x/t) = \begin{cases} \mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_g = \mathbf{U}(\mathbf{V}_g) & \text{si} \quad x/t < \Lambda_1, \\ \mathbf{U}_k = \mathbf{U}(\mathbf{V}_k) & \text{si} \quad \Lambda_{k-1} \leq x/t < \Lambda_k \quad \text{pour} \quad k = 2, m, \\ \mathbf{U}_{m+1} = \mathbf{U}_d = \mathbf{U}(\mathbf{V}_d) & \text{si} \quad \Lambda_m \leq x/t. \end{cases} \tag{4.30}$$

Nous allons déterminer par la suite sous quelles conditions le solveur $\mathbf{W}_E$ est un solveur de type Godunov. Avant d'énoncer le résultat principal, on donne le lemme suivant :

Lemme 2.
Supposons (H1) vérifiée. Soit $(x_k)_k$ une suite quelconque et $(X_k)_k = (\rho_k x_k)_k$.
On a l'identité suivante :

$$\sum_{k=1,m} \Lambda_k \delta X_k = \Delta(uX) + \sum_{k=1,m} \lambda_k \delta x_k.$$

Preuve :
On a :

$$\begin{aligned}
\sum_k \Lambda_k \delta X_k &= \sum_k [u_{\alpha,k} + \lambda_k \vartheta_{\alpha,k}] \delta X_k, \\
&= \sum_k [u_{\alpha,k} \delta X_k - \lambda_k X_{\beta,k} \delta \vartheta_k] + \sum_k \lambda_k [\vartheta_{\alpha,k} \delta X_k + X_{\beta,k} \delta \vartheta_k], \\
&= \sum_k [u_{\alpha,k} \delta X_k + X_{\beta,k} \delta u_k] + \sum_k \lambda_k [\vartheta_{\alpha,k} \delta X_k + X_{\beta,k} \delta \vartheta_k], \qquad \text{en utilisant (H1)} \\
&= \sum_k \delta(uX)_k + \sum_k \lambda_k \delta(\vartheta X)_k, \\
&= \Delta(uX) + \sum_k \lambda_k \delta x_k.
\end{aligned}$$

◇

Le résultat précédent induit le corollaire immédiat suivant :

Corollaire 3.
Pour tout réel A, l'équivalence suivante est vérifiée :

$$\sum_{k=1,m} \lambda_k \delta x_k \geq A \Longleftrightarrow \sum_{k=1,m} \Lambda_k \delta X_k \geq \Delta(uX) + A.$$

◇

On énonce maintenant le résultat principal donnant l'équivalence entre solveurs lagrangiens et solveurs eulériens.

Proposition 37.
Supposons (H_1), (H_2) et (H_3) vérifies. Alors, le solveur de Riemann simple lagrangien $(\mathcal{V}, \lambda)$ (4.25) est de type Godunov pour le système (4.24) si et seulement si le solveur de Riemann eulérien $(\mathcal{U}, \Lambda)$ (4.30) est de type Godunov pour le système (4.23).
De même, si (H_1), (H_2) et (H_3) sont vérifies, alors le solveur de Riemann simple lagrangien $(\mathcal{V}, \lambda)$ (4.25) est de type Godunov entropique pour le système (4.24) si et seulement si le solveur de Riemann eulérien $(\mathcal{U}, \Lambda)$ (4.30) est de type Godunov entropique pour le système (4.23).

Preuve :
Supposons que (4.25) soit de type Godunov. On a donc :

$$\Delta \mathbf{G} + \overline{\mathbf{P}} \Delta \mathbf{B} = \sum_{k=1,m} \lambda_k \delta \mathbf{V}_k. \tag{4.31}$$

Il faut montrer la relation : $\Delta\mathbf{F} + \overline{\mathbf{P}}\Delta\mathbf{B} = \sum_{k=1,m} \Lambda_k \delta\mathbf{U}_k$.
On a alors :

$$\begin{aligned}
\Delta\mathbf{F} + \overline{\mathbf{P}}\Delta\mathbf{B} &= \Delta(u\mathbf{U} + \mathbf{G}^0) + \overline{\mathbf{P}}\Delta\mathbf{B}, \\
&= \Delta(\rho u)\mathbf{n} + \Delta(u\mathbf{U}^0) + \Delta\mathbf{G}^0 + \left(\overline{\mathbf{P}}\Delta\mathbf{B}\right)^0 + \left(\overline{\mathbf{P}}\Delta\mathbf{B}\right)_1 \mathbf{n}, \\
&= \Delta(\rho u)\mathbf{n} + \Delta(u\mathbf{U}^0) + \sum_k \lambda_k \delta\mathbf{V}_k^0, \qquad \text{d'après (4.31) et (H3).}
\end{aligned}$$

Or, en utilisant le lemme 2 avec successivement $X = \mathbf{U}^0$ et $X = \rho$, on obtient les deux relations suivantes :

$$\Delta(u\mathbf{U}^0) + \sum_k \lambda_k \delta\mathbf{V}_k^0 = \sum_k \Lambda_k \delta\mathbf{U}_k^0,$$
$$\Delta(\rho u) = \sum_k \Lambda_k \delta\rho_k.$$

Par suite, on a :

$$\begin{aligned}
\Delta\mathbf{F} + \overline{\mathbf{P}}\Delta\mathbf{B} &= \sum_k \Lambda_k \delta\rho_k \mathbf{n} + \sum_k \Lambda_k \delta\mathbf{U}_k^0, \\
&= \sum_k \Lambda_k \delta\mathbf{U}_k.
\end{aligned}$$

Par conséquent, le solveur de Riemann (4.30) induit bien un schéma de type Godunov.
La démonstration de la réciproque étant identique, ceci achève la démonstration de la première assertion.
En ce qui concerne le cas entropique, la démonstration est une conséquence directe du corollaire 3, en prenant $x = \sigma$ et $A = \Delta q$.

◇

Nous avons en outre la propriété immédiate suivante :

Propriété 1.
Supposons (H_1), (H_2) et (H_3) vérifiées.
Le solveur de Riemann simple lagrangien (4.25) est positif si et seulement si le solveur de Riemann simple eulérien (4.30) est positif.

◇

4.4 Application

Il existe de nombreuses utilisations possibles du principe de construction développé au paragraphe précédent. Par exemple, dans [AB-SA], un schéma de type HLL est construit pour un modèle multifluide. On peut réinterpréter facilement celui-ci en terme de solveur de type Godunov. Cependant, ce solveur conserve les inconvénients du schéma HLL, i.e.il ne préserve pas les discontinuités de contact. En considérant la version lagrangienne du modèle proposé dans [AB-SA], il est possible de construire un solveur entropique à deux états intermédiaires, qui est donc a priori moins dissipatif, et vérifiant en outre la propriété (H1). On ne développera cependant pas cette étude dans la suite, et on se limitera au cas du système de Powell pour la MHD.

4.4.1 Le système de Powell en coordonnées de Lagrange

Dans ce paragraphe, on cherche à appliquer le principe de construction précédent au cas du système de Powell (4.20). En particulier, on va construire pour la forme lagrangienne du système de Powell des solveurs de type Godunov satisfaisant les propriétés (H1), (H2) et (H3) afin d'en déduire des solveurs de type Godunov pour la forme eulérienne. Cette forme lagrangienne est fournie par :

$$\partial_\tau \mathbf{V} + \partial_m \mathbf{G} = \mathbf{P}\partial_m B_x,$$

$$\text{où} \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \vartheta \\ u_x \\ u_y \\ u_z \\ B_x\vartheta \\ B_y\vartheta \\ B_z\vartheta \\ \tilde{E} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} -u_x \\ \tilde{p} - B_x^2 \\ -B_xB_y \\ -B_xB_z \\ -B_xu_x \\ -B_xu_y \\ -B_xu_z \\ u_x\tilde{p} - B_x\mathbf{B}\cdot\mathbf{u} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{P} = - \begin{pmatrix} 0 \\ B_x \\ B_y \\ B_z \\ u_x \\ u_y \\ u_z \\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{u} \end{pmatrix}, \tag{4.32}$$

avec :

- ϑ le volume spécifique,
- ρ la densité qui vérifie $\rho = 1/\vartheta$,
- u_x, u_y, u_z les composantes de la vitesse $\mathbf{u}$,
- B_x, B_y, B_z les composantes du champ magnétique $\mathbf{B}$,
- $\tilde{p} = p + \mathbf{B}^2/2$ la pression totale,
- ε l'énergie interne donnée en gaz parfait par $\varepsilon = p\vartheta/(\gamma - 1)$,
- $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon + \vartheta\mathbf{B}^2/2$, l'énergie interne totale,
- $\tilde{E}$ l'énergie totale donnée par $\tilde{E} = \tilde{\varepsilon} + \mathbf{u}^2/2$.

Il est facile de donner un sens au produit non-conservatif $\mathbf{P}\partial_m B_x$ (voir [GAL7]). En particulier, les deux termes $\mathbf{P}$ et B_x ne sont jamais discontinus en même temps. De plus, les discontinuités de contact sont définis par $\Delta\mathbf{u} = 0$, $\Delta\mathbf{B}_\perp = 0$ et $\Delta p = 0$.
Ce système possède en outre une entropie qui n'est autre que l'entropie habituelle de la mécanique des fluides, soit $s = f(p\vartheta^\gamma)$, où f est croissante convexe, et bien sûr le flux d'entropie associé est nul. Ceci conduit à chercher des solutions vérifiant l'inéquation d'entropie suivante :

$$\partial_\tau s \leq 0. \tag{4.33}$$

On remarquera aussi qu'après combinaison de la première équation de (4.32) avec l'équation sur $B_x\vartheta$, on obtient l'équation très simple suivante sur B_x :

$$\partial_\tau B_x = 0. \tag{4.34}$$

Tout comme pour le cas conservatif, afin d'étudier ce système, il est plus aisé d'introduire le vecteur suivant de variables primitives ${}^t\mathbf{Q} = (\vartheta, u_x, u_y, u_z, B_x, B_y, B_z, p)$. On obtient alors la forme non-conservative suivante :

$$\partial_\tau \mathbf{V} + \mathbf{A}_p \partial_m \mathbf{V} = \mathbf{0}, \tag{4.35}$$

avec $\mathbf{A}_p = \partial_{\mathbf{V}}\mathbf{G} - \mathcal{P}\partial_{\mathbf{V}}\mathbf{Q}$ et $\mathcal{P} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{P}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$. Cette matrice $\mathbf{A}_p$ est l'équivalent lagrangien de la matrice de Powell (4.22).
De même en posant $\mathbf{N} = \partial_{\mathbf{Q}}\mathbf{V}$, et en multipliant (4.35) à gauche par $\mathbf{N}^{-1}$, on obtient le système suivant :

$$\partial_\tau \mathbf{Q} + \mathbf{D}_p \partial_m \mathbf{Q} = \mathbf{0},$$

où la matrice $\mathbf{D}_p = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}_p\mathbf{N}$ est donnée par

$$\mathbf{D}_p = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_y & B_z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -B_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -B_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_y/\vartheta & -B_x/\vartheta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_z/\vartheta & 0 & -B_x/\vartheta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La quantité C désigne la vitesse du son lagrangienne donnée en gaz parfait par $C^2 = \gamma p/\vartheta$.
On notera que $\mathbf{A}_p$ et $\mathbf{D}_p$ sont semblables. En conséquence, elles ont les mêmes valeurs propres données par

$$0 \quad , \quad 0 \quad , \quad C_m^{\pm} = \pm C_m = \pm c_m/\vartheta \quad \text{pour} \quad m = s, al, f. \tag{4.36}$$

Les quantités $C_{f,s}$ désignent les vitesses magneto-acoustiques lentes et rapides et C_{al} est la vitesse d'Alfven. Leurs équivalents eulériens $c_{s,al,f}$ satisfont :

$$c_{al}^2 = \vartheta B_x^2 \quad , \quad c_{f,s}^2 = 1/2(\tilde{c}^2 \pm (\tilde{c}^4 - 4c^2c_{al}^2)^{1/2}),$$

où c est la vitesse du son eulérienne donnée par $c = C\vartheta$, et $\tilde{c}$ est la vitesse du son totale donnée par $\tilde{c}^2 = c^2 + \mathbf{b}^2$, avec $\mathbf{b} = {}^t(b_x, b_y, b_z) = \vartheta^{1/2}\mathbf{B}$.
Dans la suite, si $\mathbf{X} = (X_x, X_y, X_z)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$, on notera $\mathbf{X}_\perp = (X_y, X_z)$.
On définit maintenant les quantités $\alpha_f^2 = \dfrac{c^2 - c_s^2}{c_f^2 - c_s^2}$ et $\alpha_s^2 = \dfrac{c_f^2 - c^2}{c_f^2 - c_s^2}$.
On peut alors vérifier les identités suivantes (voir [B-W] par exemple) :

$$\begin{array}{ccc} c_s^2 + c_f^2 = c^2 + \mathbf{b}^2, & \alpha_s^2 + \alpha_f^2 = 1, & \alpha_s^2 c_s^2 + \alpha_f^2 c_f^2 = c^2, \\ c_s c_f = c|b_x|, & (c_f^2 - c_s^2)\alpha_s\alpha_f = c|\mathbf{b}_\perp|. & \end{array} \tag{4.37}$$

De même, on notera,

$$S = signe(B_x),\ S_s = 1\ ,\ S_f = -1\ ,\ \beta = (\beta_y, \beta_z) = \frac{\mathbf{B}_\perp}{|\mathbf{B}_\perp|},\ \beta^\perp = (\beta_z, -\beta_y).$$

Afin de définir les vecteurs propres, on introduit les vecteurs suivants,

$$\mathbf{r}^1_{al} = {}^t\,(0,0,\beta_z,-\beta_y,0,0,0,0)\ ,\ \mathbf{r}^2_{al} = {}^t\left(0,0,0,0,0,-S\beta_z\vartheta^{-1/2}, S\beta_y\vartheta^{-1/2}, 0\right),$$

$$\mathbf{l}^1_{al} = \frac{1}{2}\,(0,0,\beta_z,-\beta_y,0,0,0,0)\ ,\ \mathbf{l}^2_{al} = \frac{1}{2}\left(0,0,0,0,0,-S\beta_z\vartheta^{1/2}, S\beta_y\vartheta^{1/2}, 0\right),$$

$$\mathbf{r}^1_{s,f} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} 0 \\ c_{s,f}\alpha_{s,f} \\ \alpha_{f,s}c_{f,s}\beta_y S S_{s,f} \\ \alpha_{f,s}c_{f,s}\beta_z S S_{s,f} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \mathbf{r}^2_{s,f} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} -\vartheta\alpha_{s,f} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\alpha_{f,s}c\beta_y\vartheta^{-1/2}S_{s,f} \\ -\alpha_{f,s}c\beta_z\vartheta^{-1/2}S_{s,f} \\ \alpha_{s,f}c^2/\vartheta \end{pmatrix},$$

$${}^t\mathbf{l}^1_{s,f} = \frac{1}{2c}\begin{pmatrix} 0 \\ c_{s,f}\alpha_{s,f} \\ \alpha_{f,s}c_{f,s}\beta_y S S_{s,f} \\ \alpha_{f,s}c_{f,s}\beta_z S S_{s,f} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad {}^t\mathbf{l}^2_{s,f} = \frac{1}{2c}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\alpha_{f,s}c\beta_y\vartheta^{1/2}S_{s,f} \\ -\alpha_{f,s}c\beta_z\vartheta^{1/2}S_{s,f} \\ \alpha_{s,f}\vartheta \end{pmatrix}.$$

Alors, les vecteurs propres à droite et à gauche de la matrice $\mathbf{D}_p$ sont donnés par

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^1_0 = \frac{1}{c^2}\,{}^t\,(1,0,0,0,0,0,0,0) \quad &,\quad \mathbf{l}^1_0 = \left(c^2,0,0,0,0,0,0,\vartheta^2\right), \\ \mathbf{r}^2_0 = {}^t\,(0,0,0,0,1,0,0,0) \quad &,\quad \mathbf{l}^2_0 = (0,0,0,0,1,0,0,0)\,, \end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\mathbf{r}^\pm_{al,f,s} = \pm\mathbf{r}^1_{al,f,s} + \mathbf{r}^2_{al,f,s} \quad ,\quad \mathbf{l}^\pm_{al,f,s} = \pm\mathbf{l}^1_{al,f,s} + \mathbf{l}^2_{al,f,s}. \tag{4.39}$$

En utilisant la relation $\mathbf{R} = \mathbf{N}\mathbf{r}$ entre les vecteurs propres de $\mathbf{A}_p$ et $\mathbf{D}_p$, on obtient les vecteurs propres à droite suivants $\mathbf{R}^\pm_{s,al,f}$ pour $\mathbf{A}_p$

$$\mathbf{R}^\pm_{al} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm\beta_z \\ \mp\beta_y \\ 0 \\ -S\beta_z\vartheta^{1/2} \\ S\beta_y\vartheta^{1/2} \\ \pm\beta^\perp\cdot\mathbf{u}_\perp \end{pmatrix}, \tag{4.40}$$

$$\mathbf{R}^{\pm}_{s,f} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} -\vartheta\alpha_{s,f} \\ \pm c_{s,f}\alpha_{s,f} \\ \pm S_{s,f}\alpha_{f,s}c_{f,s}\beta_y S \\ \pm S_{s,f}\alpha_{f,s}c_{f,s}\beta_z S \\ -\vartheta\alpha_{s,f}B_x \\ -S_{s,f}\dfrac{\vartheta^{1/2}}{c}\alpha_{f,s}c^2_{f,s}\ \beta_y \\ -S_{s,f}\dfrac{\vartheta^{1/2}}{c}\alpha_{f,s}c^2_{f,s}\ \beta_z \\ \pm(\alpha_{s,f}c_{s,f}u_x + SS_{s,f}\alpha_{f,s}c_{f,s}\mathbf{u}_\perp\cdot\beta) + \alpha_{s,f}\vartheta(\tilde{p}-\mathbf{B}^2) - S_{s,f}\alpha_{f,s}c\vartheta^{1/2}|\mathbf{B}_\perp| \end{pmatrix}. \tag{4.41}$$

Définissons maintenant les variables caractéristiques "continues". Tout d'abord, on introduit les quantités suivantes, où la notation δ signifie soit une dérivée $d_\alpha = \dfrac{d}{d\alpha}$ par rapport à un paramï¿½tre quelconque α, soit une différence Δ,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{al} &= \beta^\perp\cdot\delta\mathbf{u}_\perp && ,\ \mathcal{B}_{al} = -S\vartheta^{1/2}\beta^\perp\cdot\delta\mathbf{B}_\perp, \\ \mathcal{A}_s &= \alpha_s\frac{c_s}{c}\delta u_x + \alpha_f\frac{c_f}{c}S\beta\cdot\delta\mathbf{u}_\perp && ,\ \mathcal{B}_s = \alpha_s\frac{\vartheta}{c}\delta p - \alpha_f\vartheta^{1/2}\beta\cdot\delta\mathbf{B}_\perp, \\ \mathcal{A}_f &= \alpha_f\frac{c_f}{c}\delta u_x - \alpha_s\frac{c_s}{c}S\beta\cdot\delta\mathbf{u}_\perp && ,\ \mathcal{B}_f = \alpha_f\frac{\vartheta}{c}\delta p + \alpha_s\vartheta^{1/2}\beta\cdot\delta\mathbf{B}_\perp. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Alors, en utilisant l'identité $\mathbf{l} = \mathbf{LN}$ reliant les vecteurs propres à gauche de $\mathbf{A}_p$ et $\mathbf{D}_p$, on obtient les variables caractéristiques continues ci-dessous

$$\phi^\pm_m = \mathbf{L}^\pm_m\cdot d_\alpha\mathbf{V} = \mathbf{l}^\pm_m\cdot d_\alpha\mathbf{Q} = \frac{1}{2}(\pm\mathcal{A}_m + \mathcal{B}_m) \quad \text{pour} \quad m = s, al, f. \tag{4.43}$$

Finalement, puisque le système (4.32) est hyperbolique, on a la décomposition suivante :

$$d_\alpha\mathbf{G} - \mathbf{P}d_\alpha B_x = \sum_{(\nu;m)=(\pm;s,al,f)} C^\nu_m\phi^\nu_m\mathbf{R}^\nu_m. \tag{4.44}$$

Considérons maintenant les expressions des valeurs propres, des variables caractéristiques et des vecteurs propres à droite. On constate qu'ils s'expriment en fonction de $\tilde{p}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{B}$, ϑ et C. A l'opposé, le flux $\mathbf{G}$ et le vecteur $\mathbf{P}$ dépendent uniquement de $\tilde{p}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{B}$, mais pas de ϑ et C. Le résultat ci-dessous montre que cette propriété reste vraie dans (4.44).

Propriété 2.
L'égalité suivante est vérifiée,

$$d_\alpha\mathbf{G} - \mathbf{P}d_\alpha B_x = \sum_{(\nu;m)=(\pm;s,al,f)} C^\nu_m\phi^\nu_m\mathbf{R}^\nu_m$$

où ϑ et C sont choisis quelconques dans les expresssions de $C^\nu_\pm$, $\phi^\nu_\pm$ et $\mathbf{R}^\nu_\pm$ données par (4.36), (4.42) et (4.43).

◇

La preuve de ce résultat peut être facilement obtenue par des calculs directs à partir des expressions des valeurs propres, variables caractéristiques et vecteurs propres à droite en fonction de $\tilde{p}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{B}$, ϑ et C, et nous ne la développerons pas ici. Dans la suite, nous verrons que la propriété 2 est aussi vraie dans le cas discret, ce qui nous conduira à la construction d'une famille de schémas de type Godunov.

4.4.2 Construction d'une matrice de Powell discrète

Nous construisons dans ce paragraphe une matrice de type Roe pour le système de Powell en coordonnées de Lagrange. On appellera une telle matrice matrice de Powell. Puisque dans le cas où B_x est constant, le système de Powell devient le système de la MHD conservative, il est naturel de demander qu'il en soit de même pour la matrice de Powell vis-à-vis de la matrice de Roe. Nous allons donc utiliser la technique de construction de la matrice de Roe de [CGR] afin d'en déduire une matrice de Powell.
Rappelons qu'elle est est basée sur l'utilisation de moyennes arithmétiques et que la matrice de Roe pour la MHD lagrangienne est l'extension naturelle de la matrice de Roe donnée par Munz [MUNZ] dans le cas de la Dynamique des gaz. Sauf indication contraire, la notation X_a désignera dans la suite la moyenne arithmétique d'un couple (X_g, X_d).
On introduit de nouveau le vecteur de variables primitives ${}^t\mathbf{Q} = (\vartheta, u_x, u_y, u_z, B_x, B_y, B_z, p)$. Le principe de construction est alors basé sur la recherche de matrices $\overline{\mathbf{M}}$, $\overline{\mathbf{N}}$ telles que :

$$\Delta\mathbf{G} - \mathbf{P}_a \Delta B_x = \overline{\mathbf{M}}\Delta\mathbf{Q} \quad \text{et} \quad \Delta\mathbf{V} = \overline{\mathbf{N}}\Delta\mathbf{Q}.$$

La matrice de Powell sera alors donnée par $\overline{\mathbf{A}}_p = \overline{\mathbf{M}}\,\overline{\mathbf{N}}^{-1}$, si $\mathbf{N}$ est inversible.
En fait, comme pour le cas continu, on considère de préférence la matrice $\overline{\mathbf{D}}_p = \overline{\mathbf{N}}^{-1}\,\overline{\mathbf{M}}$, analogue discret de $\mathbf{D}_p$. La matrice $\mathbf{D}$ obtenue pour la MHD lagrangienne conservative est fournie par :

$$\overline{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (B_y)_a & (B_z)_a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -B_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -B_x & 0 \\ 0 & (B_y)_a/\vartheta_a & -B_x/\vartheta_a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (B_z)_a/\vartheta_a & 0 & -B_x/\vartheta_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C^2_{ave} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $C^2_{ave} = \gamma P_a/\vartheta_a$, avec $P_a = p_a + \frac{\gamma-1}{\gamma}[(\mathbf{B}^2)_a - (\mathbf{B}_a)^2)]$ pour un gaz parfait (voir [CGR] pour une équation d'état quelconque).
On propose ici d'étendre naturellement celle-ci au cas non-conservatif par la matrice $\overline{\mathbf{D}}_p$ ci-

dessous :

$$\overline{\mathbf{D}}_p = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (B_y)_a & (B_z)_a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(B_x)_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(B_x)_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (B_y)_a/\vartheta_a & -(B_x)_a/\vartheta_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (B_z)_a/\vartheta_a & 0 & -(B_x)_a/\vartheta_a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{ave}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.45}$$

Pour la matrice $\overline{\mathbf{N}}$, on fait le choix simple suivant,

$$\overline{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (B_x)_a & 0 & 0 & 0 & \vartheta_a & 0 & 0 & 0 \\ (B_y)_a & 0 & 0 & 0 & 0 & \vartheta_a & 0 & 0 \\ (B_z)_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vartheta_a & 0 \\ (\frac{\mathbf{B}^2}{2})_a + \frac{p_a}{\gamma-1} & u_{xa} & u_{y_a} & u_{za} & (B_x)_a\vartheta_a & (B_y)_a\vartheta_a & (B_z)_a\vartheta_a & \frac{\vartheta_a}{\gamma-1} \end{pmatrix},$$

qui induit la matrice $\overline{\mathbf{N}}^{-1}$ ci-dessous :

$$\overline{\mathbf{N}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(B_x)_a/\vartheta_a & 0 & 0 & 0 & 1/\vartheta_a & 0 & 0 & 0 \\ -(B_y)_a/\vartheta_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\vartheta_a & 0 & 0 \\ -(B_z)_a/\vartheta_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\vartheta_a & 0 \\ \kappa_a(\mathbf{B}_a^2 - (\frac{\mathbf{B}^2}{2})_a \ldots & -\kappa_a u_{xa} & -\kappa u_{y_a} & -\kappa u_{za} & -\kappa_a(B_x)_a & -\kappa_a(B_y)_a & -\kappa_a(B_z)_a & \kappa_a \\ \ldots \quad -\frac{p_a}{\gamma-1}) & & & & & & & \end{pmatrix}.$$

où $\kappa_a = \dfrac{\gamma-1}{\vartheta_a}$. On montre alors aisément le résultat :

Proposition 38.
La matrice $\overline{\mathbf{A}}_p = \overline{\mathbf{N}}\,\overline{\mathbf{D}}_p\,\overline{\mathbf{N}}^{-1}$ est une matrice de type Roe pour le système de Powell.

◇

On notera que la matrice $\overline{\mathbf{D}}_p$ a la même structure que $\mathbf{D}_p$. En effet, on a $\overline{\mathbf{D}}_p = \overline{\mathbf{D}}_p(C_{ave}, \vartheta_a, \mathbf{B}_a)$. Ceci entraîne que l'algèbre est la même que dans le cas continu. En particulier, les valeurs propres de $\overline{\mathbf{A}}_p$ sont données par 0, 0, $C_{al,f,s}^{\pm} = C_{al,f,s}^{\pm}(C_{ave}, \vartheta_a, \tilde{p_a}, \mathbf{B}_a)$. De plus, les vecteurs propres à

droite sont $\mathbf{R}^{\pm}_{al,f,s} = \mathbf{R}^{\pm}_{al,f,s}(C_{ave}, \vartheta_a, \tilde{p_a}, \mathbf{u}_a, \mathbf{B}_a)$ et les variables caractéristiques discrètes sont $\phi^{\pm}_{al,f,s} = \phi^{\pm}_{al,f,s}(C_{ave}, \vartheta_a, \tilde{p_a}, \mathbf{B}_a, \Delta)$, i.e.,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{al} &= \beta^{\perp} \cdot \Delta \mathbf{u}_{\perp} && , \mathcal{B}_{al} = -S\vartheta_a^{1/2}\beta^{\perp} \cdot \Delta \mathbf{B}_{\perp}, \\
\mathcal{A}_{s} &= \alpha_s \frac{c_s}{c}\Delta u_x + \alpha_f \frac{c_f}{c} S\beta \cdot \Delta \mathbf{u}_{\perp} && , \mathcal{B}_{s} = \alpha_s \frac{\vartheta_a}{c}\Delta p - \alpha_f \vartheta_a^{1/2}\beta \cdot \Delta \mathbf{B}_{\perp}, \\
\mathcal{A}_{f} &= \alpha_f \frac{c_f}{c}\Delta u_x - \alpha_s \frac{c_s}{c} S\beta \cdot \Delta \mathbf{u}_{\perp} && , \mathcal{B}_{f} = \alpha_f \frac{\vartheta_a}{c}\Delta p + \alpha_s \vartheta_a^{1/2}\beta \cdot \Delta \mathbf{B}_{\perp}.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Remarque 6.
On n'a pas traité ici le cas d'un gaz quelconque. Il s'obtient facilement à l'aide des ingrédients développés dans [CGR].

4.4.3 Construction d'une famille de solveurs de type Godunov

Dans ce paragraphe, comme dans le cas conservatif, nous généralisons le solveur de type Roe en une famille de solveurs de type Godunov.
Dans ce but, on définit pour $\overline{C}$ et $\overline{\vartheta}$ arbitraires, les pentes $C^{\pm}_{al,f,s} = C^{\pm}_{al,f,s}(\overline{C}, \overline{\vartheta}, \tilde{p_a}, \mathbf{B}_a)$, les vecteurs $\mathbf{R}^{\pm}_{al,f,s} = \mathbf{R}^{\pm}_{al,f,s}(\overline{C}, \overline{\vartheta}, \tilde{p_a}, \mathbf{u}_a, \mathbf{B}_a)$ et les variables caractéristiques $\phi^{\pm}_{al,f,s} = \phi^{\pm}_{al,f,s}(\overline{C}, \overline{\vartheta}, \tilde{p_a}, \mathbf{B}_a, \Delta)$.
On construit maintenant le solveur de Riemann suivant

$$\mathbf{W}(m/\tau) = \begin{cases}
\mathbf{V}_g & & & \text{si} & m/\tau \le -C_f, \\
\mathbf{V}_{g,f} & = & \mathbf{V}_g + \phi_f^- \mathbf{R}_f^- & \text{si} & -C_f < m/\tau \le -C_{al}, \\
\mathbf{V}_{g,al} & = & \mathbf{V}_{g,f} + \phi_{al}^- \mathbf{R}_{al}^- & \text{si} & -C_{al} < m/\tau \le -C_s, \\
\mathbf{V}_{g,s} & = & \mathbf{V}_{g,al} + \phi_s^- \mathbf{R}_s^- & \text{si} & -C_s < m/\tau \le 0, \\
\mathbf{V}_{d,s} & = & \mathbf{V}_{d,al} - \phi_s^+ \mathbf{R}_s^+ & \text{si} & 0 < m/\tau \le C_s, \\
\mathbf{V}_{d,al} & = & \mathbf{V}_{d,f} - \phi_{al}^+ \mathbf{R}_{al}^+ & \text{si} & C_s < m/\tau \le C_{al}, \\
\mathbf{V}_{d,f} & = & \mathbf{V}_d - \phi_f^+ \mathbf{R}_f^+ & \text{si} & C_{al} < m/\tau \le C_f, \\
\mathbf{V}_{d,0} & & & \text{si} & C_f < m/\tau.
\end{cases} \tag{4.47}$$

Si dans (4.47), nous choisissons $\overline{\vartheta} = \vartheta_a$, et $\overline{C} = C_{ave}$, on retrouve le solveur de Riemann associé au solveur de type Roe défini plus haut. Dans le cas général, le résultat ci-dessous nous permet de définir un schéma de type Godunov.

Proposition 39.
L'identité suivante est vraie pour tout $\overline{\vartheta}$ et $\overline{C}$,

$$\Delta \mathbf{G} - \mathbf{P}_a \Delta B_x = \sum_{(\nu; m) = (\pm; s, al, f)} C_m^{\nu} \phi_m^{\nu} \mathbf{R}_m^{\nu}. \tag{4.48}$$

◇

Clairement, ce résultat implique que (4.47) est un solveur de type Godunov puisque (4.48) est exactement la caractérisation donnée par (4.13). De plus, si les états $\mathbf{V}_g$ and $\mathbf{V}_d$ sont séparés par une discontinuité de contact, i.e., $\Delta u_x = \Delta u_y = \Delta u_z = \Delta p = \Delta B_y = \Delta B_z = 0$, par construction on a $\phi^{\pm}_{al,f,s} = 0$, ce qui conduit à $\mathbf{V}_{g,m} = \mathbf{V}_g$ et $\mathbf{V}_{d,m} = \mathbf{V}_d$ pour $m = al, f, s$. On a donc immédiatement le résultat,

Corollaire 4.
Le solveur de Riemann (4.47) préserve les discontinuités de contact.

$\diamond$

On ne développera pas ici la preuve de la proposition 39. Elle peut être obtenue à l'aide de calculs directs à partir des expressions des valeurs propres et des vecteurs propres en fonction de $\tilde{p}_a$, $\mathbf{u}_a$, $\mathbf{B}_a$, $\overline{\vartheta}$, et $\overline{C}$. Mais afin de relier cette propriété avec la notion de matrice de type Roe, on préfèrera donner la preuve dans le cas particulier où $\overline{\vartheta}$ est choisi égal à ϑ_a. La méthode que nous allons utiliser suit la même démarche que dans le cas conservatif ([GAL2], [GAL3]). Au paragraphe précédent, nous avons cherché des matrices $\overline{\mathbf{M}}$, $\overline{\mathbf{N}}$ telles que $\Delta\mathbf{G} - \mathbf{P}_a\Delta B_x = \overline{\mathbf{M}}\Delta\mathbf{Q}$, $\Delta\mathbf{V} = \overline{\mathbf{N}}\Delta\mathbf{Q}$, et nous avons considéré la matrice $\overline{\mathbf{D}}_p = \overline{\mathbf{N}}^{-1}\,\overline{\mathbf{M}}$, la matrice de type Roe étant donné par $\overline{\mathbf{A}}_p = \overline{\mathbf{N}}\,\overline{\mathbf{D}}\,\overline{\mathbf{N}}^{-1}$. Ici, on imposera que la matrice $\overline{\mathbf{D}}_p$ est donné par $\overline{\mathbf{D}}_p = \mathbf{D}(\overline{C}, \vartheta_a, \mathbf{B}_a)$ où le paramètre $\overline{C}$ est arbitraire, et nous chercherons uniquement la matrice $\overline{\mathbf{N}}$. Le problème à résoudre est donc le suivant :
Existe-t-il une matrice $\overline{\mathbf{N}}$ telle que $\overline{\mathbf{A}}_p = \overline{\mathbf{N}}\,\overline{\mathbf{D}}_p\,\overline{\mathbf{N}}^{-1}$ soit une matrice de type Roe?
L'intérêt d'un tel rsultat est évident. En effet, les valeurs propres de $\overline{\mathbf{A}}_p$ sont celles de $\overline{\mathbf{D}}_p$, et peuvent alors être choisies aussi grandes que l'on veut, ce qui permet de moduler la dissipation numérique du schéma.

Nous allons chercher maintenant une matrice $\overline{\mathbf{N}}$ satisfaisant $\Delta\mathbf{V} = \overline{\mathbf{N}}\Delta\mathbf{Q}$. Il est facile de voir que ceci se réduit à chercher une décomposition générale de la pression totale de la forme

$$\Delta\tilde{p} = \chi\Delta\vartheta + \kappa\Delta\tilde{\varepsilon} + \Theta\cdot\Delta(\vartheta\mathbf{B}),$$

où les coefficients scalaires χ, κ et le vecteur Θ sont à determiner. En effet, cette relation conduit à la décomposition suivante de la pression,

$$\begin{aligned}\Delta p &= \chi\Delta\vartheta + \kappa\Delta\tilde{\varepsilon} + \Theta\cdot\Delta(\vartheta\mathbf{B}) + \frac{\mathbf{B}_a^2}{\vartheta_a}\Delta\vartheta - \frac{B_a}{\vartheta_a}\cdot\Delta(\vartheta\mathbf{B}) \\ &= (\chi + \frac{B_a^2}{\vartheta_a})\Delta\vartheta - \kappa u_a\cdot\Delta\mathbf{u} + (\Theta - \frac{B_a}{\vartheta_a})\cdot\Delta(\vartheta B) + \kappa\Delta\tilde{E},\end{aligned}$$

induisant la matrice

$$\overline{\mathbf{N}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(B_x)_a/\vartheta_a & 0 & 0 & 0 & 1/\vartheta_a & 0 & 0 & 0 \\ -(B_y)_a/\vartheta_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\vartheta_a & 0 & 0 \\ -(B_z)_a/\vartheta_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\vartheta_a & 0 \\ \chi + \dfrac{B_a^2}{\vartheta_a} & -\kappa u_{x_a} & -\kappa u_{y_a} & -\kappa u_{z_a} & \Theta_x - \dfrac{(B_x)_a}{\vartheta_a} & \Theta_y - \dfrac{(B_y)_a}{\vartheta_a} & \Theta_z - \dfrac{(B_z)_a}{\vartheta_a} & \kappa \end{pmatrix}.$$

Finalement, le résultat suivant donne la réponse à la question posée plus haut.

Proposition 40.
Soit $\overline{C}$ un réel positif.

Supposons que le système linéaire suivant est satisfait par les coefficients χ, κ *et* Θ,

$$\left\{\begin{array}{lcl} \chi\Delta\vartheta + \kappa\Delta\tilde{\varepsilon} + \Theta\cdot\Delta(\vartheta\mathbf{B}) &=& \Delta\tilde{p}, \\ \kappa\mathbf{B}_a + \Theta &=& \dfrac{\mathbf{B}_a}{\vartheta_a}, \\ -\chi + \kappa\tilde{p}_a &=& \overline{C}^2 + \dfrac{\mathbf{B}_a^2}{\vartheta_a}. \end{array}\right. \tag{4.49}$$

Alors,les matrices $\overline{\mathbf{N}}^{-1}$ *et* $\overline{\mathbf{D}}_p = \mathbf{D}_p(\overline{C}, \vartheta_a, \mathbf{B}_a)$ *satisfont les relations*

$$\overline{\mathbf{N}}^{-1}\Delta\mathbf{V} = \Delta\mathbf{Q} \quad , \quad \overline{\mathbf{N}}^{-1}\left(\Delta\mathbf{G} - \mathbf{P}_a\Delta B_x\right) = \overline{\mathbf{D}}_p\Delta\mathbf{Q}.$$

Ce système a une unique solution si la relation suivante est vraie

$$(p_a + (B^2)_a - (B_a)^2)\Delta\vartheta + \Delta\varepsilon \neq 0. \qquad (C1)$$

La matrice $\overline{\mathbf{N}}^{-1}$ *est inversible si* $\kappa \neq 0$ *, ce qui, si la condition (C1) est vraie, est équivalent à*

$$\overline{C}^2\Delta\vartheta + \Delta p \neq 0. \qquad (C2)$$

Si c'est le cas, la matrice $\overline{\mathbf{A}}_p = \overline{\mathbf{N}}\ \overline{\mathbf{D}}_p\ \overline{\mathbf{N}}^{-1}$ *est une matrice de type Roe. Ses valeurs propres sont* 0, 0 *et* $C^{\pm}_{al,f,s} = C^{\pm}_{al,f,s}(\overline{C}, \vartheta_a, \tilde{p_a}, \mathbf{B}_a)$*. De plus, les vecteurs propres à droite et les variables caractéristiques sont donnés par les expressions,* $\mathbf{R}^{\pm}_{al,f,s} = \mathbf{R}^{\pm}_{al,f,s}(\overline{C}, \vartheta_a, \tilde{p_a}, \mathbf{u}_a, \mathbf{B}_a)$ *et,* $\phi^{\pm}_{al,f,s} = \phi^{\pm}_{al,f,s}(\overline{C}, \vartheta_a, \tilde{p_a}, \mathbf{B}_a, \Delta)$.

Preuve :
Tout d'abord, on a déjà vu que la première relation de (4.49) induit l'égalité $\overline{\mathbf{N}}^{-1}\Delta\mathbf{V} = \Delta\mathbf{Q}$, et il reste alors à montrer que $\overline{\mathbf{N}}^{-1}\left(\Delta\mathbf{G} - \mathbf{P}_a\Delta B_x\right) = \overline{\mathbf{D}}_p\Delta\mathbf{Q}$. On a d'une part, en posant $\tilde{p}_\perp = p + \dfrac{\mathbf{B}_\perp^2}{2}$,

$$\overline{\mathbf{D}}\Delta\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\Delta u_x \\ \Delta p + \mathbf{B}_{\perp a}\cdot\Delta\mathbf{B}_\perp \\ -B_{xa}\Delta B_y \\ -B_{xa}\Delta B_z \\ 0 \\ \dfrac{B_{ya}}{\vartheta_a}\Delta u_x - \dfrac{B_{xa}}{\vartheta_a}\Delta u_y \\ \dfrac{B_{za}}{\vartheta_a}\Delta u_x - \dfrac{B_{xa}}{\vartheta_a}\Delta u_z \\ \overline{C}^2\Delta u_x \end{pmatrix} \quad , \quad \Delta\mathbf{G} - \mathbf{P}_a\Delta B_x = \begin{pmatrix} -\Delta u_x \\ \Delta\tilde{p}_\perp \\ -B_{xa}\Delta B_y \\ -B_{xa}\Delta B_z \\ -B_{xa}\Delta u_x \\ -B_{xa}\Delta u_y \\ -B_{xa}\Delta u_z \\ \Delta(u_x\tilde{p}) - B_{xa}\Delta(\mathbf{u}\cdot\mathbf{B}) \end{pmatrix}.$$

On en tire

$$\overline{\mathbf{N}}^{-1}\left(\Delta\mathbf{G}-\mathbf{P}_a\Delta B_x\right)=\begin{pmatrix} -\Delta u_x \\ \Delta\tilde{p}_\perp \\ -B_{xa}\Delta B_y \\ -B_{xa}\Delta B_z \\ 0 \\ \dfrac{B_{y_a}}{\vartheta_a}\Delta u_x-\dfrac{B_{xa}}{\vartheta_a}\Delta u_y \\ \dfrac{B_{za}}{\vartheta_a}\Delta u_x-\dfrac{B_{xa}}{\vartheta_a}\Delta u_z \\ \left(\overline{\mathbf{N}}^{-1}\left(\Delta\mathbf{G}-\mathbf{P}_a\Delta B_x\right)\right)_8 \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned}\left(\overline{\mathbf{N}}^{-1}\left(\Delta\mathbf{G}-\mathbf{P}_a\Delta B_x\right)\right)_8 &= -(\chi+\frac{B_a^2}{\vartheta_a})\Delta u_x-\kappa u_{xa}\Delta\tilde{p}_\perp+\kappa u_{y_a}B_{xa}\Delta B_y+\kappa u_{za}B_{xa}\Delta B_z \\ &\quad +(\Theta-\frac{\mathbf{B}_a}{\vartheta_g})\cdot(-B_{xa}\Delta\mathbf{u})+\kappa\left(\Delta(\tilde{p}u_x)-B_{xa}\Delta(\mathbf{B}\cdot\mathbf{u})\right), \\ &= -(\chi+\frac{\mathbf{B}_a^2}{\vartheta_a})\Delta u_x-\kappa u_{xa}\Delta\tilde{p}+\kappa B_{xa}\mathbf{u}_a\cdot\Delta\mathbf{B} \\ &\quad -B_{xa}(\Theta-\frac{\mathbf{B}_a}{\vartheta_a})\cdot\Delta\mathbf{u}+\kappa u_{xa}\Delta\tilde{p}+\kappa\tilde{p}_a\Delta u_x-B_{xa}\Delta(\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}), \\ &= -(\chi+\frac{\mathbf{B}_a^2}{\vartheta_a}-\kappa\tilde{p}_a)\Delta u_x-B_{xa}(\Theta-\frac{\mathbf{B}_a}{\vartheta_a}+\kappa\mathbf{B}_a)\cdot\Delta\mathbf{u}.\end{aligned}$$

Par suite, il suffit de montrer que

$$-(\chi+\frac{\mathbf{B}_a^2}{\vartheta_a}-\kappa\tilde{p}_a)\Delta u_x-B_{xa}(\Theta-\frac{\mathbf{B}_a}{\vartheta_a}+\kappa\mathbf{B}_a)\cdot\Delta\mathbf{u}=\overline{C}^2\Delta u_x,$$

ce qui provient des deux dernières relations de (4.49).
Pour terminer, (C1) est obtenu en considérant le déterminant du système (4.49) et (C2) en évaluant κ à partir de (4.49).

◇

Maintenant, on est en mesure de donner la preuve de la proposition 39.
Tout d'abord, supposons que $\overline{\vartheta}=\vartheta_a$. Alors, grâce à la proposition 40, si (C1) et (C2) sont satisfaites, le solveur (4.47) est un solveur de type Roe, et (4.48) est vrai. Si (C1), (C2) ne sont pas vérifiées, on note que chaque membre de (4.48) est continu par rapport à $\mathbf{V}_g$, $\mathbf{V}_d$, et on utilise alors un argument de continuité.
Si $\overline{\vartheta}\neq\vartheta_a$, on considère les états $\mathbf{V}'_m$ données par ${}^t\mathbf{Q}(\mathbf{V}'_m)=(\overline{\vartheta},\mathbf{u}_m,\mathbf{B}_m,p_m)$ pour $m=g,d$. Puisque $\overline{\vartheta}=(\vartheta(\mathbf{V}'_g)+\vartheta(\mathbf{V}'_d))/2$, (4.48) est vrai pour les états $\mathbf{V}'_g$, $\mathbf{V}'_d$. De plus, on a

$$\left(\Delta\mathbf{G}-\mathbf{P}_a\Delta B_x\right)(\mathbf{V}_g,\mathbf{V}_d)=\left(\Delta\mathbf{G}-\mathbf{P}_a\Delta B_x\right)(\mathbf{V}'_g,\mathbf{V}'_d).$$

Ceci termine la preuve.

◇

Positivité

On étudie dans ce paragraphe la positivité de la famille de schémas développés plus haut. On a le résultat suivant :

Proposition 41.
Si $\overline{\vartheta} \leq min(\vartheta_g, \vartheta_d)$, le solveur de Riemann (4.47) induit un schéma de type Godunov positif pour une vitesse du son $\overline{C}$ suffisamment grande.

◇

Définissons pour $\overline{\vartheta}$ fixé, le petit paramètre $\mu = 1/\overline{C}$. La démonstration du résultat précédent s'appuie sur l'étude du comportement asymptotique des quantités Φ_x^ν et $\mathbf{R}_x^\nu$ en fonction de μ. En particulier, il est facile de montrer que ces fonctions sont prolongeables par continuité en $\mu = 0$. La proposition 41 se déduit des lemmes suivants :

Lemme 3. *On a les comportements asymptotiques suivants :*

$$\begin{array}{lll} \lim\limits_{\mu\to 0} \dfrac{c_f}{c} = 1 & , & \lim\limits_{\mu\to 0} c_s = c_a = |b_x|, \\ \lim\limits_{\mu\to 0} \alpha_f = 1 & , & \lim\limits_{\mu\to 0} \alpha_s = 0. \end{array}$$

◇

Lemme 4.
Posons $\mathbf{X}^\pm = \dfrac{1}{2}(\Delta\mathbf{u}_\perp \mp S\overline{\vartheta}^{1/2}\Delta\mathbf{B}_\perp)$ et $\delta\mathbf{V}_x^\pm = \mp\Phi_x^\pm\mathbf{R}_x^\pm$ pour $x = f, al, s$.
On a les comportements asymptotiques suivants :

$$\lim_{\mu\to 0} \phi_f^\pm = \pm\frac{\Delta u_x}{2} \quad , \quad \lim_{\mu\to 0} \mathbf{R}_f^\pm = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{xa} \end{pmatrix},$$

$$\lim_{\mu\to 0} \delta\mathbf{V}_f^\pm = \mp\frac{\Delta u_x}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{xa} \end{pmatrix}.$$

$$\forall \mu, \quad \phi_{al}^{\pm} = \phi_{al}^{\pm}(0) = \pm \mathbf{X}^{\pm} \cdot \beta^{\perp} \quad , \quad \mathbf{R}_{al}^{\pm}(\mu) = \mathbf{R}_{al}^{\pm}(0) = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta^{\perp} \\ 0 \\ \mp S\overline{\vartheta}^{1/2}\beta^{\perp} \\ \mathbf{u}_{\perp a} \cdot \beta^{\perp} \end{pmatrix},$$

$$\forall \mu, \quad \delta \mathbf{V}_{al}^{\pm}(0) = \mp \left(\mathbf{X}^{\pm} \cdot \beta^{\perp} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta^{\perp} \\ 0 \\ \mp S\overline{\vartheta}^{1/2}\beta^{\perp} \\ \mathbf{u}_{\perp a} \cdot \beta^{\perp} \end{pmatrix}.$$

$$\lim_{\mu \to 0} \phi_s^{\pm} = \pm S \mathbf{X}^{\pm} \cdot \beta \quad , \quad \lim_{\mu \to 0} \mathbf{R}_s^{\pm} = \pm S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \\ 0 \\ \mp S\overline{\vartheta}^{1/2}\beta \\ (\mathbf{u}_{\perp a} \mp S\overline{\vartheta}^{1/2}\mathbf{B}_{\perp a}) \cdot \beta \end{pmatrix},$$

$$\lim_{\mu \to 0} \delta \mathbf{V}_s^{\pm} = \mp \left(\mathbf{X}^{\pm} \cdot \beta \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \\ 0 \\ \mp S\overline{\vartheta}^{1/2}\beta \\ (\mathbf{u}_{\perp a} \mp S\overline{\vartheta}^{1/2}\mathbf{B}_{\perp a}) \cdot \beta \end{pmatrix}.$$

$\diamond$

Définissons le vecteur $\tilde{\mathbf{Q}} = {}^t(\vartheta, u, v, w, B_x, B_y, B_z, \varepsilon)$ et posons $\mathbf{X}^- = \mathbf{X}_g$, $\mathbf{X}^+ = \mathbf{X}_d$. Le lemme précédent permet d'obtenir les états intermédiaires limites donnés ci-dessous :

Lemme 5.
Les états intermédiaires asymptotiques du solveur de Riemann sont définis pour $\alpha = g, d$ par :

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{\alpha,f}(0) = \begin{pmatrix} \vartheta_\alpha \\ u_{xa} \\ \mathbf{u}_{\perp\alpha} \\ \mathbf{B}_\alpha \\ \varepsilon_\alpha + \dfrac{(\Delta u_x)^2}{8} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{\alpha,al}(0) = \begin{pmatrix} \vartheta_\alpha \\ u_{xa} \\ \mathbf{V}_{\perp\alpha} + (\beta^\perp \cdot \mathbf{X}_\alpha)\beta^\perp \\ \mathbf{B}_{\perp\alpha} + \dfrac{S\overline{\vartheta}^{1/2}}{\vartheta_\alpha}(\beta^\perp \cdot \mathbf{X}_\alpha)\beta^\perp \\ \varepsilon_\alpha + \dfrac{(\Delta u_x)^2}{8} + \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{\overline{\vartheta}}{\vartheta_\alpha})(\beta^\perp \cdot \mathbf{X}_\alpha)^2 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{\alpha,s}(0) = \begin{pmatrix} \vartheta_\alpha \\ u_{xa} \\ \mathbf{V}_{\perp\alpha} + \mathbf{X}_\alpha \\ \mathbf{B}_{\perp\alpha} + \dfrac{S\overline{\vartheta}^{1/2}}{\vartheta_\alpha}\mathbf{X}_\alpha \\ \varepsilon_\alpha + \dfrac{(\Delta u_x)^2}{8} + \dfrac{\mathbf{X}_\alpha^2}{2}(1 - \dfrac{\overline{\vartheta}}{\vartheta_\alpha}) \end{pmatrix}.$$

$\diamond$

Entropie

On s'intéresse maintenant au caractère entropique du schéma. Nous avons vu plus haut que le système de Powell lagrangien possède un couple entropie flux $(s, 0)$ et on recherchera des solutions vérifiant l'inégalité (4.33). Puisque le flux d'entropie est nul, il faut vérifier l'inégalité suivante :

$$-C_f(s_{g,f}-s_g)-C_{al}(s_{g,al}-s_{g,f})-C_s(s_{g,s}-s_{g,al})+C_s(s_{d,al}-s_{d,s})+C_{al}(s_{d,f}-s_{d,al})+C_f(s_d-s_{d,f}) \geq 0.$$

En fait, on a le résultat plus précis ci-dessous :

Proposition 42.
Pour $\overline{\vartheta} \leq min(\vartheta_g, \vartheta_d)$, le solveur de Riemann (4.47) induit un schéma de type Godunov entropique pour une vitesse du son $\overline{C}$ suffisamment grande. On a les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{c} -C_f(s_{g,f} - s_g) - C_{al}(s_{g,al} - s_{g,f}) - C_s(s_{g,s} - s_{g,al}) \geq 0, \\ C_s(s_{d,al} - s_{d,s}) + C_{al}(s_{d,f} - s_{d,al}) + C_f(s_d - s_{d,f}) \geq 0. \end{array} \tag{4.50}$$

Idée de preuve :
La démonstration de ce résultat est longue et fastidieuse et on n'en donnera qu'une simple idée. Considérons uniquement la première inégalité de (4.50) et réécrivons la sous la forme suivante :

$$s_g - s_{g,f} - \frac{C_{al}}{C_f}(s_{g,al} - s_{g,f}) - \frac{C_s}{C_f}(s_{g,s} - s_{g,al}) \geq 0. \tag{4.51}$$

Supposons tout d'abors que $\Delta u_x \neq 0$. D'après le lemme 5, on a :

$$\lim_{\mu\to 0} \vartheta_{g,f} = \vartheta_g \quad , \quad \lim_{\mu\to 0} \varepsilon_{g,f} = \varepsilon_g + \frac{(\Delta u_x)^2}{8},$$

et donc $\lim_{\mu\to 0} s_g > s_{g,f}$.
D'autre part, d'après le lemme 3, on a :

$$\lim_{\mu\to 0}\frac{C_{al}}{C_f}=0 \quad , \quad \lim_{\mu\to 0}\frac{C_s}{C_f}=0,$$

et puisque les états intermédiaires ont des limites finies, l'inégalité (4.51) est vraie.
Si maintenant $\Delta u_x = 0$, la preuve est plus délicate, et il est alors nécessaire d'effectuer des développements de Taylor en fonction de μ de tous les termes présents dans (4.51), et ceci jusqu'à l'ordre 4. On ne développera pas ici ces calculs.

◇

Le résultat précédent a pour conséquence le corollaire suivant :
Corollaire 5.
Supposons $\overline{\vartheta} \leq min(\vartheta_g, \vartheta_d)$. Alors, pour $\overline{C}$ assez grand, le schéma induit par le solveur (4.47) est entropique au sens classique avec un flux d'entropie numérique nul, i.e.,

$$s(\mathbf{V}_i^{n+1}) \leq s(\mathbf{V}_i^n) \qquad pour \quad 2C_f\Delta\tau \leq \Delta m.$$

Preuve :
On introduit les états suivants :

$$\mathbf{V}^- = \frac{2}{\Delta m}\int_{-\Delta m/2}^{0} \mathbf{W}(m/\tau;\mathbf{V}_g,\mathbf{V}_d)dm \quad , \quad \mathbf{V}^+ = \frac{2}{\Delta x}\int_{0}^{\Delta m/2} \mathbf{W}(m/\tau;\mathbf{V}_g,\mathbf{V}_d)dx$$

On a :

$$\begin{aligned}\mathbf{V}^- &= \frac{2}{\Delta m}\left(\int_{-\Delta m/2}^{-C_f\tau}\mathbf{W}dm+\int_{-C_f\tau}^{-C_{al}\tau}\mathbf{W}dm+\int_{-C_{al}\tau}^{-C_s\tau}\mathbf{W}dm+\int_{-C_s\tau}^{0}\mathbf{W}dm\right),\\ &= \frac{2}{\Delta m}\left((-C_f\tau+\frac{\Delta m}{2})\mathbf{V}_g+(-C_{al}\tau+C_f\tau)\mathbf{V}_{g,f}+(-C_s\tau+C_{al}\tau)\mathbf{V}_{g,al}+C_s\tau\mathbf{V}_{g,s}\right).\end{aligned}$$

Par convexité de l'entropie, on obtient :

$$\begin{aligned}s(\mathbf{V}^-) &\leq \frac{2}{\Delta m}\left((-C_f\tau+\frac{\Delta m}{2})s_g+(-C_{al}\tau+C_f\tau)s_{g,f}+(-C_s\tau+C_{al}\tau)s_{g,al}+C_s\tau s_{g,s}\right),\\ &\leq s_g+\frac{2\tau}{\Delta m}\left(C_f(s_{g,f}-s_g)+C_{al}(s_{g,al}-s_{g,f})+C_s(s_{g,s}-s_{g,al})\right),\\ &\leq s_g \text{ , d'après (4.50).}\end{aligned}$$

De la même manière, on obtient $s(\mathbf{V}^+) \leq s_d$.
On en déduit finalement :

$$\begin{aligned}s(\mathbf{V}_i^{n+1}) &= s\left(\frac{1}{2}((\mathbf{V}^+)_{i-1/2}^n+(\mathbf{V}^-)_{i+1/2}^n)\right),\\ &\leq \frac{1}{2}\left(s((\mathbf{V}^+)_{i-1/2}^n)+s((\mathbf{V}^-)_{i+1/2}^n)\right),\\ &\leq \frac{1}{2}\left(s(\mathbf{V}_i^n)+s(\mathbf{V}_i^n)\right),\\ &\leq s(\mathbf{V}_i^n),\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

◇

Construction de solveurs eulériens

Puisque les états intermédiaires sont positifs pour $\overline{C}$ assez grand, la propriété (H2) est vérifiée. De plus, les propriétés (H1) et (H3) sont satisfaites par construction. On a donc le résultat :

Proposition 43.
Pour $\overline{\vartheta} \leq min(\vartheta_g, \vartheta_d)$, le solveur de Riemann (4.47) induit un solveur eulrien positif et entropique pour $\overline{C}$ assez grand.

4.4.4 Solveur de type HLL

On a vu au paragraphe précédent que le solveur (4.47) possède les propriétés importantes de positivité et d'entropie. En contre-partie, il est d'une relative complexité puisqu'il possède six états imtermédiaires et peut s'avérer coûteux dans la mesure où les conditions de positivité et d'entropie ne sont pas explicites et ne peuvent être obtenues que numériquement. Il est donc souhaitable de disposer d'un solveur moins complexe et moins coûteux. Le candidat le plus simple possible est un solveur à un seul état intermédiaire de type HLL, donné par :

$$\mathbf{W}(x/t) = \begin{cases} \mathbf{V}_g & \text{si } m/\tau \leq -C_g, \\ \mathbf{V}_* & \text{si } -C_g < m/\tau \leq C_d, \\ \mathbf{V}_d & \text{si } C_d < m/\tau. \end{cases} \tag{4.52}$$

avec $\mathbf{V}_*$ donné par la relation de consistance :

$$\mathbf{V}_* = \frac{C_d\mathbf{V}_d + C_g\mathbf{V}_g}{C_d + +C_g} - \frac{\Delta\mathbf{G} - \overline{\mathbf{P}}\Delta B_x}{C_d + C_g}. \tag{4.53}$$

Ici les quantités C_g et C_d sont choisies positives puisque le système possède des valeurs propres nulles.
On a le résultat suivant :

Proposition 44.
Le solveur de Riemann (4.52, 4.53) est positif et entropique pour C assez grand.

Preuve :
On a $\mathbf{V}_* = \dfrac{C_d\mathbf{V}_d + C_g\mathbf{V}_g}{C_d + C_g} + O\left(\dfrac{1}{C_d + C_g}\right)$ et par suite, $s_* = s\left(\dfrac{C_d\mathbf{V}_d + C_g\mathbf{V}_g}{C_d + C_g}\right) + O\left(\dfrac{1}{C_d + C_g}\right)$.
Si $\mathbf{V}_g \neq \mathbf{V}_d$, puisque s est strictement convexe, on a $s\left(\dfrac{C_d\mathbf{V}_d + C_g\mathbf{V}_g}{C_d + C_g}\right) < \dfrac{C_d s_d + C_g s_g}{C_d + C_g}$, et donc pour C_g et C_d assez grands, on a aussi $s_* < \dfrac{C_d s_d + C_g s_g}{C_d + C_g}$, ce qui est exactement l'inégalité d'entropie discrte.
Si $\mathbf{V}_g = \mathbf{V}_d$, on a $s_* = \dfrac{C_d s_d + C_g s_g}{C_d + C_g}$, ce qui achève la dmonstration.

◇

4.4.5 Solveurs simples à deux états intermédiaires

On vient de voir qu'il est facile de construire un solveur de type HLL entropique pour le système de Powell lagrangien. Malheureusement, il est bien connu que le schéma HLL a

l'inconvénient d'être trop dissipatif. En particulier, il ne préserve pas les discontinuités de contact. En outre, il ne satisfait pas non plus la propriété (H1).
Nous chercherons à développer dans ce paragraphe un solveur simple à deux états intermédiaires $\mathbf{V}_g^*$ et $\mathbf{V}_d^*$, préservant les discontinuités de contact et satisfaisant les propriétés (H1), (H2) et (H3).
Il existe en outre une autre proprité intéressante à satisfaire et qui n'est vérifiée ni par le solveur à 6 états (4.47), ni par le solveur de type HLL (4.52, 4.53). Il s'agit de la compatibilité avec l'équation (4.34) que nous rappelons ici,

$$\partial_\tau B_x = 0.$$

Un schéma bas sur un tel solveur devra donc vérifier pour tout i et tout n, $(B_x)_i^{n+1} = (B_x)_i^n$.
On s'attachera donc à satisfaire cette compatibilité.
On commence maintenant la construction d'un tel schéma. Supposons pour simplifier que les pentes des discontinuités soient données par $-C, 0, +C$ avec C positif. Puisque le solveur simple est de type Godunov, on doit chercher $\mathbf{V}_g^*$, $\mathbf{V}_d^*$ et $\overline{\mathbf{P}}$ tels que :

$$-C(\mathbf{V}_g^* - \mathbf{V}_g) + C(\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_d^*) = \Delta\mathbf{G} - -\overline{\mathbf{P}}\Delta B_x,$$

soit encore :

$$\mathbf{V}_g^* + \mathbf{V}_d^* = \mathbf{V}_g + \mathbf{V}_d - \frac{\Delta\mathbf{G} - \overline{\mathbf{P}}\Delta B_x}{C}. \tag{4.54}$$

Puisque (H1) doit être satisfaite, on doit avoir :

$$(u_x)_g^* - C\vartheta_g^* = (u_x)_g - C\vartheta_g, \tag{4.55}$$
$$(u_x)_d^* + C\vartheta_d^* = (u_x)_d + C\vartheta_d, \tag{4.56}$$
$$(u_x)_g^* = (u_x)_d^*. \tag{4.57}$$

Considérons la deuxième équation de (4.54). Elle s'écrit :

$$(u_x)_g^* + (u_x)_d^* = (u_x)_g + (u_x)_d - \frac{\Delta(\tilde{p} - B_x^2) + \overline{B}_x\Delta B_x}{C}.$$

Effectuons alors le choix naturel suivant :

$$\overline{B}_x = (B_x)_a. \tag{4.58}$$

Avec ce choix, on obtient :

$$(u_x)_g^* + (u_x)_d^* = (u_x)_g + (u_x)_d - \frac{\Delta\tilde{p}_\perp}{C}. \tag{4.59}$$

En considérant alors la première relation de (4.54) ainsi que les égalités (4.55, 4.56, 4.59), on obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \vartheta_g^* + \vartheta_d^* & = & \vartheta_g + \vartheta_d + \dfrac{\Delta u_x}{C}, \\ (u_x)_g^* + (u_x)_d^* & = & (u_x)_g + (u_x)_d - \dfrac{\Delta\tilde{p}_\perp}{C}, \\ (u_x)_g^* - C\vartheta_g^* & = & (u_x)_g - C\vartheta_g, \\ (u_x)_d^* + C\vartheta_d^* & = & (u_x)_d + C\vartheta_d. \end{array}\right. \tag{4.60}$$

Ce système est inversible et a pour solutions :

$$\begin{aligned}
\vartheta_g^* &= \vartheta_g + \frac{1}{2C}\left(\Delta u_x - \frac{\Delta \tilde{p}_\perp}{C}\right),\\
\vartheta_d^* &= \vartheta_d + \frac{1}{2C}(\Delta u_x + \frac{\Delta \tilde{p}_\perp}{C}),\\
(u_x)_g^* &= (u_x)_d^* = u_x^* = 1/2((u_x)_g + (u_x)_d - \frac{\Delta \tilde{p}_\perp}{C}).
\end{aligned} \tag{4.61}$$

On constate alors que la relation (4.57) est vérifiée automatiquement. Par conséquent avec les choix (4.58) et (4.61), la condition (H1) est satisfaite.
Afin de fermer le système, on impose maintenant des relations qui sont vraies au niveau d'une discontinuité de contact, à savoir :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}_\perp)_g^* = (\mathbf{u}_\perp)_d^* = \mathbf{u}_\perp^*,\\
(\mathbf{B}_\perp)_g^* = (\mathbf{B}_\perp)_d^* = \mathbf{B}_\perp^*.
\end{aligned}$$

En injectant celles-ci dans (4.54) on détermine alors $\mathbf{u}_\perp^*$ et $\mathbf{B}_\perp^*$ facilement, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_\perp^* &= (\mathbf{u}_\perp)_a + \frac{\Delta(B_x\mathbf{B}_\perp) - \overline{\mathbf{B}}_\perp \Delta B_x}{2C},\\
(\vartheta_g^* + \vartheta_d^*)\mathbf{B}_\perp^* &= \vartheta_g(\mathbf{B}_\perp)_g + \vartheta_d(\mathbf{B}_\perp)_d + \frac{\Delta(B_x\mathbf{u}_\perp) - \overline{\mathbf{u}}_\perp \Delta B_x}{C}.
\end{aligned} \tag{4.62}$$

D'autre part, afin de satisfaire pour tout i et tout n, $(B_x)_i^{n+1} = (B_x)_i^n$, on impose les relations $(B_x)_g^* = (B_x)_g$ et $(B_x)_d^* = (B_x)_d$. En injectant ces égalités dans (4.54), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\vartheta_g^*(B_x)_g + \vartheta_d^*(B_x)_d = \vartheta_g(B_x)_g + \vartheta_d(B_x)_d + \frac{\Delta(B_x u_x) - \overline{u}_x \Delta B_x}{C},\\
\iff &C(B_x)_g(\vartheta_g^* - \vartheta_g) + C(B_x)_d(\vartheta_d^* - \vartheta_d) = \Delta(B_x u_x) - \overline{u}_x \Delta B_x,\\
\iff &(B_x)_g(u_x^* - (u_x)_g) + (B_x)_d((u_x)_d - u_x^*) = \Delta(B_x u_x) - \overline{u}_x \Delta B_x, \text{ d'après (4.55, 4.56)}\\
\iff &-u_x^* \Delta B_x = -\overline{u}_x \Delta B_x,
\end{aligned}$$

ce qui nous conduit à imposer :

$$\overline{u}_x = u_x^*. \tag{4.63}$$

Il nous reste maintenant à utiliser la dernière relation de (4.54), soit :

$$\tilde{E}_g^* + \tilde{E}_d^* = \tilde{E}_g + \tilde{E}_d - \frac{\Delta(\tilde{p}u_x - B_x\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}) + \overline{\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}}\Delta B_x}{C}. \tag{4.64}$$

A ce stade, on remarque que l'équation (4.34) sur B_x induit l'équation suivante sur $\tilde{E}_\perp$,

$$\partial_\tau \tilde{E}_\perp + \partial_m(\tilde{p}_\perp u_x - B_x\mathbf{B}_\perp\cdot\mathbf{u}_\perp) = -\mathbf{B}_\perp\cdot\mathbf{u}_\perp\partial_m B_x,$$

et on impose alors que le schéma soit aussi compatible avec cette dernière équation, soit :

$$(\tilde{E}_\perp)_g^* + (\tilde{E}_\perp)_d^* = (\tilde{E}_\perp)_g + (\tilde{E}_\perp)_d - \frac{\Delta(\tilde{p}_\perp u_x - B_x\mathbf{B}_\perp\cdot\mathbf{u}_\perp) + \overline{\mathbf{B}_\perp\cdot\mathbf{u}_\perp}\Delta B_x}{C}. \tag{4.65}$$

On suppose maintenant que $\overline{\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}}$ est de la forme $\overline{\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{B}_\perp\cdot\mathbf{u}_\perp} + \overline{B_x u_x}$.
Puisque $\tilde{E}^*_{g,d} = (\tilde{E}_\perp)^*_{g,d} + \dfrac{(B_x)^2_{g,d}\vartheta^*_{g,d}}{2}$, on tire de (4.64, 4.65) que l'on doit avoir :

$$\begin{aligned}
\frac{(B_x)^2_g\vartheta^*_g}{2} + \frac{(B_x)^2_d\vartheta^*_d}{2} &= \frac{(B_x)^2_g\vartheta_g}{2} + \frac{(B_x)^2_d\vartheta_d}{2} - \frac{\Delta(\frac{B_x^2}{2}u_x - B_xB_xu_x) + \overline{B_xu_x}\Delta B_x}{C},\\
\iff \frac{(B_x)^2_g}{2}(\vartheta^*_g - \vartheta_g) + \frac{(B_x)^2_d}{2}(\vartheta^*_d - \vartheta_d) &= \frac{\Delta(\frac{B_x^2}{2}u_x) - \overline{B_xu_x}\Delta B_x}{C},\\
\iff \frac{(B_x)^2_g}{2}(u^*_x - (u_x)_g) + \frac{(B_x)^2_d}{2}((u_x)_d - u^*_x) &= \Delta(\frac{B_x^2}{2}u_x) - \overline{B_xu_x}\Delta B_x,\\
\iff -u^*_x\Delta\frac{B_x^2}{2} &= -\overline{B_xu_x}\Delta B_x,
\end{aligned} \tag{4.66}$$

ce qui impose la relation,

$$\overline{B_xu_x} = u^*_x(B_x)_a. \tag{4.67}$$

On a donc défini les quantités $\overline{u_x}$, $\overline{B_x}$ et $\overline{B_xu_x}$. On pourrait laisser indéterminées les quantités $\overline{\mathbf{u}_\perp}$, $\overline{\mathbf{B}_\perp}$ et $\overline{\mathbf{B}_\perp\cdot\mathbf{u}_\perp}$, mais en pratique on prendra :

$$\overline{\mathbf{u}_\perp} = (\mathbf{u}_\perp)_a, \overline{\mathbf{B}_\perp} = (\mathbf{B}_\perp)_a, \overline{\mathbf{B}_\perp\cdot\mathbf{u}_\perp} = (\mathbf{B}_\perp\cdot\mathbf{u}_\perp)_a. \tag{4.68}$$

Il reste maintenant à déterminer les énergies internes intermédiaires. Par analogie avec le cas conservatif [GAL2], on fait le choix suivant :

$$\begin{aligned}
\varepsilon^*_g &= \varepsilon_g + \frac{(u_x)^2_g}{2} - \frac{(u^*_x)^2}{2} + \frac{1}{2C^2}(\Delta p - C\Delta u_x)(p_a - (u_x)_aC)\\
&+ \frac{1}{4}((\mathbf{u}_\perp)^2_g + (\mathbf{u}_\perp)^2_d - 2(\mathbf{u}^*_\perp)^2) + \frac{1}{4}(\vartheta_g(\mathbf{B}_\perp)^2_g + \vartheta_d(\mathbf{B}_\perp)^2_d - (\vartheta^*_g + \vartheta^*_d)(\mathbf{B}^*_\perp)^2)\\
&- \frac{1}{2C}\left(\Delta(\frac{\mathbf{B}^2_\perp}{2}u_x - B_x\mathbf{B}_\perp\cdot\mathbf{u}_\perp) + \overline{\mathbf{B}_\perp\cdot\mathbf{u}_\perp}\Delta B_x\right),\\
\varepsilon^*_d &= \varepsilon_d + \frac{(u_x)^2_d}{2} - \frac{(u^*_x)^2}{2} - \frac{1}{2C^2}(\Delta p + C\Delta u_x)(p_a + (u_x)_aC)\\
&+ \frac{1}{4}((\mathbf{u}_\perp)^2_g + (\mathbf{u}_\perp)^2_d - 2(\mathbf{u}^*_\perp)^2) + \frac{1}{4}(\vartheta_g(\mathbf{B}_\perp)^2_g + \vartheta_d(\mathbf{B}_\perp)^2_d - (\vartheta^*_g + \vartheta^*_d)(\mathbf{B}^*_\perp)^2)\\
&- \frac{1}{2C}\left(\Delta(\frac{\mathbf{B}^2_\perp}{2}u_x - B_x\mathbf{B}_\perp\cdot\mathbf{u}_\perp) + \overline{\mathbf{B}_\perp\cdot\mathbf{u}_\perp}\Delta B_x\right).
\end{aligned} \tag{4.69}$$

On a alors le résultat :

Proposition 45.
Le solveur de Riemann simple lagrangien induit par (4.58, 4.61, 4.62, 4.63, 4.67, 4.68, 4.69) est positif et entropique pour C assez grand et préserve les discontinuités de contact. Il induit un schéma eulérien positif et entropique pour C assez grand et préservant les discontinuités de contact.

Preuve :
Les 7 premières équations de (4.54) sont vraies par construction. Il reste à vérifier la dernière.

Or, en utilisant (4.69), on obtient :

$$\begin{array}{lcl}
\varepsilon_g^* + \varepsilon_d^* & = & \varepsilon_g + \varepsilon_d - \dfrac{\Delta(pu_x)}{C} \\
& + & \dfrac{1}{2}((\mathbf{u})_g^2 + (\mathbf{u})_d^2 - 2(\mathbf{u}^*)^2) + \dfrac{1}{2}(\vartheta_g(\mathbf{B}_\perp)_g^2 + \vartheta_d(\mathbf{B}_\perp)_d^2 - (\vartheta_g^* + \vartheta_d^*)(\mathbf{B}_\perp^*)^2) \\
& - & \dfrac{1}{C}\left(\Delta(\dfrac{\mathbf{B}_\perp^2}{2}u_x - B_x\mathbf{B}_\perp\cdot\mathbf{u}_\perp) + \overline{\mathbf{B}_\perp\cdot\mathbf{u}_\perp}\Delta B_x\right), \\
& = & \varepsilon_g + \varepsilon_d \\
& + & \dfrac{1}{2}((\mathbf{u})_g^2 + (\mathbf{u})_d^2 - 2(\mathbf{u}^*)^2) + \dfrac{1}{2}(\vartheta_g(\mathbf{B}_\perp)_g^2 + \vartheta_d(\mathbf{B}_\perp)_d^2 - (\vartheta_g^* + \vartheta_d^*)(\mathbf{B}_\perp^*)^2) \\
& - & \dfrac{\Delta(\tilde{p}_\perp u_x - B_x\mathbf{B}_\perp\cdot\mathbf{u}_\perp) + \overline{\mathbf{B}_\perp\cdot\mathbf{u}_\perp}\Delta B_x}{C}, \\
& \Longleftrightarrow & \\
(\tilde{E}_\perp)_g^* + (\tilde{E}_\perp)_d^* & = & (\tilde{E}_\perp)_g + (\tilde{E}_\perp)_d - \dfrac{\Delta(\tilde{p}_\perp u_x - B_x\mathbf{B}_\perp\cdot\mathbf{u}_\perp) + \overline{\mathbf{B}_\perp\cdot\mathbf{u}_\perp}\Delta B_x}{C}.
\end{array}$$

Or, on a vu que la relation (4.67) entraîne (4.66), et puisque $(B_x)_{g,d}^* = (B_x)_{g,d}$, on en tire (4.64), et finalement la consistance.
Montrons maintenant la positivité. Notons tout d'abord :

$$(\mathbf{B}_\perp)_\infty^* = \lim_{C\to+\infty}\mathbf{B}_\perp = \frac{\vartheta_g(\mathbf{B}_\perp)_g + \vartheta_d(\mathbf{B}_\perp)_d}{\vartheta_g + \vartheta_d}.$$

On a alors, par exemple à gauche :

$$\begin{array}{lcl}
\lim_{C\to+\infty}\varepsilon_g^* & = & \varepsilon_g + \dfrac{(u_x)_g^2}{2} - \dfrac{((u_x)_a)^2}{2} + \dfrac{(u_x)_a\Delta u_x}{2} \\
& + & \dfrac{1}{4}((\mathbf{u}_\perp)_g^2 + (\mathbf{u}_\perp)_d^2 - 2(\mathbf{u}_\perp)_a^2) + \dfrac{1}{4}(\vartheta_g(\mathbf{B}_\perp)_g^2 + \vartheta_d(\mathbf{B}_\perp)_d^2 - (\vartheta_g + \vartheta_d)((\mathbf{B}_\perp)_\infty^*)^2), \\
& = & \varepsilon_g + \dfrac{(\Delta u_x)^2}{8} + \dfrac{(\Delta\mathbf{u}_\perp)^2}{8} + \dfrac{\vartheta_g\vartheta_d}{\vartheta_g+\vartheta_d}\dfrac{(\Delta(\mathbf{B}_\perp))^2}{4}, \\
& = & \varepsilon_g + \dfrac{(\Delta\mathbf{u})^2}{8} + \dfrac{\vartheta_g\vartheta_d}{\vartheta_g+\vartheta_d}\dfrac{(\Delta\mathbf{B}_\perp)^2}{4},
\end{array} \tag{4.70}$$

qui est positif pour C assez grand.
En ce qui concerne la condition d'entropie, il faut montrer, par exemple à gauche, que :

$$\varepsilon_g^*(\vartheta_g^*)^{\gamma-1} \geq \varepsilon_g\vartheta_g^{\gamma-1}. \tag{4.71}$$

Tout d'abord, supposons $\Delta\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ou $\Delta\mathbf{B}_\perp \neq \mathbf{0}$. Puisque $\lim_{C\to+\infty}\vartheta_g^* = \vartheta_g$, il est clair d'après (4.70) que (4.71) sera vrai pour C assez grand.
Si maintenant $\Delta\mathbf{u} = \mathbf{0}$ et $\Delta\mathbf{B}_\perp = \mathbf{0}$, posons :

$$\begin{array}{c}
\mathbf{u}_g = \mathbf{u}_d = \mathbf{u}, \quad (u_x)_g = (u_x)_d = u_x, \\
(\mathbf{B}_\perp)_g = (\mathbf{B}_\perp)_d = \mathbf{B}_\perp.
\end{array}$$

On a alors $(\mathbf{B}_\perp)^*_\infty = \mathbf{B}_\perp$, $\mathbf{u}^*_\perp = \mathbf{u}_\perp$, $\vartheta^*_g + \vartheta^*_d = \vartheta_g + \vartheta_d$, et aussi

$$\vartheta^*_g = \vartheta_g - \frac{\Delta p}{2C^2}, u^*_x = u_x - \frac{\Delta p}{2C}.$$

Par suite, en posant $\sigma_g = 4p_a - \Delta p$, on obtient

$$\begin{aligned}
\varepsilon^*_g &= \varepsilon_g + \frac{u_x^2}{2} - \frac{(u^*_x)^2}{2} + \frac{1}{2C^2}\Delta p(p_a - u_x C),\\
&= \varepsilon_g + \frac{u_x^2}{2} - \frac{1}{2}(u_x - \frac{\Delta p}{2C})^2 + \frac{1}{2C^2}\Delta p(p_a - u_x C),\\
&= \varepsilon_g + \frac{1}{2}(u_x^2 - (u_x^2 - \frac{\Delta p}{C}u_x + \frac{(\Delta p)^2}{4C^2}) + \frac{1}{2C^2}\Delta p(p_a - u_x C),\\
&= \varepsilon_g - \frac{(\Delta p)^2}{8C^2} + \frac{p_a \Delta p}{2C^2},\\
&= \varepsilon_g + \frac{\sigma_g}{8C^2}\Delta p,
\end{aligned}$$

ce qui permet d'exprimer le produit $\varepsilon^*_g(\vartheta^*_g)^{\gamma-1}$. On a finalement l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon^*_g}{\varepsilon_g}(\frac{\vartheta^*_g}{\vartheta_g})^{\gamma-1} &= (1 + \frac{\sigma_g}{8\varepsilon_g C^2}\Delta p)(1 - \frac{\Delta p}{2\vartheta_g C^2})^{\gamma-1},\\
&= 1 + \frac{\sigma_g}{8\varepsilon_g C^2}\Delta p - \frac{\gamma - 1}{2\vartheta_g C^2}\Delta p + O(1/C^4),\\
&= 1 + \frac{\Delta p}{8\varepsilon_g C^2}(\sigma_g - \frac{4(\gamma-1)\varepsilon_g}{\vartheta_g}) + O(1/C^4),\\
&= 1 + \frac{\Delta p}{8\varepsilon_g C^2}(4p_a - \Delta p - 4p_g) + O(1/C^4),\\
&= 1 + \frac{(\Delta p)^2}{8\varepsilon_g C^2} + O(1/C^4),
\end{aligned}$$

d'où l'on tire le résultat cherché.

◇

Remarque 7.
Par souci de simplicité, on a choisi ici d'avoir des discontinuités de pentes opposées. En pratique, tous les résultats précédents sont vrais avec des discontinuités de pentes $-C_-, 0, +C_+$.

◇

4.4.6 Applications numériques

Le premier exemple numérique traité est l'extension au cas où B_x est discontinu du cas-test de Brio et Wu [B-W]. Cet exemple est bien connu et est lui-même l'extension pour la MHD à 7 équations du problème du tube à choc de Sod [SOD]. C'est un problème en coordonnées

eulériennes. Si B_x est constant, il est donné par

$$\text{Problème I,} \qquad \begin{pmatrix} \rho_g = 1 \\ \mathbf{u}_g = 0 \\ p_g = 1 \\ (B_x)_g = .75 \\ (B_y)_g = 1 \\ (B_y)_g = 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \rho_d = .125 \\ \mathbf{u}_d = 0 \\ p_d = .1 \\ (B_x)_d = .75 \\ (B_y)_d = -1 \\ (B_y)_d = 0 \end{pmatrix},$$

et si B_x est discontinu par

$$\text{Problème II,} \qquad \begin{pmatrix} \rho_g = 1 \\ \mathbf{u}_g = 0 \\ p_g = 1 \\ (B_x)_g = .5 \\ (B_y)_g = 1 \\ (B_y)_g = 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \rho_d = .125 \\ \mathbf{u}_d = 0 \\ p_d = .1 \\ (B_x)_d = .75 \\ (B_y)_d = -1 \\ (B_y)_d = 0 \end{pmatrix}.$$

Le domaine de calcul est l'intervalle $[0, 800]$ et les simulations sont données au temps $t = 80$.
Sur les figures 4.1, 4.2, 4.3 sont données les solutions fournies sur un maillage fin de 1600 mailles pour le modèle MHD à 7 équations (Problème I), le modèle MHD à 8 équations sans terme source (Problème II) et le modèle de Powell (Problème II). Sur la figure 4.1, on reconnaît les cinq types d'ondes. Il y a deux détentes magnéto-acoustiques rapides, un choc lent à droite et une onde composée magnéto-acoustique lente à gauche, i.e. une discontinuité juxtaposée à une détente. La cinquième onde, visible uniquement sur les densités est une discontinuité de contact. Sur la figure 4.2, on montre le résultat fourni pour le modèle MHD à 8 équations sans terme source pour le problme II. On note les importantes perturbations par rapport à la solution du problème I. En particulier, il se produit une résonance entre l'onde stationnaire de vitesse nulle présente dans ce modèle, et l'onde composée lente. Sur la figure 4.3 est représente la solution du système de Powell pour le problème II. On note que la strucure de la solution du problème I est totalement préservée et cette fois la composante B_x est simplement convectée. Ceci permet d'illustrer le comportement des solutions du système de Powell, dont on espère justement que les zones à divergence non nulles sont transportées vers les frontières du domaine.
Le problème II n'est pas un cas difficile à traiter et le schéma de type Roe (ou encore Roe-Powell) décrit au paragraphe 4.2.7 est très précis pour celui-ci. Sur la figure 4.4, on a superposé les solutions fournies par le schéma de Roe-Powell et le schéma eulérien induit par le solveur à 4 états du paragraphe 4.4.5. Contrairement à l'habitude selon laquelle on utilise 800 mailles pour le cas de Brio et Wu, on a effectué les simulations avec un maillage plus grossier de 400 mailles. Alors qu'on pourrait s'attendre à ce que le solveur à 4 états soit moins précis que le schéma de Roe-Powell, on ne note aucune différence sur la figure 4.4.

Le dernier cas-test considéré est un problème bidimensionnel eulérien. C'est le problème du vortex d'Orszag-Tang donné dans [DA-PI]. Ce cas-test simule la turbulence MHD et permet d'étudier l'évolution rapide de phénomènes de turbulence compressible à partir d'une condition initiale régulière. Il permet d'illustrer la robustesse du schéma. En effet, c'est un cas test pour lequel le schéma de Roe-Powell du paragraphe 4.2.7 fournit rapidement des pressions négatives.

Il a été simulé avec le solveur entropique à 8 états intermédiaires et le solveur entropique é 4 états.
Le domaine de calcul est $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ et le maillage comporte 200 mailles dans chaque direction.
La condition initiale est régulière et est fournie par :

$$\begin{gathered} \rho = \frac{25}{9} \quad , \quad p = \frac{5}{3}, , \\ u_x(x,y) = siny \quad , \quad u_y(x,y) = -sinx \quad , \quad u_z(x,y) = 0 \\ B_x(x,y) = sin(2y) \quad , \quad B_y(x,y) = -sinx \quad , \quad B_z(x,y) = 0. \end{gathered}$$

Les conditions limites sont périodiques.
Sur la figure 4.5 sont représentées les isobares aux temps $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$ et π, mettant ainsi en évidence la formation de chocs.
Sur les figures 4.6 et 4.7, on donne la pression et la composante B_x du champ magnétique au temps π pour les solveurs entropiques à 8 états et à 4 états. De nouveau, il n'y a aucune différence notable entre les deux solutions. Le solveur à 4 états apparaît donc comme un bon candidat pour résoudre des problèmes de MHD multidimensionnelle. En effet, il offre l'avantage d'être robuste, puisque positif, de calculer des solutions physiques, puisque entropique, et semble suffisamment précis. En contre-partie, il a un coût de de 40 à 50% plus élevé que le schéma de Roe-Powell, mais est bien sûr moins coûteux que le solveur entropique à 8 états.

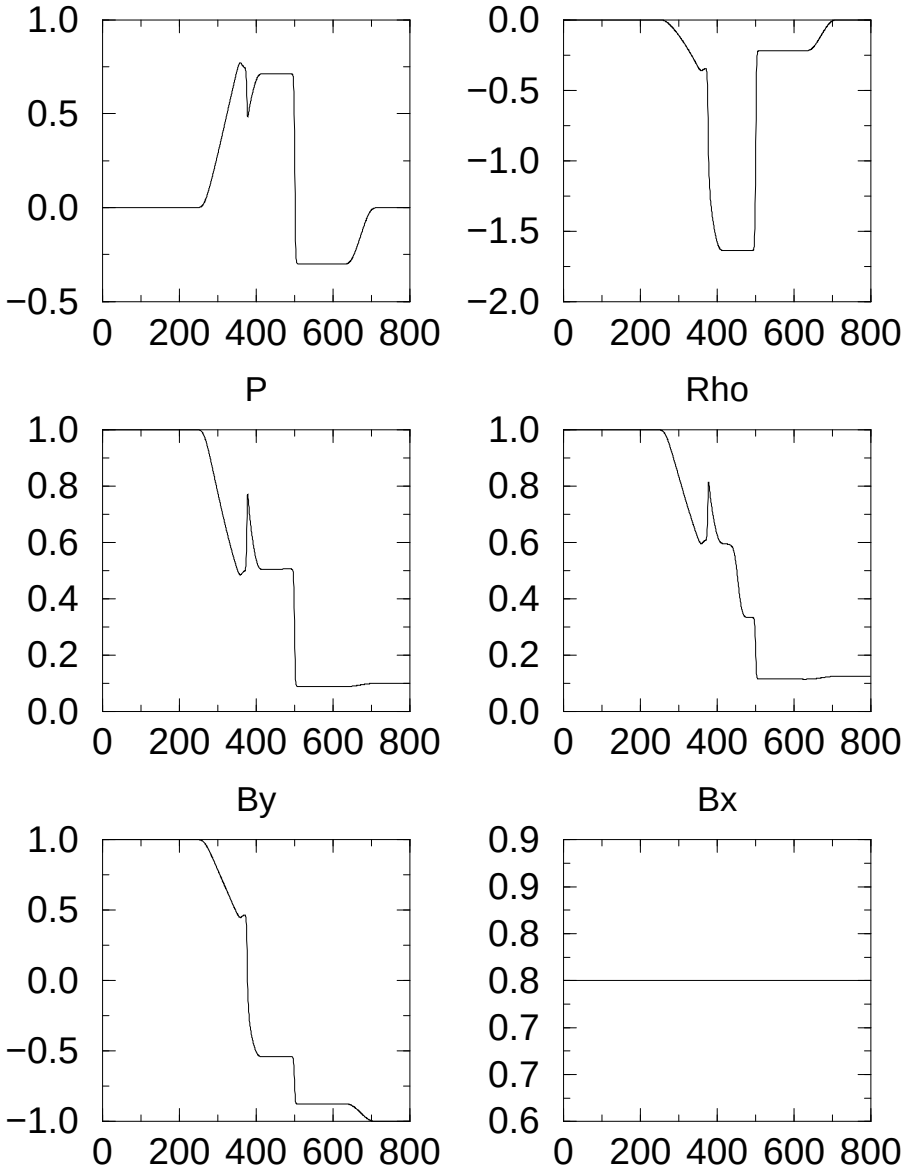


FIG. 4.1 – *Brio et Wu : système de la MHD à 7 équations (1600 mailles)*

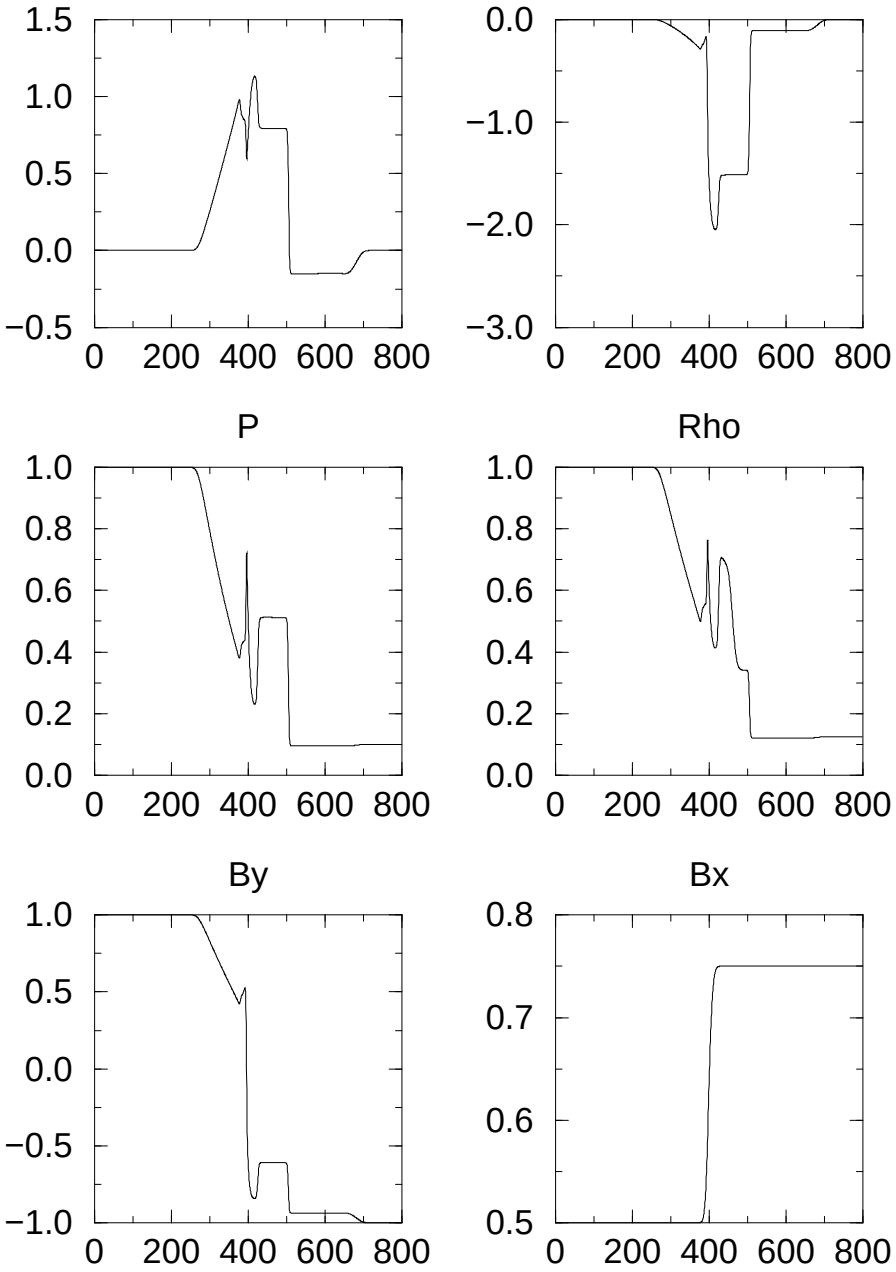


FIG. 4.2 – *Brio et Wu : système de la MHD à 8 équations (1600 mailles)*

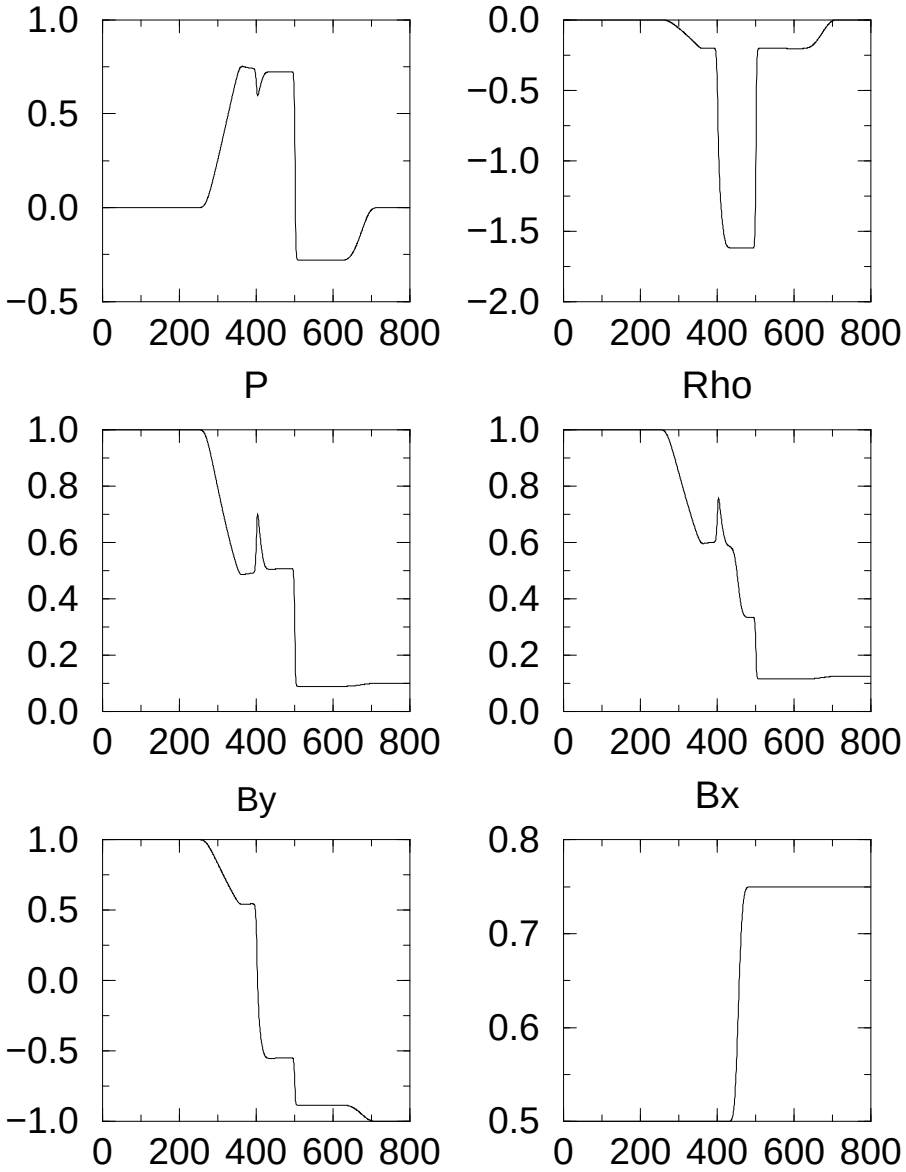


FIG. 4.3 – *Brio et Wu : système de Powell (1600 mailles)*

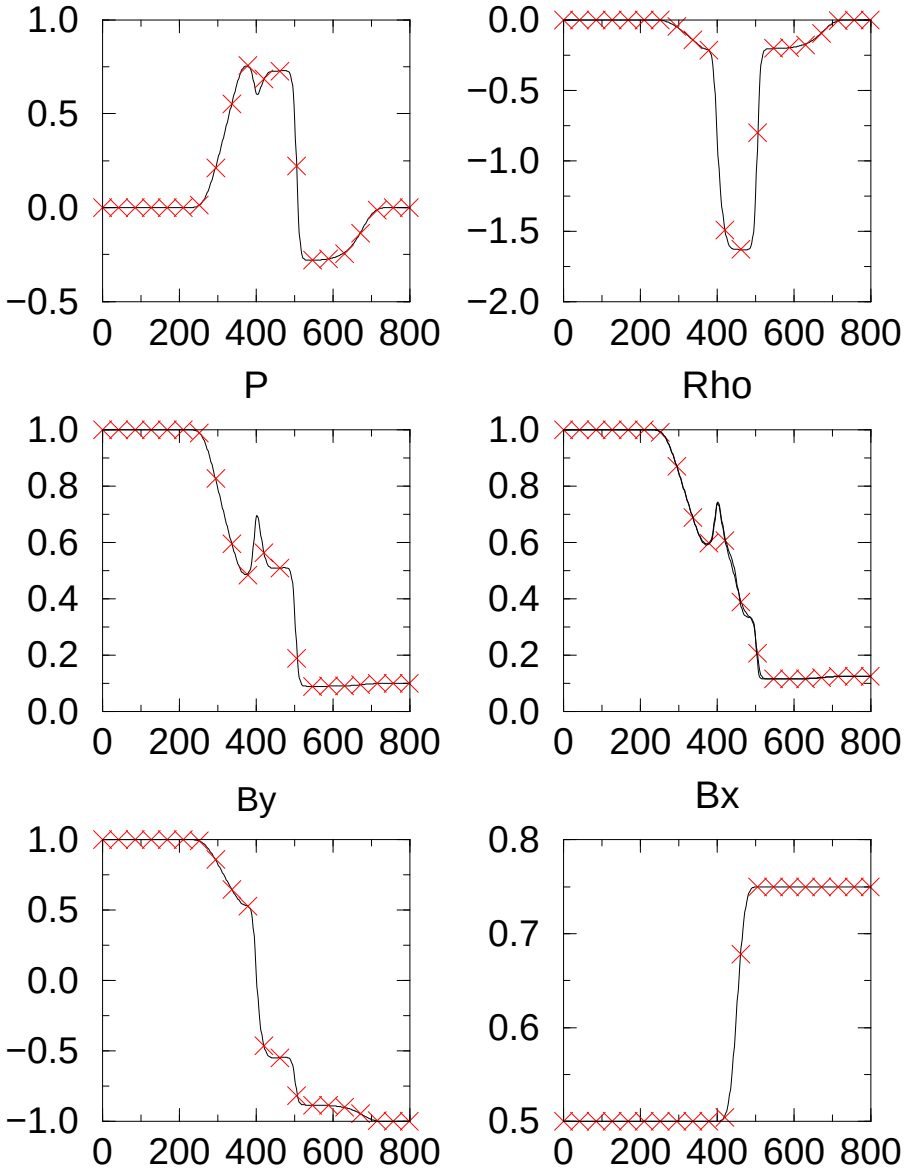


FIG. 4.4 – *Powell (400 mailles) : - Roe-Powell, × solveur à 2 états*

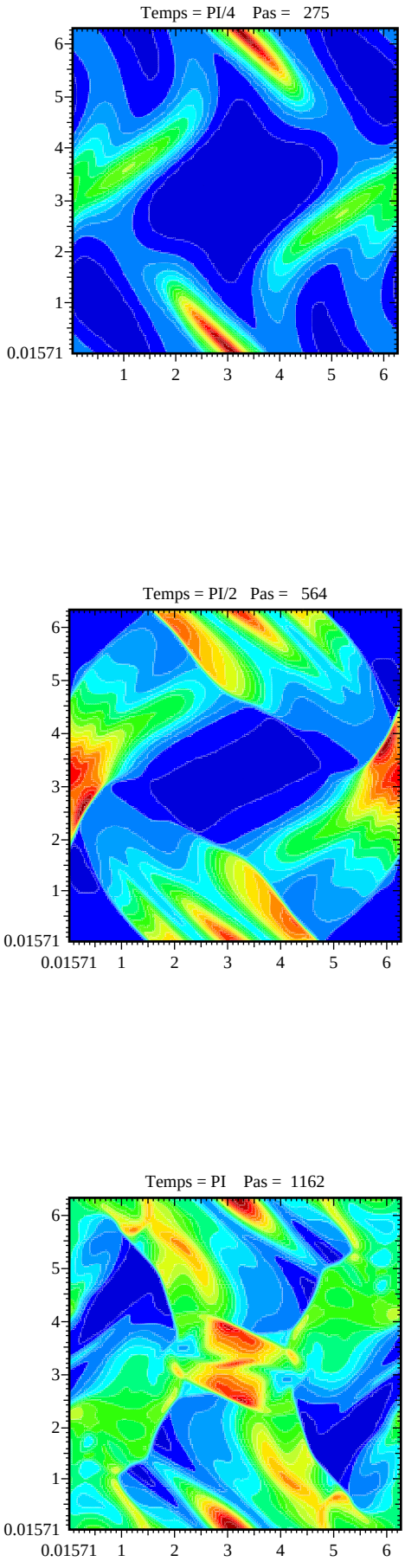
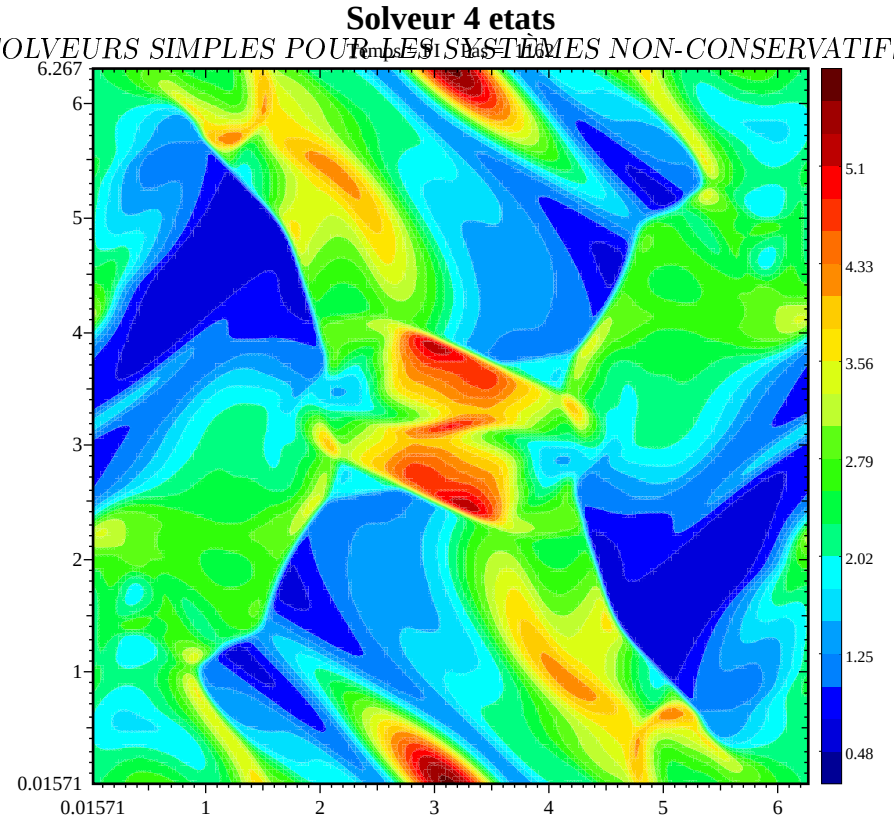


FIG. 4.5 – *Vortex d'Orszag-Tang : pressions*



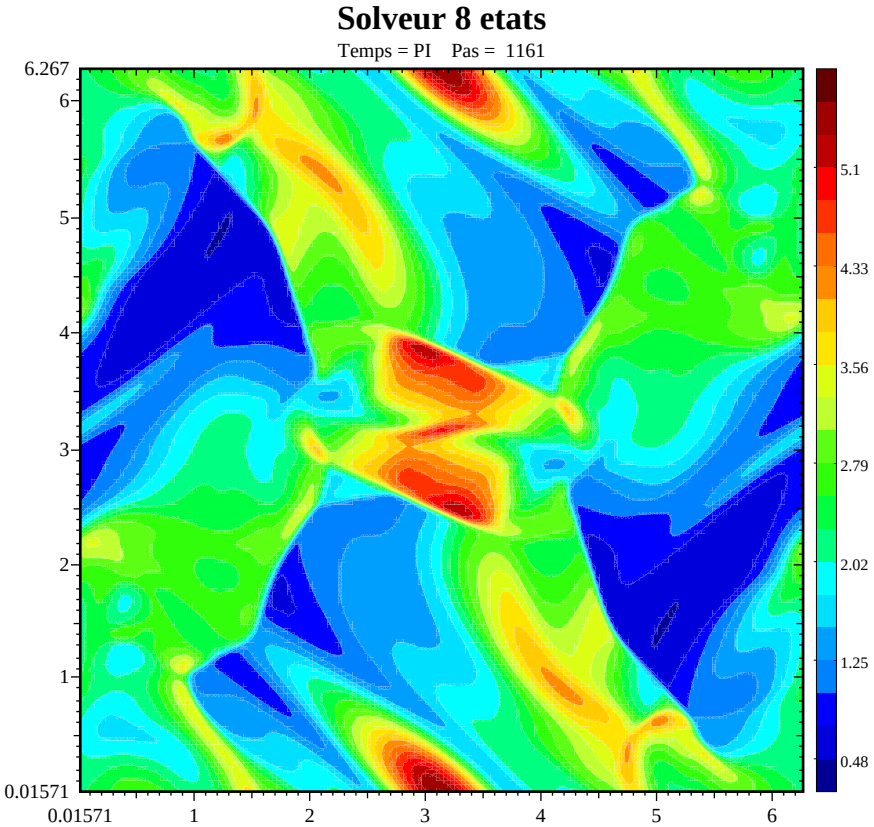


FIG. 4.6 – *Vortex d'Orszag-Tang : isobares pour les deux solveurs*

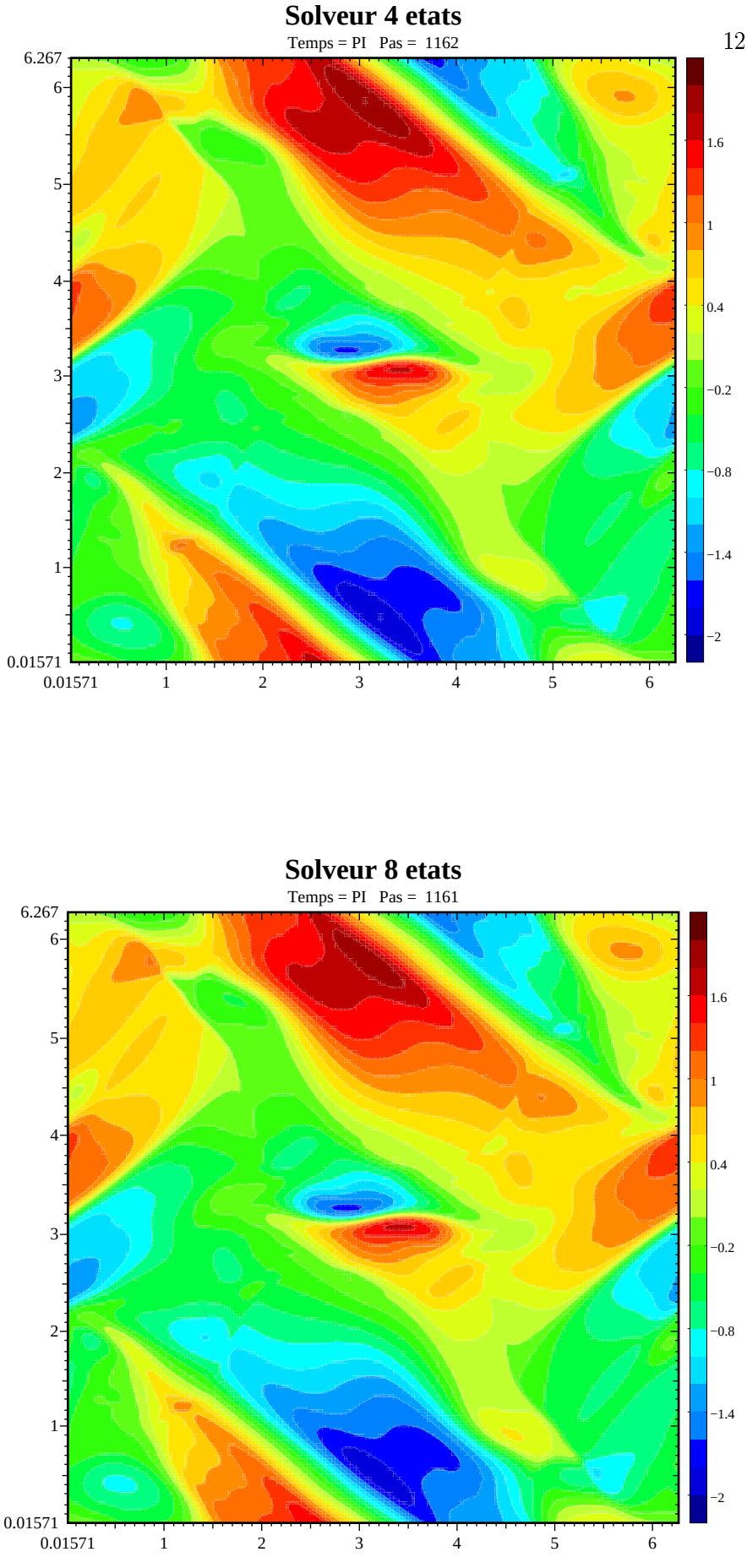


FIG. 4.7 – *Vortex d'Orszag-Tang : iso-Bx pour les deux solveurs*

Chapitre 5

Perspectives

Il existe de nombreuses voies possibles dans lesquelles les études exposées dans ce document peuvent être poursuivies.
D'abord, sur un plan purement industriel, la réalisation d'une étude numérique exhaustive serait intéressante afin d'évaluer l'intérêt pratique des solveurs simples développés dans cette étude. En effet, quoique les simulations numériques déjà réalisées ont été pleinement satisfaisantes, on ne peut pas considérer qu'elles soient totalement représentatives. Par exemple, on peut se poser la question suivante : y-a-t'il un intérêt pratique à remplacer dans un code d'aérodynamique le solveur de Roe avec correction d'entropie, ou tout autre solveur, par le solveur simple entropique du Chapitre 2 ?
Sur le plan des applications, il existe d'autres domaines de la mécanique des fluides (au sens large) pour lesquels les solveurs simples sont potentiellement utilisables. Par exemple, nous avons déjà entrepris des travaux dans le but d'étendre ces solveurs au cadre de l'hydrodynamique relativiste et aussi à certains modèles aux moments dérivés des équations de Boltzmann. De même, l'interaction laser-matière offre un cadre intéressant pour l'application des solveurs simples aux systèmes hyperboliques avec terme source.
Sur un plan plus théorique, on a mis en évidence dans le Chapitre 2 une propriété remarquable, à savoir que certains solveurs simples induisent un flux numérique égal à un flux continu évalué en un état moyen. Nous avons donc entrepris une étude afin de déterminer une classe générale de systèmes pour laquelle cette propriété reste vraie. Cette problématique peut être étendue en un certain sens aux systèmes non-conservatifs.
Concernant la MHD qui a été au centre de nos préoccupations ces dernières années, il reste encore de nombreux problèmes ouverts. Certains auteurs font le reproche, légitime, que le système de Powell n'est pas conservatif en quantité de mouvement et en énergie. Il ne l'est que pour les solutions dont le champ magnétique est à divergence nulle, et ceci peut alors conduire à un écart à la conservation sur le plan numérique. Dans [JAN], Janhunen a proposé une alternative au système de Powell. En dehors de l'équation sur le champ magnétique, le système proposé est conservatif et est en outre entropique. Nous avons par conséquent réalisé un solveur simple pour ce système. Une étude numérique comparative reste à effectuer. En outre, la prise en compte d'une loi d'Ohm généralisée avec effet Joule, effet Hall et gradient de pression électronique conduit à un modèle physique difficile à appréhender aussi bien d'un point de vue théorique que numérique.

L'effet Hall conduit par exemple à l'étude des systèmes non-linéaires dispersifs à coefficients discontinus. Ce dernier point a été étudié dans [BRA] dans le cadre plus simple d'un champ magnétique transverse. Quant au gradient de pression, il induit des termes non-conservatifs qui sont des candidats non triviaux pour l'application des solveurs du Chapitre 4.
Les travaux présentés dans ce document et ceux cités dans les lignes précédentes s'inscrivent tous plus ou moins dans le cadre de la mécanique des fluides. Depuis quelques années, nous avons entrepris une reconversion dans le domaine de la modélisation et de la simulation d'impulsions laser. En particulier, nous nous sommes intéressés à la dérivation de modèles de Schrödinger non standards ainsi qu'à leur justification mathématique rigoureuse. Aujourd'hui, l'application de ces méthodes de dérivation de modèles asymptotiques est envisagée pour les problèmes de rétro-diffusion. Les applications visées sont les fibres optiques, l'endommagement laser et bien sûr l'interaction laser-matière.

Bibliographie

[AB1] R. Abgrall, *How to Prevent Pressure Oscillations in multicomponent Flow Calculations: A Quasi-conservative Approach*. J.C.P. 125, p 150-160, 1996.

[AB-SA] R. Abgrall, R. Saurel, *A Multiphase Godunov Method for Compressible Multifluid and Multiphase Flows*. J.C.P. 150, p 425-467, 1999.

R. J. Leveque, M. Pelanti, *A Class of Approximate Riemann Solvers and Their Relation to Relaxation Schemes*, J.C.P. 172, p 572-591, 2001.

[ASLAN] Aslan, N. (1996): Numerical Solutions of One-Dimensional MHD Equations by a Fluctuation Approach. Int. J. Numer. Meth. Fluids, **22**, 569-580

[BA-SP] Balsara, D. S., Spicer, D. (1999): Maintaining Pressure Positivity in Magnetohydrodynamic Simulations, J. Comp. Phys., **148**, p 133-148

[BA-SP2] Balsara, D. S., Spicer, D. (1999): A Staggered Mesh Algorithm Using High Order Godunov Fluxes to Ensure Solenoidal Magnetic Fields in Magnetohydrodynamic Simulations, J. Comp. Phys., **149**, p 270-292

[BER] Ch. Berthon, *A combustion model and approximate nonlinear projection scheme*, Rapport LRC-MAB 01.31, 2001.

[BE-CO] Ch. Berthon, F. Coquel, *Nonlinear projection methods for multi-entropies Navier-Stokes systems*, Rapport LRC-MAB 01.25, 2001.

[BER-VAZ] A. Bermudez, M.E. Vazquez, *Upwind Methods for Hyperbolic Conservation Laws with Source Terms*, Computers and Fluids, Vol. 23, N^0 8, p 1049-1071, 1994.

[BEZ] Bezard, F. (1998): Approximation numérique de problèmes d'interfaces en mécanique des fluides. PHD Thesis, Ecole Polytechnique, France

[B-D] Bezard, F., Despres, B. (1999): An Entropic Solver for Ideal Lagrangian Magnetohydrodynamics, J. Comp. Phys., **154**, p 65-89

[BOUCHUT] Bouchut, F. (1999): Construction of BGK models with a family of kinetic entropies for a given system of conservation laws, SIAM J. Stat. Phys., **95**, 113-170

[BRA] S. Brassier, *Résolution numérique d'un modèle MHD à deux températures et loi d'Ohm généralisée : solveur de Roe, suivi d'interface, équations de transport non linéaires à coefficients discontinus. Modélisation d'un commutateur à plasma*, Thèse de l'Université Bordeaux I, 1998.

[B-G] S. Brassier, G. Gallice, *A Roe-scheme for the Bi-temperature Model of Magnetohydrodynamics*, Computers and Mathematics with Applications, 41 (2001), 257-267.

[B-W] Brio, M., Wu, C.C., *An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics*, J. Comp. Phys., 75, 400-422, 1988.

[CG] Cargo, P., Gallice, G. (1997): Roe's Matrices for Ideal MHD and Systematic Construction of Roe's Matrices for Systems of Conservation Laws, J. Comp. Phys., **136**, 446-466

[CGP] Coquel, F. Godlewski, E. Perthame, B. (1999): Some new Godunov and Relaxation Methods for two Phase Flows Problems, Godunov Methods: Theory and Applications, Oxford

[CGR] P. Cargo, G. Gallice, P. A. Raviart, *Construction of a Roe linearization for the ideal MHD equations*, C. R. Acad. Sci. Paris, 323, 951-955, 1996.

[CAR-LER] P. Cargo, A.Y. Leroux, *Un schéma équilibre adapté au modèle d'atmosphère avec termes de gravité*, C. R. Acad. Sci. Paris, 318, série I, p 73-876, 1994.

[CMP] M. Castro, J. Macias, C. Pares, *A Q-scheme for a class of systems of coupled conservation laws with source term. Application to a two-layer 1D shallow water system*, Math. Model. and Numer. Anal., 35, p 107-127, 2001.

[C-L-N-P] J. F. Colombeau, A. Y. Leroux, A. Noussair, B. Perrot, *Microscopic profiles of shock waves and ambiguities in multiplications of distributions*, SIAM J. of Numer. Anal., 26, N^0 4, p 871-883, 1989.

[COR1] S. Cordier, *Modélisation mathématique et simulation numérique du plasma magnétosphérique*, Thèse de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1994.

[CKC] Croisille, J.P., Khanfir, R., Chanteur, G. (1996): Numerical Simulation of the MHD Equations by a Kinetic-type Method, J. Sci. Comput., **10**, 481-492

[COL-GLAZ] Colella, P., Glaz, H. M. (1983): Efficient Solution Algorithms for the Riemann Problem for Real Gases, Lawrence Berkeley Laboratory Report LBL-15776

[CO-LI] Coquel, F., Liou, M. S. (1995): Hybrid Upwind Splitting (HUS) by a field by field Decomposition, NASA TM-106843

[CO-MA] Coquel, F., Marmignon, C. (1995): A Roe-type linearizationfor the Euler equations for weakly ionized multi-component and multi-temperature gas, AIAA Paper 95-1675, 1995.

[DW] Dai, W., Woodward, P. (1998): A Simple Finite Difference Scheme for Multidimensional Magnetohydrodynamical Equations, J. Comp. Phys., **142**, 331-369

[DA-PI] R. B. Dahlburg, J. M. Picone, (1998): *Evolution of the Orszag-Tag vortex system in a compressible medium*, Phys. of Fluids B, 1, 2153, 1989.

[DLM] G. Dal Maso, P. Le Floch, F. Murat, *Definition and weak stability of a non conservative product*, J. Maths Pures Appl., 74, p 483-548, 1995.

[DRPV] Degond P., Peyrard P.F., Russo G., Villedieu P., Polynomial upwind schemes for hyperbolic systems, C. R. Acad. Sci. Paris, , , 1999.

[DES1] Després, B. (1997): Entropic Inequality for a Conservative Solver of Lagrangian Gas Dynamics, C. R. Acad. Sci. Paris, **324**, 1301-1306

[DES] B. Després, *Lagrangian Systems of Conservation Laws*, Numerische Mathematik to appear.

[DUBOIS] B. Dubois, *Systems of Conservation Laws invariant for Galileo group and space reflexion*, CNAM, note 318 , 1999

[DUB] B. Dubroca, *Solveur de Roe Positivement Conservatif*, C.R. Acad. Sci. Paris, tome 329, Série I, 827-832, 1999.

[D-G1] B. Dubroca, G. Gallice, *Problème mixte hyperbolique pour un système de lois de conservation monodimensionnel*, C. R. Acad. Sciences Paris, tome 306, Série I, 317-320, 1988.

[D-G2] B. Dubroca, G. Gallice, *Résultats d'existence et d'unicité du problème mixte pour des systèmes hyperboliques de lois de conservation* , Communication in Partial Differential Equation, 15, 1, 59-80, 1988.

[FMO] R. P. Fedwik, B. Merriman, S. Osher, *Simplified Discretization of Systems of Hyperbolic Conservation Laws Containing Advection Equations*. J.C.P. 157, p 302-326, 2000.

[FLANDRIN] L. Flandrin, *Méthodes cell-centered pour l'approximation des équations de Navier-Stokes sur des maillages non structurés*, Thèse de l'Université Bordeaux I, 1995.

[GAL0] G. Gallice, *Système d'Euler-Poisson, magnétohydrodynamique et schéma de Roe*, Thèse de l'Université Bordeaux I, 1997.

[GAL1] G. Gallice, *Simulation of the Collision of Jupiter and the Shoemaker-Levi 9 Comet with a TVD Roe Type Scheme Preserving the Atmospheric Equilibrium in the Unperturbed Regions*, ICIAM, HAMBOURG, 1995.

[GAL2] G. Gallice, *Schémas de type Godunov entropiques et positifs pour la dynamique des gaz et la magnétohydrodynamique lagrangiennes*, C. R. Acad. Sci. Paris, 332, série I, p 1037-1040, 2001.

[GAL3] G. Gallice, *Schémas de Roe génralisés : Positivité et entropie*, Rapport MAB 00009.

[GAL4] G. Gallice, *Schémas de type Godunov entropiques et positifs préservant les discontinuités de contact*, C. R. Acad. Sci. Paris, 331, série I, p 149-152, 2000.

[GAL5] G. Gallice, *Solveurs simples positifs et entropiques pour les systèmes hyperboliques avec terme source*, C. R. Acad. Sci. Paris, 334, série I, p 1-4, 2002.

[GAL6] G. Gallice, *Schémas équilibre et Solveurs de Riemann simples entropiques pour des systèmes hyperboliques avec terme source : application à la Dynamique des Gaz avec gravité*, Rapport LRC-MAB , n^0 05, 2002.

[GAL7] G. Gallice, *Un solveur de type Roe pour le système de Powell pour la MHD*, Rapport LRC-MAB , n^0 09, 2002.

[GAL8] Gallice , G., (1995): Roe's Matrices for General Conservation Laws in Eulerian or Lagrangian Coordinates. Application to Gas Dynamics and MHD, C. R. Acad. Sci. Paris, **321**, 1069-1072

[GAL9] Gallice, G.: Simple Riemann's Godunov-type's Scheme for hyperbolic non-conservative Systems and Construction of a positive and entropic Godunov-type's Scheme for the Powell System in multidimensional MHD, in preparation

[GAL10] G. Gallice, *Solveurs simples positifs et entropique pour les systèmes hyperboliques avec terme source*, C.R. Acad. Paris, tome 334, Série I, 713-716, 2002.

[GALL] T. Gallouet, J-M. Hérard and N. Seguin, *Some Approximate Godunov Schemes to Compute Shallow-Water Equations with Topography*, AIAA J. à paraître, 2001.

[GL1] J.M. Greenberg, A.Y. Leroux, *A Well Balanced Scheme designed for Inhomogeneous Scalar Conservation Laws*, SIAM J. Numer. Anal., vol. 33-1, p 1-16, 1996.

[GL2] J.M. Greenberg, A.Y. Leroux, R. Baraille, A. Noussair, *Analysis and Approximation of Conservation Laws with Source Terms*, SIAM J. Numer. Anal., vol. 34-5, p 1-16, 1997.

[GNVC] P. Garcia-Navarro, M.E. Vazquez-Cendon, *On Numerical Treatment of the Source Terms in the Shallow Water Equations*, Computers and Fluids, vol. 29-8, p 951-979, 2000.

[GODU] S. K. Godunov, *Difference Methods for the Numerical Calculation of the Equations of Fluid Dynamics*, Math. Sb., **47**, 271-306, 1959.

[GODU2] S. K. Godunov, Num. Meth. for Mech. of Continuum Medium, 1, 26, 1979.

[GODUNOV] S. Godunov, *Résolution numérique des problèmes multimensionnels de la dynamique des gaz*, Ed. Mir, 1979.

[GRE] Gressier, J. (1999):Robustesse et précision des schémas décentrés pour les écoulements compressibles, PHD Thesis, ENSAE, Toulouse, France

[HAR] A. Harten, *High Reolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws*, J. Comp. Phys., 49, 357-393, 1983.

[HLL] A. Harten, P.D. Lax, B. Van Leer, *On Upstream Differencing and Godunov-type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws*, Icase Report 82-5, 1982.

[HLLE] B. Einfeldt, C.D. Munz, P.L. Roe, and B. Sjogreen, *On Godunov-Type Methods near Low Densities.*, SIAM J. Numer. Anal., vol. 25-2, p 294-318, 1988.

[HOU] T. Y. Hou, P. Le Floch, *Why nonconservative schemes converge for wrong solutions : error analysis*, Math. of Comp., Vol 62, N^0 306, p 497-530, 1994.

[HY] A. Harten, M. Hyman, P.D. Lax, *On finite difference approximations and entropy conditions for shocks*, Comm. Pure Appli. Math., 29, 297-322, 1976.

[JAN] Janhunen, P. (2000): A Positive Conservative Method for Magnetohydrodynamics based on HLL and Roe Methods, J. Comp. Phys., **160**, 649-661

[JIN] S. Jin, *A Steady-State Captuting Method for Hyperbolic Systems with Geometrical Source Terms*, Mathematical Modelling and Numerical Analysis, Vol. 35, N^0 4, p 631-645, 2001.

[KHANFIR] Khanfir, R. (1995): Approximation volumes finis de type cinétique du système hyperbolique de la MHD idéale compressible à pression isotrope, PHD Thesis, U. of Paris XI, Orsay, France

[KH-PE] Khobalatte, B., Perthame, B. (1994): A Maximum Principle on the Entropy and Minimal Limitations for Kinetic Schemes, Math. of Comp., **62**, 119-132

[LEFLOCH] P. Le Floch, *Entropy weak solutions to nonlinear hyperbolic systems under non conservative form*, Comm. Part. Diff. Equa., 13, p 669-727, 1988.

[LEFLOCH-TP] P. Le Floch, Tai-Ping Liu, *Existence Theory for Nonlinear Hyperbolic Systems in Nonconservative form*, Rapport Interne CMAP, $n^0$254, 1992.

[LER] A. Chinnayya et A. Y. Leroux, *A New General Riemann solver for the shallow-water equations with friction and topography*, Preprint, 1999.

[LEV] R. J. Leveque, *Balancing Source Terms and Flux Gradients in High-Resolution Godunov Methods: The Quasi-Steady Wave Propagation Algorithm*, J.C.P. 146, p 346-365, 1998.

[LEV2] R. J. Leveque, M. Pelanti, *A Class of Approximate Riemann Solvers and Their Relation to Relaxation Schemes*, J.C.P. 172, p 572-591, 2001.

[LINDE] Linde, T. (1998): A Three-Dimensional Adaptative Multifluid MHD Model of the Heliosphere, PHD Thesis, U. of Michigan

[LIOU] Liou, M. S. (1996): A Sequel to AUSM: AUSM +, J. Comp. Phys., **129**, 364-382

[LIOU2] M.S. Liou, *On a new class of flux-splitting*, 13^{th} Int. Conf. on Num. Meth. in fluid dynamics, 115-119, Rome, 1992.

[MEHL] Mehlman, G. (1991): Etudes de quelques problèmes liés aux écoulements en déséquilibre chimique et thermique, PHD Thesis, Ecole Polytechnique, Paris, France

[MUNZ] C. D. Munz, *On Godunov-type schemes for lagrangian gas dynamics*, SIAM J. Numer. Anal., 31, p. 17-42, 1994.

[MUNZ2] A. Dedner, F. Kemm, D. Kroner, C. D. Munz, T. Schnitzer, M. Wesenberg, *Hyperbolic Divergence Cleaning for the MHD Equations*, J.C.P. 175, p 645-673, 2002.

[OSHER] Osher, S., Solomon, F. (1982): Upwind Difference Schemes for Hyperbolic Systems of Conservation Laws, Math. Comp. , **38**, 321-374

[PER] Perthame, B. (1989): Boltzmann type Schemes for Gas Dynamics and the Entropy Property, J. Diff. Equations, **81**, 191-205

[PER1] R. Botchorishvili, B. Perthame, A. Vasseur, *Equilibrium Schemes for Scalar Conservation Laws with Stiff Sources*, Rapport ENS-DMA 00-16, 2000.

[PER2] E. Audusse, M. O. Bristeau, B. Perthame, *Kinetic Schemes for Saint-Venant Equations with Source Terms on Unstructured Grids*, Rapport de Recherche INRIA, N^0 3989, 2000.

[POWELL] K. G. Powell, *An Approximate Riemann Solver that works in more than one dimension*, Rapport Icase, N^0 94-24, 1994.

[PRLGZ] Powell, K., Roe, P. L., Linde, T., Gombosi, T., De Zeeuw, D. (1999): A solution-Adaptive Upwind Scheme for Ideal Magnetohydrodynamics, J. Comp. Phys., **154**, 284-300

[RAV] E. Godlewski, P. a. Raviart, *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 118, 1996.

[RAV-SS] P. A. Raviart, L. Sainsaulieu, *A nonconservative hyperbolic system modelling spray dynamics. Part 1. Solution of the Riremann problem*, Math. Models Methods in App. Sci., 5,$n^0$3, p297-333, 1995.

[ROE] Roe, *Approximate Riemann solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes*, J. of Comp. Physics, Vol. 43, p. 357-372, 1981.

[SOD] G. Sod, *A Ssurvey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservations laws*, J. Comp. Phys., **27**, 1-31, 1978.

[S-W] Steger, J. L.,Warming, R. F., (1981): Flux Vector Splitting of the Inviscid Gas Dynamics Equations with Applications to Finite-Difference Methods, J. Comp. Phys., **40**, 263-293

[TADMOR] Tadmor, E. (1986): A Minimum Entropy Principle in the Gas Dynamics Equations, J. Appl. Numer. Math., **2**, 211-219

[TORO] Toro, *Riemann solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Springer Verlag, 1997.

[TOTH1] Toth, G. (1999): The div B = 0 Constraint in Shock-Capturing Magnetohydrodynamics Codes, J. Comp. Phys., **161**, p 605-652

[TOUMI] Toumi, I.: A weak formulation of Roe's approximate Riemann solver, J. Comp. Phys., **102**, p 360-373, 1992.

[VLEER] Van Leer, B. (1979): Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme V. A Second-Order Sequel to Godunov's Method, J. Comp. Phys., **32**, 101-136

[VLEER2] M.S. LIOU, J.S. SHUEN, B. VAN LEER, *Splitting of inviscid fluxes for real gases*, J.C.P., 27, 1-24, 1990.

[VIL] Villedieu, P. (1994): Approximation de type cinétique du système hyperbolique de la dynamique des gaz hors-équilibre thermochimique, PHD Thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, France

[XU] Xu, K. Gas-kinetic Theory based Flux Splitting Method for Ideal Magnetohydrodynamics, Icase Report, 98-53

[YEE1] A. Harten, R.F. Warming, H.C. Yee, *Implicit total variation diminishing schemes for steady states calculations*, AIAA paper, 83-1902, 1983.

[YEE2] H.C. YEE, *Construction of explicit and implicit TVD schemes and their applications*, J.C.P., 68, 151-179, 1987.

[ZA-CO] Zachary, S., Colella, P. (1992): A Higher-Order Godunov Method for the Equation of Ideal Magnetohydrodynamics, J. Comp. Phys., **99**, 341-347

[ZHOU] J. G. Zhou, D. M. Causon, C. G. Mingham AND D. M. Ingram, *The Surface Gradient Method for the Treatment of Source Terms in the Shallow-Water Equations*, J. of Comp. Physics, Vol. 168, p 1-25, 2001.