



**HAL**  
open science

# Etude de la Propagation d'Ondes Linéaires et Non Linéaires. Application à la Mécanique des Fluides et à la Physique des Plasmas

Alain Forestier

► **To cite this version:**

Alain Forestier. Etude de la Propagation d'Ondes Linéaires et Non Linéaires. Application à la Mécanique des Fluides et à la Physique des Plasmas. Mathématiques [math]. UPMC Université pierre et Marie Curie Paris VI, 2002. tel-01275491

**HAL Id: tel-01275491**

**<https://cea.hal.science/tel-01275491>**

Submitted on 19 Feb 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE, PARIS VI*

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité: Mathématiques

DOSSIER PRESENTE PAR

Alain FORESTIER

Sujet:

Etude de Propagation d' Ondes Linéaires et Non Linéaires  
Application à la Mécanique des Fluides et à la Physique des Plasmas

Soutenue le 30 Avril 2002

Devant le jury composé de

**Mr Rémi ABGRALL** Professeur, CEREMAB, Université de BORDEAUX I, Rapporteur

**Mr Grégoire ALLAIRE** Professeur, Centre de Math. Appliquées, Ecole Polytechnique, PALAISEAU

**Mr Roland BORGHI** Professeur, IMT, Université d' AIX MARSEILLE I

**Mr Jean Paul CHABARD** Docteur, EDF/DRD, CLAMART

**Mr Thierry GALLOUET** Professeur, CMI, Université d' AIX MARSEILLE I, Rapporteur

**Mr Michel LIVOLANT** Directeur, CEA/IPSN, FONTENAY AUX ROSES

**Mr Alain HOFFMANN** Directeur, Cabinet du Haut Commissaire, CEA/SIEGE, PARIS

**Mr Ralph MENIKOFF** Chercheur, Theoretical Division, LOSALAMOS National Laboratory, LOS ALAMOS, USA

**Mr Bertrand MERCIER** Docteur d' Etat, Directeur Adjoint, CEA/SACLAY

**Mr Olivier PIRONNEAU** Professeur, Laboratoire d' Analyse Num. J.L.LIONS, Université de PARIS VI

**Mr Luigi QUARTAPELLE** Professeur, Institut Polytechnique de Milan, ITALIE

**Mr Pierre Arnaud RAVIART** Directeur de Recherche, CNRS, Ecole Polytechnique, PALAISEAU

**Mr Patrick RAYMOND** CEA/SACLAY et Professeur, Université de BRUXELLES, BELGIQUE

**Mr Eugène ROMENSKII** Professeur, SOBOLEV Institute of Mathematics, NOVOSSIBIRSK, RUSSIE

**Mr Jean-Paul VILA** Professeur, INSA, Université de TOULOUSE, Rapporteur

*UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE, PARIS VI*

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité: Mathématiques

DOSSIER PRESENTE PAR

Alain FORESTIER

Sujet:

Etude de Propagation d' Ondes Linéaires et Non Linéaires

Application à la Mécanique des Fluides et à la Physique des Plasmas

Soutenue le 30 Avril 2002

Devant le jury composé de

Mr Rémi ABGRALL Professeur, CEREMAB, Université de BORDEAUX I, Rapporteur

Mr Grégoire ALLAIRE Professeur, Centre de Math. Appliquées, Ecole Polytechnique, PALAISEAU

Mr Roland BORGHI Professeur, IMT, Université d' AIX MARSEILLE I

Mr Jean Paul CHABARD Docteur, EDF/DRD, CLAMART

Mr Thierry GALLOUET Professeur, CMI, Université d' AIX MARSEILLE I, Rapporteur

Mr Michel LIVOLANT Directeur, CEA/IPSN, FONTENAY AUX ROSES

Mr Alain HOFFMANN Directeur, Cabinet du Haut Commissaire, CEA/SIEGE, PARIS

Mr Ralph MENIKOFF Chercheur, Theoretical Division, LOSALAMOS National Laboratory, LOS ALAMOS,USA

Mr Bertrand MERCIER Docteur d' Etat, Directeur Adjoint, CEA/SACLAY

Mr Olivier PIRONNEAU Professeur, Laboratoire d' Analyse Num. J.L.LIONS, Université de PARIS VI

Mr Luigi QUARTAPELLE Professeur, Institut Polytechnique de Milan, ITALIE

Mr Pierre Arnaud RAVIART Directeur de Recherche, CNRS, Ecole Polytechnique, PALAISEAU

Mr Patrick RAYMOND CEA/SACLAY et Professeur, Université de BRUXELLES, BELGIQUE

Mr Eugène ROMENSKII Professeur, SOBOLEV Institute of Mathematics, NOVOSSIBIRSK, RUSSIE

Mr Jean-Paul VILA Professeur, INSA, Université de TOULOUSE, Rapporteur

La difficulté est de trouver les hypothèses  
qui aient un rapport avec la réalité

**Jean ROBINSON**

Hérésies Economiques, 1979

«Deux excès:  
Exclure la raison,  
n'admettre que la raison »

**Blaise PASCAL et Pierre BOURDIEU**

Ce qui donne en corrigeant  
« Deux excès:  
Exclure la raison, ne pas associer  
une part de rêve et de poésie »  
Modestement le postulant

"If we falter in resolve  
just because the task is hard,  
No accomplishment can follow :  
it is the world's way"

**Emperor MEIJI**

"Katashi tote omoi nanigotomo  
Naru koto araji hito no yononaka"

A mes parents

A Chantal

A Louis et Romain

Je tiens, dans un premier temps, à exprimer ici toute ma gratitude envers les différentes personnes qui ont, dans la hiérarchie CEA, encadré mon activité professionnelle.....et permis mon évolution personnelle, en premier lieu Michel LIVOLANT, ensuite Alain HOFFMANN puis Bertrand MERCIER et enfin Patrick RAYMOND. J'ai pu apprécier leurs intuitions scientifiques et leur sens de l'organisation ainsi que leurs grandes qualités humaines. Ils m'ont tous guidé avec une volonté d'excellence dans ma démarche scientifique personnelle ainsi que dans l'encadrement et le travail d'équipe.

Je souhaite ici évoquer deux personnes, Messieurs Pierre Arnaud RAVIART et Alain HOFFMANN pour leur personnalité; leur enthousiasme scientifique toujours renouvelé, leur dynamisme et leur contact direct m'ont accompagné durant toutes ces années de recherche et ont guidé mes pas vers des thèmes de travail toujours passionnants et ouvrant des domaines inexplorés qui laissent une large place à la créativité. Ce travail doit beaucoup à l'environnement scientifique que chacun d'entre eux a su créer, chacun dans ses organismes respectifs et avec lesquels j'ai pu collaborer avec grand plaisir. Leur ouverture vers la communauté scientifique internationale et vers le monde industriel est un atout majeur dont chacun m'a fait bénéficier.

Messieurs Rémi ABGRALL, Thierry GALLOUET et Jean Paul VILA ont eu la lourde et peut être fastidieuse charge de faire un rapport sur ce travail. Je suis particulièrement honoré de ce choix qui témoigne de leurs qualités scientifiques et intellectuelles. J'ai eu l'occasion de les fréquenter dans des cadres différents et eu l'opportunité de travailler avec eux. J'ai apprécié leurs démarches scientifiques rigoureuses et ai toujours appris à leur contact. Une mention particulière à Thierry qui, par sa personnalité et son sens aigu des relations humaines, réussit, me semble-t-il, au sein de son équipe à développer des collaborations attractives dans le domaine des Mathématiques Appliquées: il aura fallu que je retourne en Région Parisienne pour que les applications des Mathématiques Appliquées en région Méditerranéenne prennent, selon mon jugement personnel, tout leur sens et je le remercie d'avoir pensé à moi pour y participer.

Messieurs Ralph MENIKOFF, Luigi QUARTAPELLE et Eugène ROMENSKI me font l'honneur de participer au jury. Je les remercie vivement en ayant conscience des difficultés, pour certains d'entre eux, de venir jusqu'à PARIS en cette période.

J'ai connu Messieurs Olivier PIRONNEAU et Roland BORGHI dans des congrès et conférences sur des thèmes proches de mes activités. Ils m'ont toujours fait part de remarques critiques fort pertinentes. Qu'ils soient remerciés de leur présence.

J'ai fait la connaissance de Monsieur Jean Paul CHABARD dans une «vie antérieure» et désormais nous avons parfois l'occasion de nous côtoyer dans un cadre de relations «Projet». Que cela nous donne l'occasion de ne pas oublier que l'échange, qui doit exister entre nos deux organismes, EDF et CEA, soit avant tout et réellement scientifique.

Pour terminer, mais «the last and not the least», que Grégoire ALLAIRE soit remercié par sa participation au jury, qu'il a bien voulu accepter. Nous nous sommes connus au début chacun de nos carrières professionnelles et nos chemins se sont retrouvés parfois avec les aléas de l'Histoire.

Que tous ceux qui ont croisés mes activités de recherche soient remerciés, je pense en particulier à Emmanuelle, Laurence, Antoine, Bob, Cataldo, Eugène, Fabrice, Harriidh, Jean Marc, Michel, Pedro, Pierre, Richard, Xavier et au regretté Daniel. J'ai su trouver dans le travail, dans un premier temps, des êtres qui ont le sens de l'amitié. Il faut parfois aller en CALIFORNIE

pour que ses liens se nouent entre des Marseillais et inversement aller vers Marseille pour que les contacts noués à Paris s'approfondissent et s'enrichissent. Ah les aléas de l'existence!! Que chacun, en particulier Jean Marc et Richard, y trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance et de mon amitié.

Un mot particulier pour Bernard qui par sa gentillesse et sa sollicitude m'a permis d'accéder à un Latex performant et surtout de pouvoir achever le travail au niveau rédactionnel ainsi qu'au niveau graphique.

Un grand merci à tous ceux qui ont côtoyé mon parcours et qui ont su supporter mes requêtes, mes humeurs et mes volontés de choix de thèmes techniques à développer afin de permettre au CEA de répondre à une demande d'excellence scientifique.

Enfin que Cathy trouve ici la gratitude pour toutes des démarches pratiques dont elle s'est tirée avec brio comme d'habitude.

Un dernier mot pour mes parents qui ont su me donner le goût de l'effort (de recherche bien sur), pour mon épouse qui a du supporter avec beaucoup de sérénité (apparente) ces années de quête difficile et pour mes enfants pour qu'ils y trouvent une image de ce que l'homme peut entreprendre avec passion.

## Document d'habilitation

Alain FORESTIER<sup>(1)(2)</sup>

<sup>(1)</sup> C.E.A. Saclay, DRN/DMT/SEMT, 91191 Gif-Sur-Yvette Cedex FRANCE

<sup>(2)</sup> C.E.M.I.F., 40 rue du Pelvoux, 91020 Evry Cedex FRANCE

**Key Words :** Compressible fluid-Multicomponent flow -Perfect and real gas-Turbulence model - Hyperbolic system-Entropy characterization - Exact and Approximate RIEMANN solver - Godunov Scheme- VAN LEER scheme- $S_\alpha^\beta$  scheme-  $-k, \epsilon$  compressible model.-MHD Problem-Acoustic waves-Integral Equations-

### **Abstract :**

This contribution's topic is the resolution of the hyperbolic system which describes a compressible flow in perfect or real situation. It is always in a compressible case and a turbulent model or a multicomponent isentropic turbulent model can be associated.

Different schemes are tested as  $-S_\alpha^\beta$  scheme or TVD scheme. An extension to generalized geometry is purposed in 2D or 3D.

For chemical aspects, the ZND theory is under control with connexion of second order method.

In the same way, MHD or Turbulent problem are developed with computations for compressible situation.

Implicit aspects are investigated that show the lost of knowledge in large CFL even if computation can be driven for all time step.

At the end, for Plasma situations in which pressure effects can be neglected, there is a lost of hyperbolicity that requires investigation in generated problems.

We don't present numerical simulations that are exhibited in an other paper.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Etude des fluides compressibles sans réaction chimique</b>	<b>1</b>
1.1	Etude du problème de Riemann dans une thermodynamique générale	1
1.1.1	La loi d'état du fluide	1
1.1.2	Le Problème de Riemann	4
1.1.3	Adaptation de la Méthode développée pour les gaz parfaits aux gaz réels	4
1.1.4	Cas du solveur approché	10
1.2	Schémas du second ordre de type VAN LEER	12
1.2.1	Introduction	12
1.2.2	Schéma de VAN LEER	13
1.2.3	Modification du schéma et convergence	13
1.2.4	Etablissement d'un schéma conservatif en dynamique des gaz	16
1.3	Etude des schémas $S_B^\alpha$ et application à la dynamique des gaz	19
1.3.1	Construction du schéma modifié et propriété	19
1.3.2	Construction de solutions stationnaires et stabilité $L^2$	20
1.3.3	Solution entropique	21
1.3.4	Solutions régulières en 1D plan, axisymétrique et sphérique	21
<b>2</b>	<b>Etudes d'ondes réactives</b>	<b>23</b>
2.1	Aspects stables et instables dans le cadre de la Combustion pour la réaction oxygène-hydrogène	23
2.1.1	Notations et lois d'évolution d'espèces	23
2.2	Etude simplifiée par travelling waves en 1D	25
2.3	Solutions stables et instables	28
2.3.1	Stabilité des points ( $\tau = 1, \Phi = \Phi_\pm(1), \epsilon = 1$ )	29
2.3.2	Stabilité des points ( $\tau = 0, \Phi = \Phi_\pm(0), \epsilon = 0$ )	29
2.3.3	Courbes Intégrales	29
2.3.4	Etude numérique	29
2.4	Traitement numérique en 2D: cas de la réaction oxygène-hydrogène	33
2.4.1	Cadre général	33

2.4.2	Modèle oxygène-hydrogène . . . . .	34
2.4.3	Traitement numérique . . . . .	35
2.4.4	Problème de Riemann 1D . . . . .	36
2.5	Glissement en combustion . . . . .	38
2.5.1	Notations-Définitions . . . . .	38
2.5.2	Gaz simple hors équilibre-Méthode de Chapman-Enskog . . . . .	42
2.5.3	Schéma Numérique . . . . .	58
<b>3</b>	<b>Traitement numérique de la Turbulence compressible par un modèle à deux équations</b>	<b>61</b>
3.1	Introduction . . . . .	61
3.2	Equations moyennées par les moyennes de FAVRE . . . . .	62
3.3	Considération sur le système du premier ordre . . . . .	64
3.3.1	Modèle en K en 3D . . . . .	64
3.3.2	Cas 1D . . . . .	65
3.3.3	Paramétrisation des courbes de choc et discontinuités de contact . . . . .	66
3.3.4	Ondes de détente . . . . .	72
3.4	Etude générale du problème de RIEMANN . . . . .	72
3.4.1	Cas particulier $\gamma = 5/3$ . . . . .	73
3.4.2	Cas $\gamma \neq 5/3$ . . . . .	73
3.4.3	Du problème de RIEMANN 1D au schéma multidimensionnel . . . . .	74
3.5	Considération sur le système au premier ordre dans le modèle K- $\epsilon$ . . . . .	76
3.5.1	Principaux éléments du modèle K- $\epsilon$ model en 3D . . . . .	76
3.5.2	Cas 1D . . . . .	78
3.5.3	Paramétrisation des courbes de choc et discontinuités de contact . . . . .	79
3.5.4	Courbes de détente . . . . .	80
3.5.5	Etude du problème de Riemann pour le modèle K- $\epsilon$ . . . . .	81
3.6	Modèle turbulent pour la description des fluides multi composants . . . . .	82
3.6.1	Modèle en K . . . . .	83
3.6.2	Cas 1D . . . . .	85
3.6.3	Paramétrisation des courbes de choc et des discontinuités de contact . . . . .	86
3.6.4	Ondes de détente . . . . .	86
3.6.5	Etude du Problème de Riemann . . . . .	87
<b>4</b>	<b>Etude d'ondes électromagnétiques par couplage Euler-Maxwell</b>	<b>88</b>
4.1	Introduction . . . . .	88
4.2	Modèle Mathématique . . . . .	89
4.2.1	Hypothèses . . . . .	89
4.2.2	Equations de Maxwell . . . . .	90
4.2.3	Equations d' EULER . . . . .	90

4.2.4	Système couplé EULER-MAXWELL . . . . .	91
4.3	Propriétés Mathématiques . . . . .	92
4.3.1	Cas 1D . . . . .	94
4.3.2	Cas 3D . . . . .	94
4.3.3	Ondes de détente . . . . .	96
4.3.4	Ondes de choc . . . . .	96
4.3.5	Problème de RIEMANN et solveur linéarisé non linéaire . . . . .	96
4.4	Schéma de type GODOUNOV en multiD . . . . .	98
4.4.1	D'un problème 3D au problème de RIEMANN 1D . . . . .	98
4.4.2	Du problème de RIEMANN 1D au schéma numérique MultiD . . . . .	100
<b>5</b>	<b>Méthodes Implicites en 1D</b> . . . . .	<b>102</b>
5.1	Introduction . . . . .	102
5.2	Linéarisation de ROE . . . . .	103
5.2.1	Cas du P-système . . . . .	104
5.2.2	Cas de la dynamique des gaz . . . . .	104
5.2.3	Schémas implicites associés à la linéarisation de ROE . . . . .	105
5.3	Etude de l' inversibilité du système obtenu . . . . .	106
5.3.1	Cas de l'équation scalaire . . . . .	106
5.3.2	Cas du P-système . . . . .	106
5.3.3	Cas de la dynamique des gaz . . . . .	108
<b>6</b>	<b>Etude par équations intégrales de l'équation des ondes stationnaires</b> . . . . .	<b>109</b>
6.1	Equations Intégrales et représentation de la solution de l' Equation des Ondes entre deux plans parallèles . . . . .	109
6.2	Etude de l' opérateur $\mathcal{T}$ pour un obstacle formé de deux plans parallèles . . . . .	112
6.2.1	Différentes expressions de l' opérateur $\mathcal{T}$ . . . . .	112
6.2.2	Etude de l' opérateur $\mathcal{T}$ et extension . . . . .	115
6.2.3	Solution du système défini par les équations intégrales pour une géométrie bornée par deux plans parallèles . . . . .	116
6.2.4	Analyse d' une Discrétisation Spatiale pour une géométrie bornée par deux plans parallèles . . . . .	117
6.3	Etude du problème pour un bord constitué de deux plans orthogonaux infinis . . . . .	120
6.3.1	Différentes expressions de l' opérateur $\mathcal{T}$ . . . . .	122
6.3.2	Expression en variables de Fourier . . . . .	123
6.3.3	Les Equations Semi discrétisées $Q_0$ . . . . .	124
6.3.4	Calcul de la Transformée de Fourier de $\mathcal{T}^h q^h$ . . . . .	125
6.4	Etude de l' opérateur $\mathcal{T}$ dans le cas général . . . . .	126
6.5	Etude de l' opérateur $\mathcal{T}$ dans le cas de la sphère . . . . .	127

6.6	Etude d'une formulation variationnelle associée à un Potentiel retardé de simple couche . . . . .	129
6.6.1	Première formulation . . . . .	129
6.6.2	Seconde formulation . . . . .	130
6.6.3	Troisième formulation . . . . .	131
6.6.4	Annexe:Estimations $L^\infty$ . . . . .	132
6.7	Cas général et étude de la discrétisation . . . . .	133
6.7.1	Relation énergétique . . . . .	134
6.7.2	Discrétisation . . . . .	135
<b>7</b>	<b>Etude de problèmes hyperboliques dégénérés et Application à la Physique des Plasmas</b> . . . . .	<b>137</b>
7.1	Introduction . . . . .	137
7.2	Exemples . . . . .	138
7.2.1	Mécanique des Fluides sans pression . . . . .	138
7.2.2	Evolution d'une population ionique sans électrons . . . . .	139
7.3	Evolution d'un plasma formé d'ions et d'électrons . . . . .	141
7.4	Etude de problèmes hyperboliques non linéaires dégénérés en mono dimensionnel . . . . .	143
7.5	Etude du problème sans pression . . . . .	145
7.5.1	Position du problème de Riemann . . . . .	145
7.5.2	Etude du problème visqueux . . . . .	146
7.5.3	Solution limite du problème de Riemann . . . . .	148
7.5.4	Solution du problème pour des données initiales particulières . . . . .	150
7.6	Etude du problème mono fluide en présence de champ électrique . . . . .	151
7.6.1	Introduction . . . . .	151
7.6.2	Solution Lagrangienne pour le problème de Riemann . . . . .	153
7.6.3	Etude du problème visqueux associé et problème limite . . . . .	154
7.6.4	Solution du problème pour des données initiales particulières . . . . .	158
7.7	Etude du problème bifluide en présence de champ électrique . . . . .	161
7.7.1	Introduction . . . . .	161
7.7.2	Solution Lagrangienne . . . . .	162
7.8	Etude du problème bifluide se ramenant au monofluide . . . . .	163
7.8.1	Présentation et Solution Lagrangienne . . . . .	163
7.8.2	Interprétation . . . . .	167
7.8.3	Effet de l'alimentation d'ions à l'anode . . . . .	168
7.8.4	Effet de l'alimentation d'ions à l'anode maintenue durant tout le processus . . . . .	171
7.9	Etude d'un problème d'ions en présence d'électrons pour lequel la solution reste régulière . . . . .	176
7.9.1	Rappel des équations prises en compte . . . . .	176
7.9.2	Construction de solutions de type CHILD-LONGMUIR . . . . .	183
7.9.3	Etude de problème d'ions en présence d'électrons . . . . .	187

7.9.4	Calcul d'une solution régulière dans la partie Aval . . . . .	192
7.9.5	Solution continue dans la zone Amont . . . . .	203
<b>8</b>	<b>Curriculum Vitae . . . . .</b>	<b>216</b>
8.1	Fonction d' Enseignement . . . . .	216
8.1.1	Du 1er Octobre 1984 au 30 Juin 1994 . . . . .	216
8.1.2	Du 1er Octobre 1987 au 30 Juin 1994 . . . . .	216
8.1.3	Du 1er Octobre 1992 au 30 Juin 2000 . . . . .	217
8.1.4	Du 1er Octobre 1994 au 30 Juin 1997 . . . . .	217
8.1.5	Depuis de 1er Octobre 2000 . . . . .	217
8.2	Fonction d' Expert . . . . .	217
8.3	Parcours Professionnel . . . . .	218
8.3.1	Depuis le 1er Mars 2001 . . . . .	218
8.3.2	Du 1er Novembre 1997 au 1er Mars 2001 . . . . .	218
8.3.3	Du 1er Juin 1994 au 1er Novembre 1997 . . . . .	218
8.3.4	Du 1er Mai 1983 au 1er Juin 1994 . . . . .	219
8.3.5	Du 1er Octobre 1980 au 1er Mai 1983 . . . . .	219
8.3.6	Diplomes . . . . .	219
<b>9</b>	<b>Listes des publications et documents . . . . .</b>	<b>220</b>
9.1	Publications . . . . .	220
	Liste des publications . . . . .	220
9.2	Rapports . . . . .	225
	Liste des Rapports CEA,CEE,CMAP/X et EDF . . . . .	225
<b>10</b>	<b>Liste des thèses et références . . . . .</b>	<b>231</b>
10.1	Thèses . . . . .	231
	Liste des thèses soutenues avec mon encadrement . . . . .	231
10.2	Références . . . . .	234
	Références . . . . .	234

# Chapitre 1

## Etude des fluides compressibles sans réaction chimique

### 1.1 Etude du problème de Riemann dans une thermodynamique générale

Cette étude, très ancienne, cherche à définir la thermodynamique la plus appropriée afin de définir et de résoudre le problème de Riemann

#### 1.1.1 La loi d'état du fluide

Les propriétés thermodynamiques d'un fluide sont données par une équation d'état à l'équilibre  $E = E(V, S)$  qui exprime l'énergie interne du fluide en fonction du volume spécifique  $V = \frac{1}{\rho}$  (où  $\rho$  est la densité) et  $S$  l'entropie.

L'existence et l'unicité des solutions du Problème de Riemann dépendent de manière fondamentale des propriétés géométriques du graphe de  $E$ . Il est donc intéressant d'introduire un certain nombre de dérivées de  $E$ , qui serviront à définir les contraintes.

La pression et la température sont définies par:

$$P(V, S) = - \frac{\partial E}{\partial V|_S} \quad (1.1)$$

$$T(V, S) = \frac{\partial E}{\partial S|_V} \quad (1.2)$$

en accord avec la première loi de la Thermodynamique:

$$dE = TdS - PdV \quad (1.3)$$

L'exposant adiabatique est:

$$\gamma = \frac{V}{P} \frac{\partial^2 E}{\partial^2 V|_S} = -\frac{V}{P} \frac{\partial P}{\partial V|_S} \quad (1.4)$$

Le coefficient de GRUNEISEN:

$$\Gamma = -\frac{V}{T} \frac{\partial^2 E}{\partial V \partial S} = \frac{V}{T} \frac{\partial P}{\partial S|_V} \quad (1.5)$$

De même, il est courant de définir:

$$g(V, S) = \frac{PV}{T^2} \frac{\partial^2 E}{\partial^2 S|_V} \quad (1.6)$$

qui est une chaleur spécifique sans dimension.

Il existe aussi une dérivée troisième qui est importante:

$$\mathcal{G} = -\frac{V}{2} \frac{\frac{\partial^3 E}{\partial^3 V|_S}}{\frac{\partial^2 E}{\partial^2 V|_S}} = -\frac{V}{2} \frac{\frac{\partial^2 P}{\partial^2 V|_S}}{\frac{\partial P}{\partial V|_S}} = \frac{1}{2} \frac{V^2}{P\gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial^2 V|_S} \quad (1.7)$$

Cas du gaz parfait polytropique:

Pour un tel gaz  $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$  ( ce qui n'est pas vrai dans le cas général ) et  $\gamma$  est une constante. Ce rapport est toujours plus grand que 1, pour les gaz monoatomiques  $\gamma = \frac{5}{3}$ , pour les gaz diatomiques  $\gamma = \frac{7}{5}$ .

L'énergie interne est à une constante additive près  $E = C_V T$ .

L'entropie,

$$S = C_V \ln(TV^{\gamma-1}) + cst = C_V \ln\left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right) + cst \quad (1.8)$$

Les équations les plus utilisées sont les équations d'état incomplètes:

$$PV = RT \text{ où } C_p - C_v = R \quad (1.9)$$

et

$$P = (\gamma - 1) \frac{E}{V} \quad (1.10)$$

L'équation d'état est:

$$E(V, S) = E_0 \left[ \frac{V}{V_0} \right]^{-(\gamma-1)} \exp\left[ (\gamma-1) \frac{S}{R} \right] \quad (1.11)$$

On a de plus

$$\Gamma = \gamma - 1 \quad (1.12)$$

$$g = \gamma - 1 \quad (1.13)$$

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2}(\gamma + 1) \quad (1.14)$$

Dans le cas général,  $E(V,S)$  est définie dans  $R^{++} \times R^+$ . On suppose que  $E$  est continûment différentiable et deux fois continûment différentiable par morceaux. Le graphe de  $E$  est donc une variété de dimension 2, appelée surface des états d'équilibre.  $P$  et  $T$  sont supposés positifs,  $E$  est donc une fonction monotone de  $V$  et  $S$ .

La stabilité thermodynamique impose à  $E$  d'être une fonction convexe. La matrice Hessienne des dérivées secondes doit être positive, ce qui est équivalent à:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial^2 S|_V} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial^2 V|_S} \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 E}{\partial^2 S|_V} \frac{\partial^2 E}{\partial^2 V|_S} \geq \left(\frac{\partial^2 E}{\partial S \partial V}\right)^2 \quad (1.15)$$

La condition de stricte positivité se traduit par:

$$g \geq 0 \quad \text{ainsi que} \quad \gamma \geq 0 \quad \text{et} \quad \text{enfin} \quad \gamma g \geq \Gamma^2 \quad (1.16)$$

On en déduit que  $P$  est fonction décroissante de  $V$  et que  $T$  est une fonction croissante de  $S$ .

Pour assurer la stricte hyperbolicité du système des équations d'EULER, il faut imposer  $\gamma > 0$ .

Pour les équations d'EULER, on peut se contenter d'utiliser une équation d'état incomplète  $P = P(V,E)$ .

Une telle équation permet encore de calculer  $\gamma, \Gamma, \mathcal{G}$ .

En effet, par l'utilisation des fonctions composées, on obtient

$$\gamma = -\frac{V}{P} \frac{\partial P}{\partial V|_S} = -\frac{V}{P} \left[ \frac{\partial P}{\partial V|_E} - P \frac{\partial P}{\partial E|_V} \right] \quad (1.17)$$

$$\Gamma = \frac{V}{T} \frac{\partial P}{\partial S|_V} = V \frac{\partial P}{\partial E|_V} \quad (1.18)$$

### Proposition 1

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2} \left[ \gamma + 1 - \frac{V}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial V|_S} \right] \quad (1.19)$$

Démonstration: cf. [56]

Remarque (Menikoff - Plohr): La thermodynamique n'impose pas de contrainte

sur le signe de  $\mathcal{G}$ . Cependant pour beaucoup de matériaux  $\gamma > 1$  et varie lentement ( $\frac{\partial \ln \gamma}{\partial \ln V|_S} \ll 1$ ) aussi  $\mathcal{G} = \frac{1}{2}(\gamma + 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \ln V|_S})$  est strictement plus grand que 1. Par contre près des transitions de phase  $\mathcal{G}$  peut être négatif •

### 1.1.2 Le Problème de Riemann

Le problème de Riemann est le problème aux valeurs initiales composées d'un état droit et d'un état gauche séparés par une discontinuité.

On fait quelques hypothèses physiquement réalistes sur le comportement asymptotique des variables:

- 1)  $P(V, S) \rightarrow \infty$  quand  $V \rightarrow 0$
- 2)  $P(V, S) = 0$  quand  $V \rightarrow \infty$
- 3)  $E(V, S) \rightarrow \infty$  quand  $S \rightarrow \infty$
- 4)  $P(V, S) \rightarrow \infty$  quand  $S \rightarrow \infty$

#### **Théorème 1** (Théorème de BETHE-WEYL)

La courbe d'HUGONIOT (ou courbe de choc) issue de l'état initial  $(V_1, S_1)$  coupe chaque isentrope au moins une fois.

De plus si  $\mathcal{G} > 0$  le long d'une isentrope alors la courbe de HUGONIOT la coupe exactement une fois et dans ce cas  $V_2 < V_1$  et  $|u_2 - \sigma| < c_2$  si  $S_2 > S_1$

Démonstration: cf. [56]

### 1.1.3 Adaptation de la Méthode développée pour les gaz parfaits aux gaz réels

#### Paramétrisation des courbes de détente

L'exposant adiabatique est  $\gamma = \frac{\rho}{P} \frac{\partial P}{\partial \rho|_S}$  et permet de paramétrer la courbe

de détente avec  $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{P\gamma} dP$  le long d'une isentrope

Pour la 1-onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{P}{P_l} = e^{-x} \text{ pour } x \geq 0 \\ \frac{\rho}{\rho_l} = e^{\int_0^x -\frac{1}{\gamma} ds} \\ u = u_l - \sqrt{\frac{P_l}{\rho_l}} \int_0^x \frac{e^{-\frac{1}{2}(s - \int_0^s \frac{1}{\gamma} d\tau)}}{\sqrt{\gamma}} ds \end{array} \right. \quad (1.20)$$

De même pour la 3 - onde , on a que P et  $\rho$  décroissent le long de l' isentrope :  
 Pour la 3-onde de détente , on obtient pour  $x \geq 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{P}{P_l} = e^x \\ \frac{\rho}{\rho_l} = e^{\int_0^x -\frac{1}{\gamma} ds} \\ u = u_l + \frac{c_l}{\sqrt{\rho_l}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}(s - \int_0^s \frac{1}{\gamma} d\tau)} \frac{ds}{\sqrt{\gamma}} \end{array} \right. \quad (1.21)$$

### Paramétrisation des Courbes de Choc

On utilise les équations:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta m = 0 \\ \Delta P + m \Delta v = 0 \\ \frac{1}{2} m \Delta v^2 + m \Delta E + \Delta(Pv) = 0 \end{array} \right. \quad (1.22)$$

où  $m = \rho v$ ,  $v = u - \sigma$ ,  $\sigma$  est la vitesse du choc.

On a  $\gamma = \frac{\rho c^2}{P}$  où  $c^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho|_s} > 0$ ;

on pose

$$\alpha = 1 + \frac{P}{\rho E} \quad (1.23)$$

On obtient les 3 équations:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta[m] = 0 \\ \Delta[P + mv] = 0 \\ \Delta[v^2 + c^2 \frac{2\alpha}{\gamma(\alpha-1)}] = 0 \end{array} \right. \quad (1.24)$$

L' accroissement de l' entropie est équivalent aux inégalités de Lax:

$$\sigma < u_l - c_l \text{ et } u_r - c_r < \sigma < u_r$$

$$\sigma - u_l < -c_l \text{ donc } -v_r < -c_r \text{ ou } c_l < v_l$$

$$v_r - c_r < 0 < v_r \text{ soit } 0 < v_r < c_r \text{ et } c_l < v_l \text{ pour les 1-chocs}$$

Pour les 3-chocs , les inégalités s' écrivent:

$$-c_l < v_l < 0 \text{ et } v_r < -c_r < 0$$

Pour les 1-chocs comme pour les 3-chocs ,  $v_l \neq 0$   $v_r \neq 0$  donc  $m \neq 0$  (le cas  $m = 0$  correspondant à la discontinuité de contact ).

Pour les 1-chocs  $l = 1$  ,  $r = 2$ .

Pour les 3-chocs  $l = 2$  ,  $r = 1$ .

Alors pour les 1-chocs , on a:

$$v_1 > c_1 > 0 \quad v_2 > c_2 > 0 \text{ donc } v_1^2 > c_1^2 \quad v_2^2 > c_2^2$$

Alors pour les 3-chocs , on a:

$$v_1 < -c_1 < 0 \quad -c_2 < v_2 < 0 \text{ donc } v_1^2 > c_1^2 \quad v_2^2 < c_2^2$$

Pour  $\Pi = \frac{P_2}{P_1}$  , on pose  $x = -\log(\Pi)$  et on obtient  $e^{-x} > 1$ , donc:

$$\text{Courbe de 1-choc avec } x \leq 0 \left\{ \begin{array}{l} \frac{P_r}{P_l} = e^{-x} \\ \frac{\rho_r}{\rho_l} = \frac{1 + e^{-x} \frac{\alpha_r + 1}{\alpha_r - 1}}{e^{-x} + \frac{\alpha_l + 1}{\alpha_l - 1}} \quad \text{où } \alpha_r = \alpha_r(x) \\ \frac{u_r - u_l}{c_l} = - \left[ \frac{2}{\gamma_l} \frac{e^{-x} - 1}{\alpha_l - 1} \frac{e^{-x} \frac{\alpha_l - 1}{\alpha_r - 1} - 1}{1 + e^{-x} \frac{\alpha_r + 1}{\alpha_r - 1}} \right]^{1/2} \end{array} \right. \quad (1.25)$$

De même ,

$$\text{Courbe de 3-choc avec } x \geq 0 \left\{ \begin{array}{l} \frac{P_r}{P_l} = e^x \\ \frac{\rho_r}{\rho_l} = \frac{1 + e^x \frac{\alpha_r + 1}{\alpha_r - 1}}{e^x + \frac{\alpha_l + 1}{\alpha_l - 1}} = \frac{e^{-x} + \frac{\alpha_r + 1}{\alpha_r - 1}}{1 + e^{-x} \frac{\alpha_l + 1}{\alpha_l - 1}} \quad \text{où } \alpha_r = \alpha_r(x) \\ \frac{u_r - u_l}{c_l} = - \left[ \frac{2}{\gamma_l} \frac{1 - e^{-x}}{\alpha_l - 1} \frac{1 - e^{-x} \frac{\alpha_l - 1}{\alpha_r - 1}}{1 + e^{-x} \frac{\alpha_r + 1}{\alpha_r - 1}} \right]^{1/2} \end{array} \right. \quad (1.26)$$

Pour la discontinuité de contact:

$$\frac{P_r}{P_l} = 1 , \quad \frac{\rho_r}{\rho_l} = e^x \text{ et } u_r - u_l = 0 \quad (1.27)$$

La 1- famille est définie donc par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_r}{\rho_l} = f_1(x) = \begin{cases} \frac{P_r}{P_l} = e^{-x}, & x \in \mathfrak{R} \\ e^{-\int_0^x \frac{1}{\gamma} ds}, & x \geq 0 \\ 1 + e^{-x} \frac{\alpha_r + 1}{\alpha_r - 1} \\ e^{-x} + \frac{\alpha_l + 1}{\alpha_l - 1}, & x \leq 0 \end{cases} \\ \frac{u_r - u_l}{c_l} \sqrt{\gamma_l} = h_1(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{e^{-\frac{1}{2}(s - \int_0^s \frac{1}{\gamma} d\tau)}}{\sqrt{\gamma}} ds, & x \geq 0 \\ -[2 \frac{e^{-x} - 1}{\alpha_l - 1} \frac{e^{-x} \frac{\alpha_l - 1}{\alpha_r - 1} - 1}{1 + e^{-x} \frac{\alpha_r + 1}{\alpha_r - 1}}]^{1/2}, & x \leq 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad (1.28)$$

La 3- famille est définie par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_r}{\rho_l} = f_3(x) = \begin{cases} \frac{P_r}{P_l} = e^x, & x \in \mathfrak{R} \\ e^{\int_0^x \frac{1}{\gamma} ds}, & x \geq 0 \\ e^{-x} + \frac{\alpha_r + 1}{\alpha_r - 1} \\ 1 + e^{-x} \frac{\alpha_l + 1}{\alpha_l - 1}, & x \leq 0 \end{cases} \\ \frac{u_r - u_l}{c_l} \sqrt{\gamma_l} = h_3(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{e^{-\frac{1}{2}(s - \int_0^s \frac{1}{\gamma} d\tau)}}{\sqrt{\gamma}} ds, & x \geq 0 \\ -[2 \frac{1 - e^{-x}}{\alpha_l - 1} \frac{1 - e^x \frac{\alpha_l - 1}{\alpha_r - 1}}{1 + e^x \frac{\alpha_r + 1}{\alpha_r - 1}}]^{1/2}, & x \leq 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad (1.29)$$

On définit les transformations  $T_x^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, 3$  par:

$$T_{x_1}^1 : v = (f_1(x_1)v_1, e^{-x_1}v_2, v_3 + (v_2/v_1)^{1/2}h_1(x_1)) \quad (1.30)$$

où  $(v_1, v_2, v_3) = v = (\rho, P, u)$

$$T_{x_2}^2 : v = (e^{x_2}v_1, v_2, v_3) \quad (1.31)$$

$$T_{x_3}^3 : v = (f_3(x_3)v_1, e^{x_3}v_2, v_3 + (v_3/v_1)^{1/2}h_3(x_3)) \quad (1.32)$$

Résoudre le problème de Riemann revient à trouver des réels  $x_1, x_2, x_3$  tels que :

$$v_r = T_{x_3}^3(T_{x_2}^2(T_{x_1}^1(v_l)))$$

ou encore :

$$\begin{cases} \rho_r = f_3(x_3)e^{x_2}f_1(x_1)\rho_l \\ P_r = e^{x_3}e^{-x_1}P_l \\ u_r = u_l + \sqrt{\frac{P_l}{\rho_l}}h_1(x_1) + h_3(x_3)\sqrt{\frac{P_l}{\rho_l}}e^{-\frac{x_1+x_2}{2}}(f_1(x_1))^{-1/2} \end{cases} \quad (1.33)$$

On définit les trois paramètres A , B , C tels que:

$$A = \frac{\rho_r}{\rho_l}, B = \frac{P_r}{P_l}, C = u_r - u_l$$

On a :  $x_3 - x_1 = LnB$  et  $f_1(x_1)e^{x_2}f_3(x_3, x_2, x_1)A$

$h_1(x_1)$  est croissant, il faudrait savoir si  $X = \sqrt{\frac{e^{-x_1}}{e^{x_2}f_1(x_1)}}h_3(x_3)$  est croissant :

$$X = \sqrt{\frac{e^{-x_1}f_3(x_3)}{A}}h_3(x_3) = \sqrt{\frac{e^{x_3-x_1}}{A}}\sqrt{\frac{f_3(x_3)}{e^{x_3}}}h_3(x_3)$$

Si  $x_3 \geq 0$

$$X(x) = \sqrt{\frac{B}{A}}e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1}{\gamma} d\tau \int_0^s \frac{e^{\frac{s}{2} - \frac{1}{2} \int_0^s \frac{1}{\gamma} d\tau}}{\sqrt{\gamma}} ds$$

ou

$$X(x) = \sqrt{\frac{B}{A}} \int_0^x \frac{e^{\frac{s-x}{2} - \frac{1}{2} \int_x^s (\frac{1}{\gamma} d\tau)}}{\sqrt{\gamma}} ds$$

On en déduit que X est monotone pour  $x \leq 0$  .Il reste alors à étudier le problème sur les courbes de choc •

Une condition suffisante pour que X soit croissante est que  $0 < \mathcal{G} \leq \frac{1}{2}(\gamma + 1)$ .

Cela conduit au théorème suivant( cf. [56]) :

**Théorème 2** Si toutes ces hypothèses, certainement trop fortes, sont vérifiées:

$$\Gamma \geq \alpha - 1, \mathcal{G} > 0, \mathcal{G} \leq \frac{1}{2}(\gamma + 1) \text{ et } \gamma \leq \frac{1}{2}(\Gamma + \alpha + 1)$$

pour résoudre pour  $\alpha$  fixé dans une étape de l' itération :

$$u_r - u_l = C = \sqrt{\frac{P_l}{\rho_l}}[h_1(x) + \sqrt{\frac{B}{A}}\sqrt{\frac{f_3(x + LnB)}{e^{x+LnB}}}h_3(x + LnB)]$$

on vérifie que la fonction dans le membre de gauche est croissante, il existe une unique solution ou pas de solution si  $C$  est trop grand, et alors il y a apparition du vide

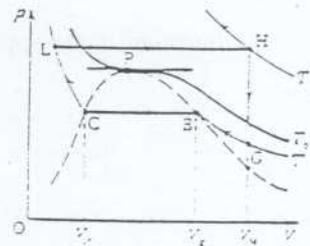
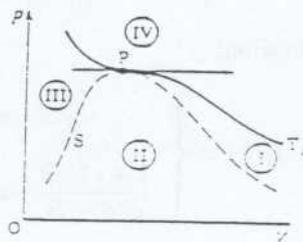
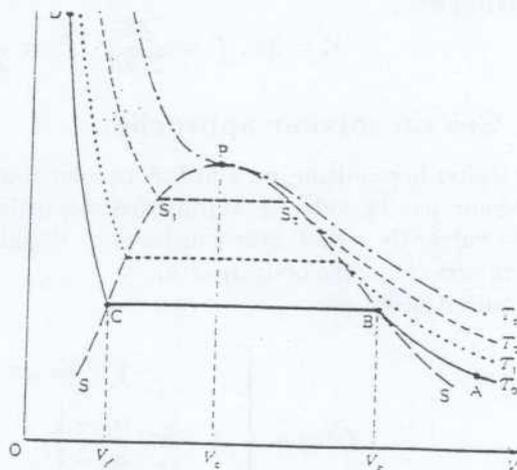
L'application est effectuée pour l'étude d'un gaz vérifiant l'équation de VAN DER WAALS.

VAN DER WAALS a trouvé que les isothermes d'un gaz réel n'étaient approchées des isothermes d'un gaz réel dans une région limitée de l'espace.

Il a proposé une équation d'état qui se rapproche plus des résultats mesurés :

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

Cette équation donne une bonne approximation de l'isotherme sauf sous la courbe de saturation. Les points A et B sont tels que  $S_1$  et  $S_2$  sont égales. Le sommet de la courbe de saturation est un point où la dérivée de  $P$  s'annule ainsi que la dérivée seconde. La température de cette isotherme s'appelle la température critique.



La pression et le volume du point P s'appellent volume et température critique.

Dans la région IV, le fluide est toujours à l'état gazeux.

Dans la région I, il est à l'état gazeux mais peut être liquifié le long d'une isotherme.

Dans la région II, il est à l'équilibre liquide vapeur. La vitesse du son est pratiquement nulle.

Dans la région III, il est à l'état liquide;

On a supposé en première approximation que le fluide est polytropique.

L'énergie interne:

$$E = c_v T - a\rho + E_0$$

L'entropie S

$$S = C_V \text{Log}T + R \text{Log}(V - b) + S_0$$

la vitesse du son

$$c^2 = -2a\rho + \frac{\frac{P}{\rho^2} + a}{\frac{1}{\rho} - b} \left(1 + \frac{R}{C_V}\right)$$

le point critique:

$$V_c = 3b, T_c = \frac{8a}{27bR}, P_c = \frac{a}{27b^2}$$

#### 1.1.4 Cas du solveur approché

Pour traiter le problème, on a utilisé un solveur approché défini comme suit.

On va définir par la suite les approximations utilisées dans le schéma où  $\gamma_l$  désigne la valeur de  $\gamma$  de l'état gauche et  $\gamma_r$  désigne la valeur de  $\gamma$  de l'état droit. Il en sera de même pour  $\alpha_l$  et  $\alpha_r$ .

Pour  $f_1$  qui est défini par:

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-\int_0^x \frac{1}{\gamma} ds}, & x \geq 0 \\ 1 + e^{-x} \frac{\alpha_r + 1}{\alpha_r - 1}, & x \leq 0 \\ e^{-x} + \frac{\alpha_l + 1}{\alpha_l - 1}, & x \leq 0 \end{cases} \quad (1.34)$$

on prend pour approximation:

$$\bar{f}_1(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{\gamma_l} x}, & x \geq 0 \\ \frac{1 + e^{-x} B}{e^{-x} + B}, & x \leq 0 \end{cases} \quad (1.35)$$

où

$$B = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_r + 1}{\alpha_r - 1} + \frac{\alpha_l + 1}{\alpha_l - 1} \right)$$

De même pour  $h_1(x)$

$$h_1(x) = \begin{cases} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}(s - \int_0^s \frac{1}{\gamma} d\tau)} ds, & x \geq 0 \\ -[2 \frac{e^{-x} - 1}{\alpha_l - 1} \frac{e^{-x} \frac{\alpha_l - 1}{\alpha_r - 1} - 1}{1 + e^{-x} \frac{\alpha_r + 1}{\alpha_r - 1}}]^{1/2}, & x \leq 0 \end{cases} \quad (1.36)$$

On prend pour approximation:

$$\bar{h}_1(x) = \begin{cases} (1 - e^{-\frac{1}{2} \frac{\gamma_l - 1}{\gamma_l} x}) 2 \frac{\sqrt{\gamma_l}}{\gamma_l - 1}, & x \geq 0 \\ -[2 \frac{e^{-x} - 1}{\alpha_l - 1} \frac{e^{-x} \frac{\alpha_l - 1}{\bar{\alpha} - 1} - 1}{1 + e^{-x} \frac{\bar{\alpha} + 1}{\bar{\alpha} - 1}}]^{1/2}, & x \leq 0 \end{cases} \quad (1.37)$$

en notant que

$$\bar{h}_1'(x) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\gamma_l - 1}{\gamma_l} x} > 0$$

et

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_l + \alpha_r}{2}$$

Quand  $\bar{h}_1$  est utilisé à la place de  $h_1$  dans le calcul de la racine de X pour chercher  $x_1$  les rôles de  $\alpha_l$  et  $\alpha_r$  sont inversés ainsi que ceux des  $\gamma$ .

Aussi pour  $f_3$  défini par:

$$f_3(x) = \begin{cases} e^{\int_0^x \frac{1}{\gamma} ds}, & x \geq 0 \\ \frac{e^{-x} + \frac{\alpha_r + 1}{\alpha_r - 1}}{1 + e^{-x} \frac{\alpha_l + 1}{\alpha_l - 1}}, & x \leq 0 \end{cases} \quad (1.38)$$

est approximé par:

$$\bar{f}_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^{\gamma_r} x}, & x \geq 0 \\ \frac{e^{-x} + C}{1 + e^{-x} C}, & x \leq 0 \end{cases} \quad (1.39)$$

où C désigne la quantité

$$C = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_r + 1}{\alpha_r - 1} + \frac{\alpha_l + 1}{\alpha_l - 1} \right)$$

## 1.2 Schémas du second ordre de type VAN LEER

### 1.2.1 Introduction

Cette partie assez ancienne comme recherche porte sur la construction de schémas numériques pour les lois de la Mécanique des Fluides comme les écoulements compressibles. Sur ce sujet, il y a eu beaucoup de travaux et on s'intéresse dans un premier temps aux hypothèses afin d'assurer la convergence de méthodes numériques pour les systèmes hyperboliques. En ce qui concerne la méthode de GODOUNOV, les travaux de [111] ont permis de montrer la convergence pour une équation scalaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u, x, t)) = g(u, x, t)$$

Afin de traiter le problème, les travaux de [91], ont montré l'existence d'une solution entropique à partir des résultats suivants. Soit le problème suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (f(u, x, t)) + g(u, x, t) = 0. \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (1.40)$$

alors la solution vérifie:  $u \in L^\infty(\mathbb{R}^p \otimes ]0, T[)$

$$\forall k \in \mathbb{R}, \forall \Phi \in C_{0,+}^2(\mathbb{R}^p \otimes ]0, T[)$$

$$\int \int_{\mathbb{R}^p \otimes ]0, T[} \left[ |u - k| \frac{\partial \Phi}{\partial t} + Sg(u - k)(f(u, x, t) - f(k, x, t)) \text{grad} \Phi - Sg(u - k)\Phi(\text{div} f(u, x, t) + g(u, x, t)) \right] dx dt \geq 0$$

$$\exists \Omega \in [0, T] \text{ de mesure nulle } \forall R > 0 \lim_{t \rightarrow 0, t \in \Omega} \int_{|x| < R} |u(x, t) - u_0(x)| = 0$$

On peut aussi en déduire que la solution est unique par:

Soient  $u$  et  $v$  deux solutions de données initiales  $u_0$  et  $v_0$ , alors

$$\forall R > 0 \int_{|x| < R} |u(x, t) - v(x, t)| < e^{\alpha_0 t} \int_{|x| < R + Nt} |u_0 - v_0| dx$$

où  $\alpha_0$  est la  $g$ - constante de Lipschitz avec

$$N = \text{Sup}_{x,t} \left| \sum_{x,t}^p \left( \frac{\partial f_d}{\partial u}(u, x, t) \right)^2 \right|$$

### 1.2.2 Schéma de VAN LEER

Soit une décomposition en intervalle de longueur constante  $\Delta x$  telle que les extrémités  $x_{j+1/2}$  soient telles que  $x_{j+1/2} - x_{j-1/2} = \Delta x$ . A chaque étape, on définit dans l'intervalle  $]x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[$  et chaque pas de temps  $n\Delta t$ , une solution constante  $u_j^n$ .

On considère le problème  $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u, x_{j-1/2}, t)) = 0$  avec les données  $u(x, 0) = u_R$  pour  $x > x_{j-1/2}$  et  $u(x, 0) = u_L$  pour  $x < x_{j-1/2}$ . La solution est notée

$$u(x, t) = W_R\left(\frac{x - x_{j-1/2}}{t}; u_L, u_R, x_{j-1/2}\right) \quad (1.41)$$

Cette solution est appelé solution élémentaire du problème de RIEMANN.

A la suite donnée  $u_j^n$ , on associe la suite  $\delta_j^n$  qui est une pente dans la maille considérée qui doit respecter la notion de monotonie locale soit encore

$$\begin{cases} \text{si } u_{j-1}^n \leq u_j^n \leq u_{j+1}^n, \delta_j^n = \text{Inf}(u_{j+1}^n - u_j^n, u_j^n - u_{j-1}^n) \\ \text{si } u_{j-1}^n \geq u_j^n \geq u_{j+1}^n, \delta_j^n = \text{Sup}(u_{j+1}^n - u_j^n, u_j^n - u_{j-1}^n) \\ \text{dans les autres cas } \delta_j^n = 0 \end{cases} \quad (1.42)$$

A partir de ces quantités, on définit un schéma prédicteur correcteur permettant de donner des solutions au demi-pas de temps par

$$\begin{cases} u_{j+1/2, -}^{n+1/2} = u_j^n + \frac{1}{2}\delta_j^n + g(u_j^n + 1/2\delta_j^n, x_{j+1/2}, t^n) \frac{\Delta t}{2} \\ \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f(u_j^n + \frac{1}{2}\delta_j^n, x_{j+1/2}, t^n) - (f(u_j^n - \frac{1}{2}\delta_j^n, x_{j+1/2}, t^n))) \\ \text{et } u_{j+1/2, +}^{n+1/2} = u_{j+1}^n - \frac{1}{2}\delta_{j+1}^n + g(u_j^n + \frac{1}{2}\delta_j^n, x_{j+1/2}, t^n) \frac{\Delta t}{2} \\ \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f(u_{j+1}^n + \frac{1}{2}\delta_{j+1}^n, x_{j+1/2}, t^n) - (f(u_{j+1}^n - \frac{1}{2}\delta_{j+1}^n, x_{j+1/2}, t^n))) \end{cases} \quad (1.43)$$

On peut donc définir désormais une forme conservative du schéma par

$$\begin{cases} v_{j+1/2}^{n+1/2} = W_R(0, u_{j+1/2, -}^{n+1/2}, u_{j+1/2, +}^{n+1/2}, x_{j+1/2}) \\ \text{et } u_j^{n+1} = u_j^n + \\ \frac{\Delta t}{\Delta x}(f(v_{j+1/2}^{n+1/2}, x_{j+1/2}, t^{n+1/2}) - f(v_{j-1/2}^{n+1/2}, x_{j-1/2}, t^{n+1/2})) \end{cases} \quad (1.44)$$

Ceci représente le schéma de VAN LEER à quatre étapes qu'il faudra modifier afin d'assurer sa convergence.

### 1.2.3 Modification du schéma et convergence

Par rapport au schéma initial, l'étape de calcul des pentes se modifie de la manière suivante. On introduit un paramètre  $\lambda$  pour l'instant libre d'être un

réel positif.

On modifie le schéma de la manière suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } u_{j-1}^n \leq u_j^n \leq u_{j+1}^n, \delta_j^n = \lambda \text{Inf}(u_{j+1}^n - u_j^n, u_j^n - u_{j-1}^n) \\ \text{si } u_{j-1}^n \geq u_j^n \geq u_{j+1}^n, \delta_j^n = \lambda \text{Sup}(u_{j+1}^n - u_j^n, u_j^n - u_{j-1}^n) \\ \text{dans les autres cas } \delta_j^n = 0 \end{array} \right. \quad (1.45)$$

Soient

$$M = \text{Sup}|f'(u)| \text{ et } q = \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (1.46)$$

On en déduit les propositions suivantes

**Proposition 2** *Sous la condition*

$$\lambda \leq \frac{1}{1 + qM},$$

la structure locale de monotonie est préservée si

$$qM \leq 1$$

Démonstration: cf. [52]

**Proposition 3** *Sous la condition*

$$\lambda \leq \text{inf}\left(\frac{2}{qM} \frac{1 - qM}{1 + qM}, \frac{1}{1 + qM}\right)$$

si

$$qM \leq 1$$

alors

$$\forall j \in Z, |u_j^{n+1}| \leq \text{inf}(|u_{j-1}^n|, |u_j^n|, |u_{j+1}^n|)$$

Démonstration: cf. [52]

**Théoreme 3** *Sous les conditions*

$$\lambda \leq \text{inf}\left(\frac{2}{qM} \frac{1 - qM}{1 + qM}, \frac{1}{1 + qM}\right)$$

si

$$qM \leq 1,$$

alors la suite issue du schéma de VAN LEER modifié converge dans  $L^1_{loc}(R \otimes ]0, T[)$  vers une solution

$$u \in L^\infty(R \otimes ]0, T[) \cap BV_{loc}(R \otimes ]0, T[)$$

solution du problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial t} = 0$$

de données initiales  $u_0$

Démonstration: cf. [52]

### Convergence vers la solution entropique

#### Proposition 4

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{Z}$$

si  $u_j^n$  n'est pas un extremum, sous les conditions

$$\lambda \leq \inf\left(\frac{2}{qM} \frac{1-qM}{1+qM}, \frac{1}{1+qM}\right),$$

si

$$qM \leq 1$$

alors

$$|u_j^{n+1} - k| \leq |u_j^n - k| - qSg(v_{j+1/2}^{n+1/2} - k) |f(v_{j+1/2}^{n+1/2}) - f(k)| + qSg(v_{j-1/2}^{n+1/2} - k) |f(v_{j-1/2}^{n+1/2}) - f(k)| + C|\delta_j^n| \quad (1.47)$$

avec  $C \leq 4$

Démonstration: cf. [52]

On en déduit le théorème suivant:

**Théoreme 4**  $\forall k \in \mathbb{R}, \forall \Phi \in C_{0,+}^2(\mathbb{R} \otimes ]0, T[)$  la suite converge vers la solution  $u$  telle que

$$\int \int_{\mathbb{R}^p \otimes ]0, T[} \left[ |u - k| \frac{\partial \Phi}{\partial t} + Sg(u - k)(f(u, x, t) - f(k, x, t)) \text{grad} \Phi - Sg(u - k)\Phi(\text{div} f(u, x, t) + g(u, x, t)) \right] dx dt \geq 0$$

sous les conditions

$$\lambda \leq \inf\left(\frac{2}{qM} \frac{1-qM}{1+qM}, \frac{1}{1+qM}\right),$$

si  $qM \leq 1$  et  $\lambda \leq C\Delta x^\epsilon$  ( $C > 0$  et  $\epsilon > 0$ )

Démonstration: cf. [52]

## Estimation de la donnée initiale

**Théoreme 5** *Sous les conditions*

$$\lambda \leq \inf\left(\frac{2}{qM} \frac{1-qM}{1+qM}, \frac{1}{1+qM}\right),$$

avec  $qM \leq 1/2$ ,  $\lambda \leq C\Delta x^{\epsilon_1}$  et  $\lambda = 1 - 2C_2 \frac{\Delta t^{1+\epsilon_2}}{\Delta x - M\Delta t}$  ( $C > 0, C_2 > 0$  et  $\epsilon > 0, \epsilon_2 > 0$ ), alors  $\forall k \in R, \forall \Phi \in C_{0,+}^2(R \otimes ]0, T[)$  la suite converge vers la solution  $u$  telle que

$$\int \int_{R^p \otimes ]0, T[} \left[ |u-k| \frac{\partial \Phi}{\partial t} + Sg(u-k)(f(u, x, t) - f(k, x, t)) \text{grad} \Phi - Sg(u-k)\Phi(\text{div} f(u, x, t) + g(u, x, t)) \right] dx dt \geq 0$$

et  $u(x, 0) = u_0(x)$  c'est à dire vers la solution entropique.

Démonstration: cf. [52].

Cette étape permet par la suite de définir un schéma appliqué à la dynamique des gaz.

### 1.2.4 Etablissement d'un schéma conservatif en dynamique des gaz

#### Cas 1D

Sans rappeler les équations conservatives en dynamique des gaz, on définit sur un maillage non structuré un schéma prédicteur correcteur sur les variables conservatives.

Le passage en non structuré ne pose pas de difficulté particulière, toute la démonstration précédente n'utilisant pas l'usage de la régularité du maillage mais seulement les bornes sur le pas d'espace à respecter.

Les variables conservatives sont donc la densité  $\rho$ , le débit  $\rho u$  et l'énergie totale  $\rho E$  sur lesquelles sont définies les valeurs moyennes et les pentes. A partir de ces valeurs, est définie l'énergie interne par  $e$  telle que  $\rho e = \rho E - \frac{1}{2}\rho u^2$ . Dans l'étape de prédiction, comme nous sommes dans le cas d'un système, la dérivée est remplacée par la matrice jacobienne et utilise les 3 pentes définies.

A partir de ces quantités, on peut donc définir les prédictions sur l'énergie interne. Comme la prédiction utilise une étape affine en temps sur les quantités conservatives, alors  $\rho(\rho e) = \rho(\rho E) - \frac{1}{2}(\rho u)^2$  est une fonction, dans chaque maille, du pas de temps de second degré telle que pour l'instant initial elle reste positive. Par résolution d'une équation du second degré, dans chaque maille, on peut assurer la positivité de toutes les quantités conservatives et aussi de l'énergie

interne .

La thermodynamique générale permet alors de définir la Pression, d'assurer un problème de Riemann et donc en faisant appel à cette résolution ( comme dans le premier chapitre), d'en déduire un schéma conservatif en dynamique des gaz qui peut être employé pour une thermodynamique générale.

En ce qui concerne les conditions limites, elles sont associées soit à des conditions d'entrée supersonique pour lesquelles tout est spécifié soit à des conditions d'un autre type (entrée subsonique, sortie quelconque, paroi) pour lesquelles une maille fictive définissant un problème de Riemann au bord du domaine est spécifié ( comme dans cf. [42] )

### Cas 2D

Il s'agit d'une présentation succincte d'une méthode introduite en 2D et 3D pour l'étude des écoulements compressibles visqueux ou pas (équations de NAVIER-STOKES et d'EULER).

En 2D le système s'écrit de manière conservative sous la forme

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(F(U)) + \frac{\partial}{\partial y}(G(U)) = H(U) \quad (1.48)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} U = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^t \\ F(U) = (\rho u, \rho u^2 + P, \rho uv, (\rho E + P)u)^t \\ G(U) = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + P, (\rho E + P)v)^t \\ H(U) = \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x} (G_1(U) \frac{\partial U}{\partial x}) + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial y} (G_2(U) \frac{\partial U}{\partial x}) \\ \quad + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x} (G_3(U) \frac{\partial U}{\partial y}) + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial y} (G_4(U) \frac{\partial U}{\partial y}) \end{array} \right. \quad (1.49)$$

où Re est le nombre de REYNOLDS et

$$\vec{F}(U) = (F, G)^t$$

On introduit dans un premier temps le schéma de GODOUNOV au premier ordre:

$V(i)$  l'ensemble des cellules voisines de la cellule "i" (ne comprenant pas la cellule i)

$l_{ij}$  la mesure de l'interface:  $l_{ij} = |\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j|$

$n_{ij}$  le vecteur normal unité orienté de la cellule i vers la cellule j

Soit  $V^*(\frac{x}{t}, V_l, V_r)$  la solution du problème (PR) avec comme états initiaux gauche et droit  $V_l, V_r$ . Il faut assurer que les solutions provenant des différentes interfaces ne s'intersectent pas dans la cellule.

Alors

$$\begin{aligned} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega_j} \vec{F}(U) \vec{n} d\sigma dt &\simeq \int_{t^n}^{t^{n+1}} \sum_{k \in V(j)} \vec{F}(V^*(0, V_j, V_k)) \vec{n}_{jk} l_{jk} \\ &\simeq \Delta t \sum_{k \in V(j)} \vec{F}(V^*(0, V_j, V_k)) \vec{n}_{jk} l_{jk} \end{aligned}$$

et donc

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_j|} \sum_{k \in V(j)} \vec{F}(V^*(0, V_j, V_k)) \vec{n}_{jk} l_{jk} \quad (1.50)$$

Si on note  $\mathcal{F}_{jk}(V^*, n_{jk})$  le flux numérique normal à l'interface entre  $V_j$  et  $V_k$  :

$$\mathcal{F}_{jk}(V^*, n_{jk}) = \vec{F}(V^*(0, V_j, V_k)) \vec{n}_{jk} \quad (1.51)$$

$$\mathcal{F}_{jk}(V^*, n_{jk}) = \begin{pmatrix} \rho^* u_n^* \\ \rho^* u_n^* \vec{u}^* + \left(\frac{2}{3} K^* + P^*\right) \vec{n} \\ u_n^* (\rho^* E^* + \frac{2}{3} K^* + P^*) \end{pmatrix} \quad (1.52)$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_j|} \sum_{k \in V(j)} \mathcal{F}_{jk}(V^*, n_{jk}) l_{jk} \quad (1.53)$$

On notera que dans cette formulation, les termes visqueux ne peuvent être pris en compte car la fonction approchée par cellule est constante. Aussi le traitement des équations d'EULER ou de NAVIER-STOKES est identique.

Afin de traiter le problème par un schéma du type second ordre, on introduit dans chaque cellule une valeur moyenne et une pente dans chaque direction ( cela correspond pour les équations d'un monofluide compressible en 2D à 4 valeurs moyennes et à 8 dérivées - 4 pour chaque direction,  $d_j^n$  pour les dérivées en x et  $\delta_j^n$  pour les dérivées en y - soit à 12 quantités par maille.

On pose

$$\begin{cases} A(U) = \frac{\partial F}{\partial G} \\ B(U) = \frac{\partial U}{\partial U} \end{cases} \quad (1.54)$$

La méthode est semblable à celle développée en 1D en quatre étapes:

La première étape consiste à calculer les pentes à partir des valeurs moyennes en respectant la notion T.V.D. dans chaque direction d'espace.

La seconde consiste à faire une prédiction dans la maille qui peut s'écrire

$$U_{\partial T, \partial T_j}^{n+1/2} = U_{\partial T, \partial T_j}^n - \frac{\Delta t}{2} A_1 d_i^n - \frac{\Delta t}{2} A_2 \delta_i^n \quad (1.55)$$

où

$$A_1 = A(U_i^n) - \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial G_1}{\partial x}(U_i^n) d_i^n + \frac{\partial G_3}{\partial x}(U_i^n) \delta_i^n \right)$$

$$A_2 = B(U_i^n) - \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial G_2}{\partial y}(U_i^n) d_i^n + \frac{\partial G_4}{\partial y}(U_i^n) \delta_i^n \right)$$

La troisième étape consiste à intersector les ondes à travers un problème de RIEMANN ( qui ne prend en compte que les effets non visqueux )- qui est celui définit par les équations d'EULER).

La dernière étape consiste à utiliser une formulation conservative des équations dont les termes de flux sont issus de la solution du problème de RIEMANN à chaque interface.

Pour une présentation plus approfondie, cf. [47]. Il est à noter que pour le traitement des conditions limites, le même traitement pour les problèmes visqueux ou non est conduit en imposant que les gradients soient nuls à  $\infty$ , tout en conservant la méthodologie 1D développée le long de la normale au bord du domaine

•

### 1.3 Etude des schémas $S_\beta^\alpha$ et application à la dynamique des gaz

#### 1.3.1 Construction du schéma modifié et propriété

Dans le cadre d'utilisation de schémas explicites pour la Mécanique des Fluides, leur forme conservative permet l'utilisation de schémas développés par [109] ou [110].

Soit en effet un système de la forme

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(F(W)) = 0$$

et en notant  $W_j^n$  l'approximation de la solution dans la maille  $j$  et au pas de temps  $n$ , le schéma proposé appelé  $S_\beta^\alpha$  s'écrit en posant  $\sigma = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ :

$$\begin{cases} W_j^n = (1 - \beta)W_j^n + \beta W_j^n - \alpha \sigma [F(W_{j+1}^n) - F(W_j^n)] \\ W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{\sigma}{2\alpha} [(\alpha - \beta)F(W_{j+1}^n) + (2\beta - 1)F(W_j^n) + (1 - \alpha - \beta)F(W_{j-1}^n)] - \\ \frac{\sigma}{2\alpha} [F(W_j^n) - F(W_{j-1}^n)] \end{cases} \quad (1.56)$$

Dans le cas linéaire où  $F(W) = AW$ , ce schéma est stable sous la condition C.F.L.  $\sigma \rho(A) \leq 1$  si on a posé  $\rho(A)$  le rayon spectral de la matrice  $A$ .

Par contre, le cas non linéaire est totalement ouvert à notre connaissance. Aussi est utilisé la propriété d'homogénéité du flux en dynamique des gaz pour une loi d'état de type gaz parfait  $P = (\gamma - 1)\rho e$  qui va être quelque peu modifié afin

d'obtenir une stabilité de type  $L^2$ . En considérant les quantités conservatives  $W = (\rho, \rho u, \rho E)^t$ , et le flux associé  $F(W) = (\rho u, \rho u^2 + P, (\rho E + P)u)^t$  et en notant  $\rho_e = \rho E - \frac{1}{2}\rho u^2$ , dans le cas du gaz parfait, le flux  $F$  est homogène de degré un, soit donc le schéma modifié suivant que nous appellerons par la suite  $S$  défini ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} W_j^n = (1 - \beta)W_j^n + \beta W_{j+1}^n - \alpha \sigma [F(W_{j+1}^n) - F(W_j^n)] \\ W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{\sigma}{2\alpha} [(\alpha - \beta)F(W_{j+1}^n) + (2\beta - 1)F(W_j^n) + (1 - \alpha - \beta)F(W_{j-1}^n)] \\ \quad - \frac{\sigma}{2\alpha} \left[ \frac{dF}{dU} ((1 - \beta)W_j^n + \beta W_{j+1}^n) W_j^n - \frac{dF}{dU} ((1 - \beta)W_{j-1}^n + \beta W_j^n) W_{j-1}^n \right] \end{array} \right. \quad (1.57)$$

Ce schéma fait bien sûr partie de la classe des schémas à trois points que l'on peut écrire de manière conservative

$$W_j^{n+1} = W_j^n - \sigma [H(W_j^n, W_{j+1}^n) - H(W_{j-1}^n, W_j^n)] \quad (1.58)$$

en ayant posé

$$H(U, V) = \frac{\alpha - \beta}{2\alpha} F(V) - \frac{1 - \alpha - \beta}{2\beta} F(U) + \frac{1}{2\alpha} \frac{dF}{dU} ((1 - \beta)U + \beta V) [(1 - \beta)U + \beta V - \alpha \sigma (F(V) - F(U))] \quad (1.59)$$

On peut en déduire le théorème suivant:

**Théorème 6** *Pour un flux homogène de degré un, le schéma construit est un schéma du second ordre en temps et en espace (1.59)*

Démonstration: cf. [51]

### 1.3.2 Construction de solutions stationnaires et stabilité $L^2$

On peut construire des solutions stationnaires en cas de flux homogène de degré un pour la dynamique des gaz.

**Proposition 5** *Il existe des solutions stationnaires en écoulement compressible de type gaz parfait définies par :*

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= e^{At^2 + Bt + C} e^{i\lambda x} \\ \rho u(x, t) &= \frac{i}{\lambda} (2At + B) e^{At^2 + Bt + C} e^{i\lambda x} \\ \rho E(x, t) &= \left[ \frac{-2A}{\gamma - 1} - \frac{1}{2} (2At + B)^2 \right] \frac{e^{At^2 + Bt + C} e^{i\lambda x}}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Dans ce cas particulier, la fréquence spatiale est conservée.

Démonstration:cf. [51]

**Théoreme 7** Dans le cas du schéma modifié, alors  $\forall \alpha \neq 0, \forall \beta \neq 0$ , le système a une stabilité  $L^2$  non linéaire sous la condition C.F.L.  $\sigma\rho(A) \leq 1$  c'est à dire  $\forall n, \|W^n\|_{L^2} \leq C$  où  $C$  est indépendant de  $n$  avec  $W^n$  la suite d'ordre  $n$  définie par  $(W_j^n)_{j \in Z}$

Démonstration: cf. [51]

### 1.3.3 Solution entropique

**Proposition 6** Pour tout schéma équivalent à un schéma du second ordre, la solution numérique vérifie l'inégalité d'entropie si les termes visqueux sont d'ordre  $\Delta x^{1-\epsilon}$  avec  $\epsilon > 0$

Démonstration: cf. [51]

Cette méthode utilise les idées développées dans [87].

### 1.3.4 Solutions régulières en 1D plan, axisymétrique et sphérique

**Proposition 7** Dans des géométries 1D ( plan, axisymétrique ou sphérique ) les solutions régulières vérifient

$$\begin{cases} P = P_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \\ u - u_0 = \frac{2\omega}{\gamma - 1} (c - c_0) \text{ avec } \omega = \pm 1 \\ \rho - \rho_0 = k(\xi - \xi_0) \end{cases} \quad (1.60)$$

Démonstration: cf. [51]

**Proposition 8** Les solutions sont alors

$$u(\xi) = \frac{2}{(1+n)\gamma + 1 - n} \xi$$

où  $n = 0, 1$  ou  $2$  en fonction du cas plan, axisymétrique ou sphérique.

Démonstration:cf. [51]

**Proposition 9** Dans les cas axisymétriques et sphériques, on peut définir des solutions régulières vérifiant

$$c^2 + m(n) \frac{(\gamma - 1)^2}{2} u^2 = c_0^2$$

sont, avec  $m(1) = 1$  et  $m(2) = 3/2$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} P = P_0 \\ \rho = \rho_0 \\ u(\xi) = \frac{2}{(1+n)\gamma + 1 - n} \xi \end{array} \right. \quad (1.61)$$

Démonstration: cf. [51]

Cette méthode permet, sachant que les solutions choc sont semblables à celles du 1D des structures de solution en axisymétrique et en sphérique.

## Chapitre 2

# Etudes d'ondes réactives

### 2.1 Aspects stables et instables dans le cadre de la Combustion pour la réaction oxygène-hydrogène

#### 2.1.1 Notations et lois d'évolution d'espèces

L'indice  $i$  décrit la quantité du mélange pour laquelle on identifie:  $n_i$ : le nombre total par unité de volume

$m_i$ : la masse molaire

$c_i$ : la concentration molaire

$\omega_i$ : le poids moléculaire

$\rho_i$ : la densité définie par  $\rho_i = \omega_i c_i = m_i n_i$

$Y_i$ : la fraction massique  $Y_i = \frac{\rho_i}{\rho}$

$X_i$ : la fraction molaire  $X_i = \frac{c_i}{c}$

$\vec{v}_i$ : la vitesse de l'espèce  $i$

$\vec{V}_i$ : la vitesse relative de l'espèce  $i$  telle que  $\sum Y_i \vec{V}_i = 0$

$\rho$ : la densité totale

$c$ : le nombre total de moles avec  $c = \sum c_i$

$\vec{v}$ : la vitesse moyenne définie par  $\vec{v} = \sum Y_i \vec{v}_i$

$T$ : la température du mélange définie par  $\frac{3}{2}RT = \frac{3}{2}R \sum X_i T_i = \sum n_i \frac{m_i v_i^2}{2} \frac{1}{c}$

A partir de ces notations, les lois de conservations s'écrivent pour les espèces  $i$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{U}) = 0. \\ \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v} \times \vec{v}) + \nabla P = \sum \rho_i \vec{F}_i \\ \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \vec{v} \vec{\nabla} e = -\nabla Q - \mathcal{P} : \nabla v + \rho \sum Y_i \vec{F}_i \vec{v}_i \\ \frac{\partial(\rho Y_i)}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho Y_i(\vec{v} + \vec{V}_i)) = W_i \end{array} \right. \quad (2.1)$$

pour lesquelles les tenseurs de flux de pression et de température  $\mathcal{P}$  et  $Q$  sont donnés par:

$$\mathcal{P} = (p + (\frac{2}{3}\mu - \kappa)\vec{\nabla} \cdot \vec{v})I - \mu(\vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \vec{v})^t) \quad (2.2)$$

$$Q = -\lambda \vec{\nabla} T + \rho \sum_i k_i Y_i \vec{V}_i + RT \sum_{ij} \frac{X_j D_{T,i}}{\omega_i D_{ij}} (\vec{V}_i - \vec{V}_j) \quad (2.3)$$

où les coefficients de LAME sont  $\mu$ ,  $\kappa$  et  $\lambda$  le coefficient de FOURIER.

Les quantités  $(k_i, \frac{D_{T,i}}{D_{ij}}, W_i)$  sont associées aux lois de réaction et à l'influence réciproque de l'espèce  $i$  sur l'espèce  $j$ .

La loi d'évolution cinétique se traduit par la loi d'ARRHENIUS:

$$W_i = w_i \sum_k (\nu''_{i,k} - \nu'_{i,k}) B_k T^{\alpha_k} e^{-\frac{E_k}{RT}} \Pi_j (\frac{X_{jk}}{RT})^{\nu'_{j,k}} \quad (2.4)$$

où  $\nu''_{i,k}$  and  $\nu'_{i,k}$  sont les coefficients stochiométriques de l'espèce  $i$  apparaissant comme réactant et comme produit, respectivement.

La vitesse  $V_i$  est donnée par:

$$\vec{\nabla} X_i = \sum_j \frac{X_i X_j}{D_{ij}} (\vec{V}_i - \vec{V}_j) + (Y_i - X_i) \frac{\vec{\nabla} p}{p} + \frac{\rho}{p} \sum_j Y_i Y_j (\vec{F}_i - \vec{F}_j) + \sum_j \frac{X_i X_j}{\rho D_{ij}} (\frac{D_{T,j}}{Y_j} - \frac{D_{T,i}}{Y_i}) \frac{\vec{\nabla} T}{T} \quad (2.5)$$

Le problème est clos par les différentes lois d'état:

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \rho RT \sum_i \frac{Y_i}{\omega_i} \\ e = \sum_i h_i Y_i - \frac{p}{\rho} \\ h_i = h_i^0 + \int c_{p,i} dT \\ X_i = \frac{\frac{Y_i}{\omega_i}}{\sum_j \frac{Y_j}{\omega_j}} \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Il est à noter qu'une contrainte doit être respectée à savoir:  $\sum_i X_i = 1$

## 2.2 Etude simplifiée par travelling waves en 1D

Dans cette étude, on suppose les conditions suivantes vérifiées:

H1: Tout transfert radiatif est négligé soit  $D_{T,i} = 0$

H2: Les forces internes et le gradient de pression sont négligés,  $F_i = 0$  et  $\frac{\nabla p}{p} = 0$

H3: Tous les gaz ont le même  $c_p$  constant

H4: On suppose que  $\frac{4}{3}\mu + \kappa = \frac{\lambda}{c_p}$

Soient  $\epsilon_i = \frac{\rho Y_i (v + V_i)}{\rho v}$  et  $E = e + \frac{1}{2}v^2$

**Proposition 10** *Sous les hypothèses H1, H2, H3, H4, les travelling waves sont solutions du système suivant:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho v = m = cst \\ \rho v^2 + p - \left(\frac{4}{3}\mu + \kappa\right) \frac{dv}{dx} = cst \\ m \left(\sum_i h_i \epsilon_i + \frac{v^2}{2}\right) - \lambda \frac{dT}{dx} - \left(\frac{4}{3}\mu + \kappa\right) v \frac{dv}{dx} = cst \\ \frac{dX_i}{dx} = \frac{m}{\rho} \sum_j \frac{X_i X_j}{D_{ij}} \left(\frac{\epsilon_i}{Y_i} - \frac{\epsilon_j}{Y_j}\right) \\ \frac{d\epsilon_i}{dx} = \frac{W_i}{m} \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Démonstration : cf. [48]

Remarque: Si  $\kappa = 0$ , l'hypothèse H4 donne  $\frac{4}{3}\mu = \frac{\lambda}{c_p}$  ce qui conduit à un nombre de Prandtl  $Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda} = \frac{3}{4}$ . D'autre part comme  $Pr = \frac{4\gamma}{9\gamma - 5}$ , on a  $\gamma = \frac{15}{11} \simeq 1.36$

Par la suite, en notant par 0 la valeur en  $x = -\infty$  et par  $\infty$  la valeur en  $x = +\infty$ .

Soient les quantités sans dimension suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = \frac{c_p T + \frac{1}{2} v^2 - (c_p T_0 + \frac{1}{2} v_0^2)}{c_p T_\infty + \frac{1}{2} v_\infty^2 - (c_p T_0 + \frac{1}{2} v_0^2)} \\ \epsilon = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_{2,0}}{\epsilon_{2,\infty} - \epsilon_{2,0}} \\ Y = \frac{Y_2 - Y_{2,0}}{Y_{2,\infty} - Y_{2,0}} \\ \Phi = \frac{v}{v_0} \text{ et } \xi \text{ tel que } \frac{d\xi}{dx} = \frac{m c_p}{\lambda} \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Pour l'équation d'énergie, on obtient

$$\frac{d\tau}{d\xi} = \tau - \epsilon \quad (2.9)$$

De même, pour l'équation chimique, on trouve, par définition du nombre de Lewis  $Le = \frac{\lambda}{\rho D_{12} c_p}$ ,

$$\frac{dY}{d\xi} = Le(Y - \epsilon) \quad (2.10)$$

Pour l'équation de quantité de mouvement, soient  $\alpha' = \frac{q}{c_p T_0}$  et  $M_0 = \frac{v_0}{\sqrt{\gamma \frac{R}{W} T_0}}$

avec  $c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{R}{W}$ , alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}_\Phi(\Phi, \tau) = \Phi - 1 + \frac{1}{\gamma M_0^2} \left[ \frac{1}{\Phi} (1 + \alpha' \tau - \frac{1}{2} (\gamma - 1) M_0^2 (\Phi^2 - 1)) - 1 \right] \\ \frac{d\Phi}{d\xi} = F_\Phi(\Phi, \tau) \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Dans cette formulation, si on pose

$$\mathcal{F}_\epsilon = \frac{\lambda v_0}{c_p m} \Phi B_1 T^{\alpha_1} (1 - Y) e^{-\frac{E_1}{RT}} \quad (2.12)$$

l'équation du front s'écrit alors

$$\frac{d\epsilon}{d\xi} = \mathcal{F}_\epsilon(\tau, \Phi, Y) \quad (2.13)$$

pour cela une étude simplifiée est conduite  
H5 On impose que le nombre de Lewis

$$Le = \frac{\lambda}{\rho c_p D_{12}} \quad (2.14)$$

qui représente le rapport entre les effets thermiques et ceux liés à la diffusivité chimique soit égal à 1.

**Proposition 11** *Sous les hypothèses H1, H2, H3, H4, H5, le système, défini par les variables  $\tau, \epsilon, \xi, \Phi$  s'écrit:*

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \tau \leq 1 \\ 1 \leq \Phi \leq \Phi_\infty \\ 0 \leq \epsilon \leq 1 \\ \text{et} \\ \frac{d\tau}{d\xi} = \tau - \epsilon \\ \frac{d\Phi}{d\xi} = \mathcal{F}_\Phi(\tau, \Phi) \\ \frac{d\epsilon}{d\xi} = \mathcal{F}_\epsilon(\tau, \Phi, \epsilon) \end{array} \right. \quad (2.15)$$

avec  $\mathcal{F}_\Phi$  défini par (2.11),  $T$  défini par (2.8) et

$$\mathcal{F}_\epsilon = \frac{\lambda v_0}{c_p m^2} \Phi B_1 T^{\alpha_1} (1 - \epsilon) e^{-\frac{E_1}{RT}}$$

Démonstration : cf. [48]

## 2.3 Solutions stables et instables

**Proposition 12** Les points singuliers du système (S) sont  $\tau = \epsilon = 1$  et  $\Phi = \Phi_{\pm}(1)$

Démonstration: cf. [48]

Remarques

1. Si  $M_0 > 1$  (on est dans le cas d'une détonation)

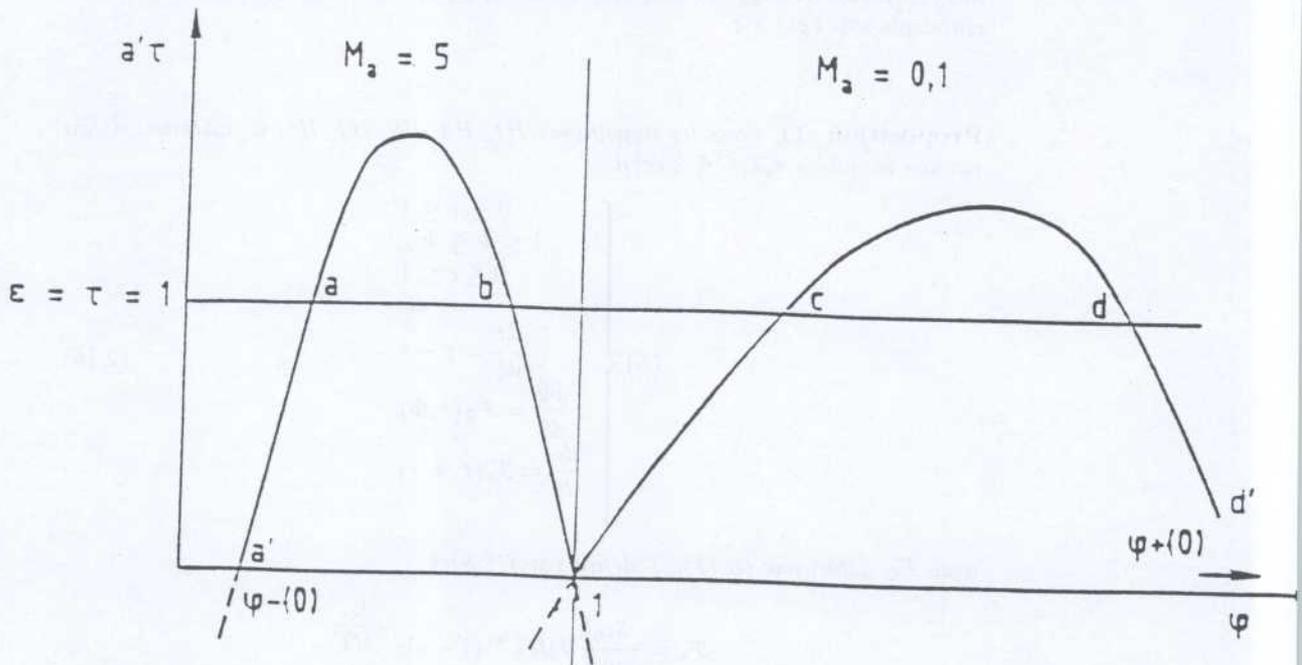
$$\Phi_+(0) = 1 \text{ and } \Phi_-(0) = \frac{(\gamma - 1)M_0^2 + 2}{(\gamma + 1)M_0^2} < 1 \quad (2.16)$$

Si  $M_0 < 1$  (cas d'une déflagration)

$$\Phi_-(0) = 1 \text{ and } \Phi_+(0) = \frac{(\gamma - 1)M_0^2 + 2}{(\gamma + 1)M_0^2} > 1 \quad (2.17)$$

On peut représenter la solution par la figure suivante (cf [156])

où a est associé à la forte détonation, b est associé à la faible détonation, c est associé à la faible déflagration, d est associé à la forte déflagration, a' est le pic de Von Neumann et d' son correspondant pour la déflagration.



### 2.3.1 Stabilité des points ( $\tau = 1, \Phi = \Phi_{\pm}(1), \epsilon = 1$ )

**Proposition 13** *Le point ( $\tau = 1, \epsilon = 1, \Phi = \Phi_{-}(1)$ ) est associé à un noeud instable (ou un point selle) et le point ( $\tau = 1, \epsilon = 1, \Phi = \Phi_{+}(1)$ ) est associé à un noeud stable*

Démonstration : cf. [48]

### 2.3.2 Stabilité des points ( $\tau = 0, \Phi = \Phi_{\pm}(0), \epsilon = 0$ )

**Proposition 14** *Le point ( $\tau = 0, \Phi = \Phi_{+}(0), \epsilon = 0$ ) est un noeud dans le cas d'une détonation et un point selle dans le cas d'une déflagration  
Le point ( $\tau = 0, \Phi = \Phi_{-}(0), \epsilon = 0$ ) est un point selle dans le cas d'une détonation et un noeud instable dans le cas d'une déflagration.*

Démonstration : cf. [48]

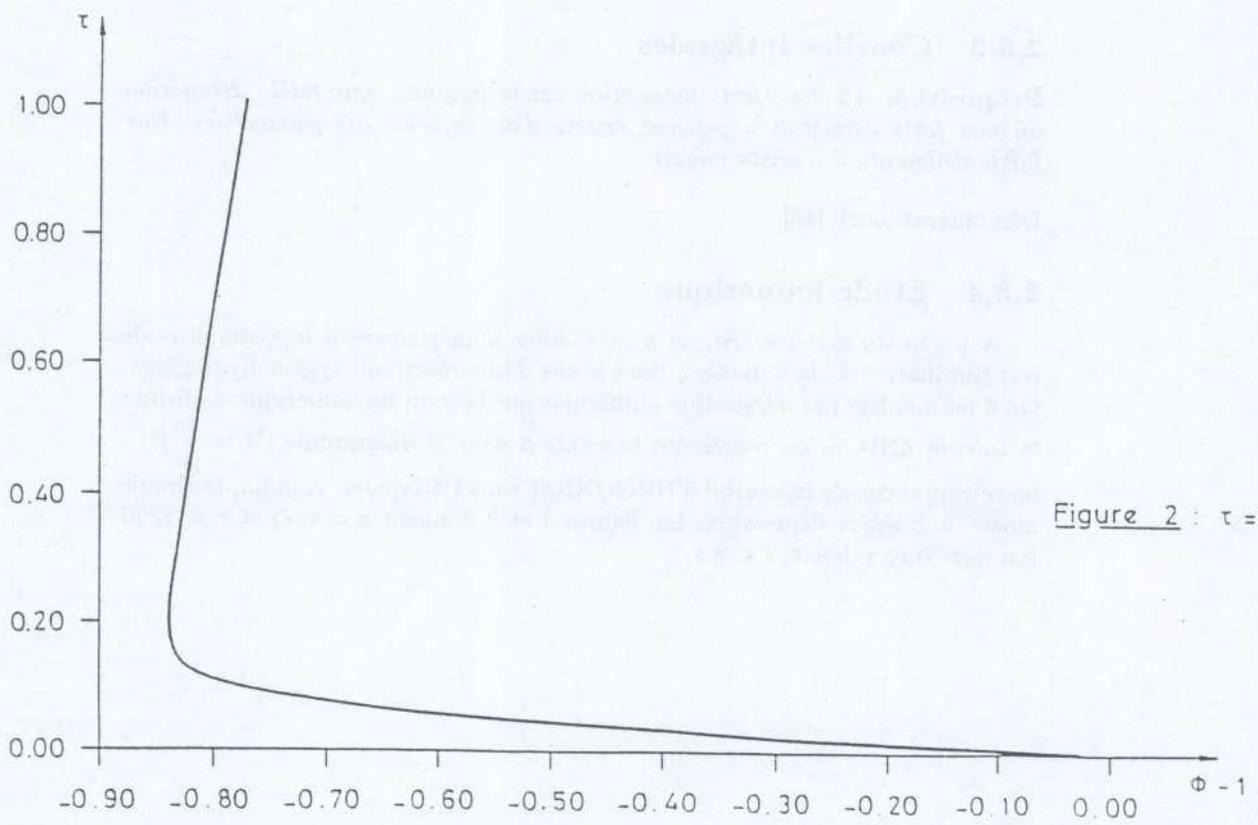
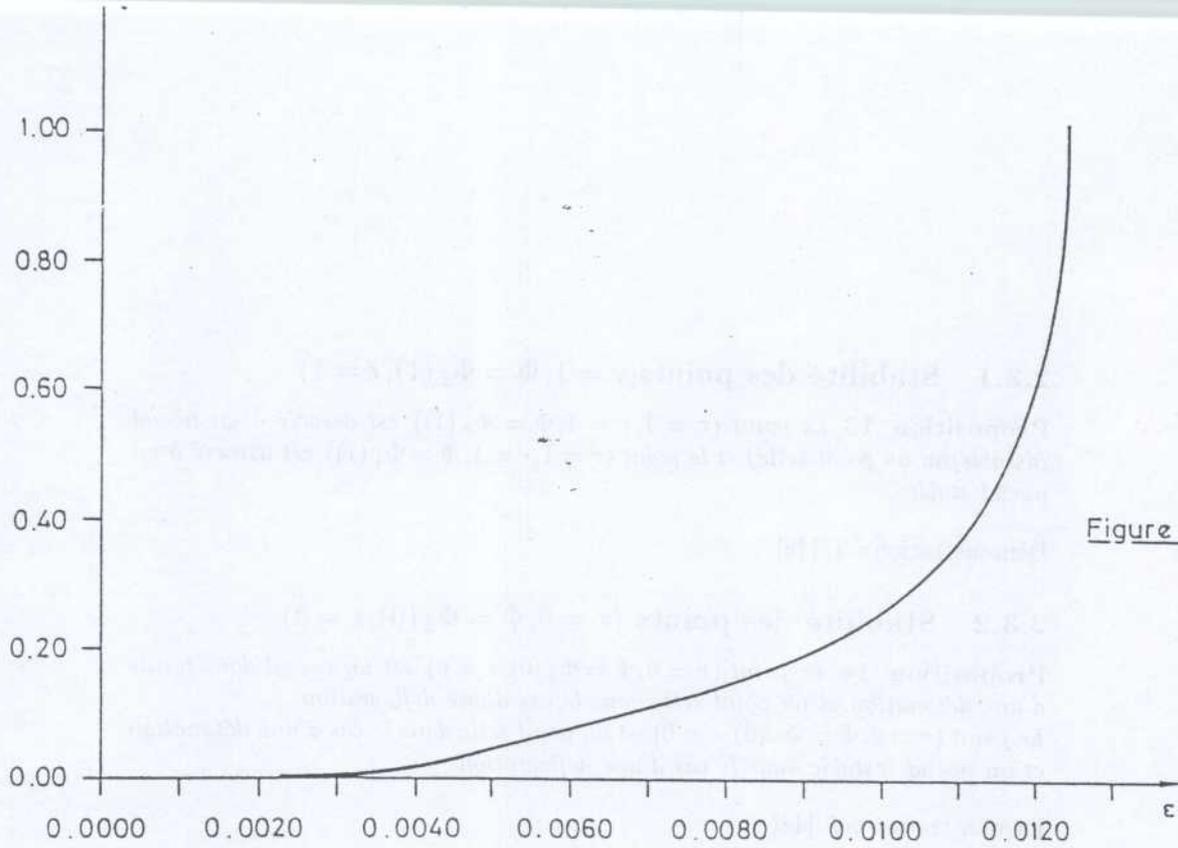
### 2.3.3 Courbes Intégrales

**Proposition 15** *Une forte détonation existe toujours. une faible détonation ou une forte déflagration peuvent exister dans certains cas particuliers. Une faible déflagration n'existe jamais.*

Démonstration: cf. [48]

### 2.3.4 Etude numérique

A partir du système (S), on a pu étudier numériquement le système raide par élimination de la variable  $\xi$  dans le cas d'une réaction oxygène-hydrogène. On a pu montrer par intégration numérique que la solution numérique confirme la théorie ZND. Si on représente la solution dans le diagramme ( $V = \frac{1}{\rho}, P$ ), on se rapproche de la courbe d'HUGONIOT sans l'atteindre. A la fin, la chimie amène une légère dépression. Les figures 1 et 2 donnent  $\tau = \tau(\epsilon)$  et  $\tau = \tau(\Phi)$  (on note qu'au début,  $\epsilon < \tau$ ).



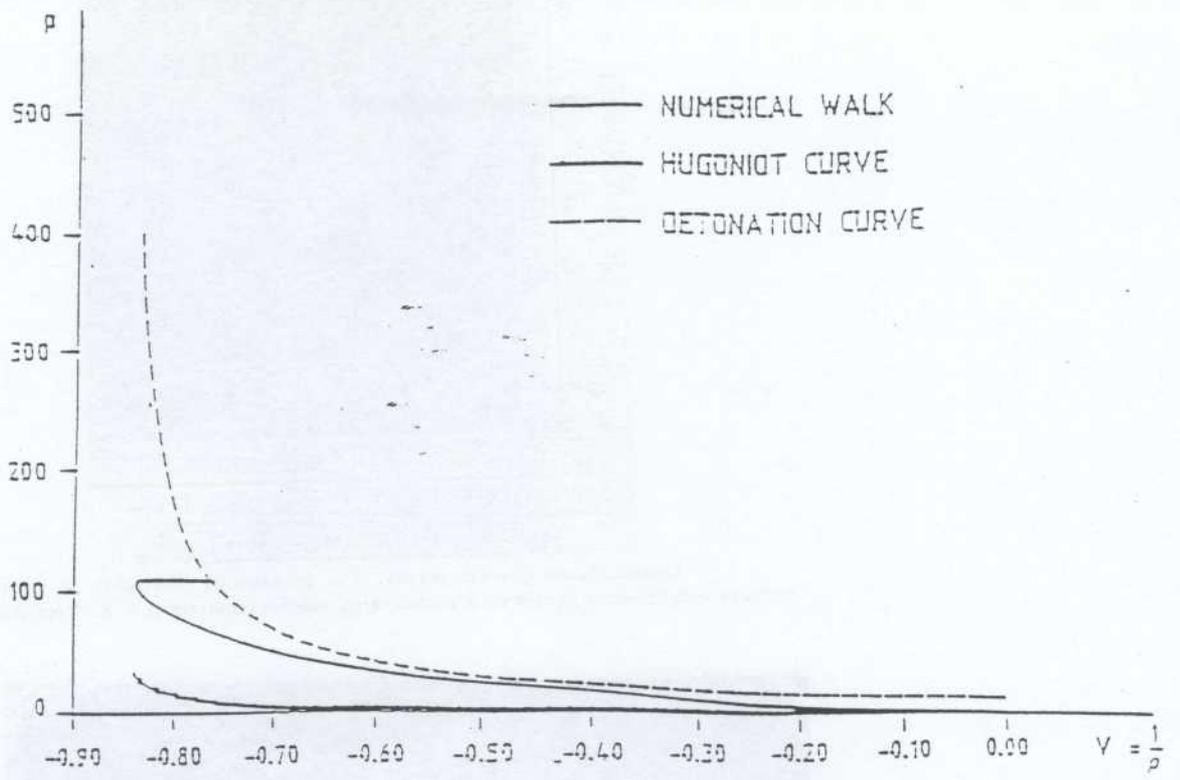


FIGURE 3

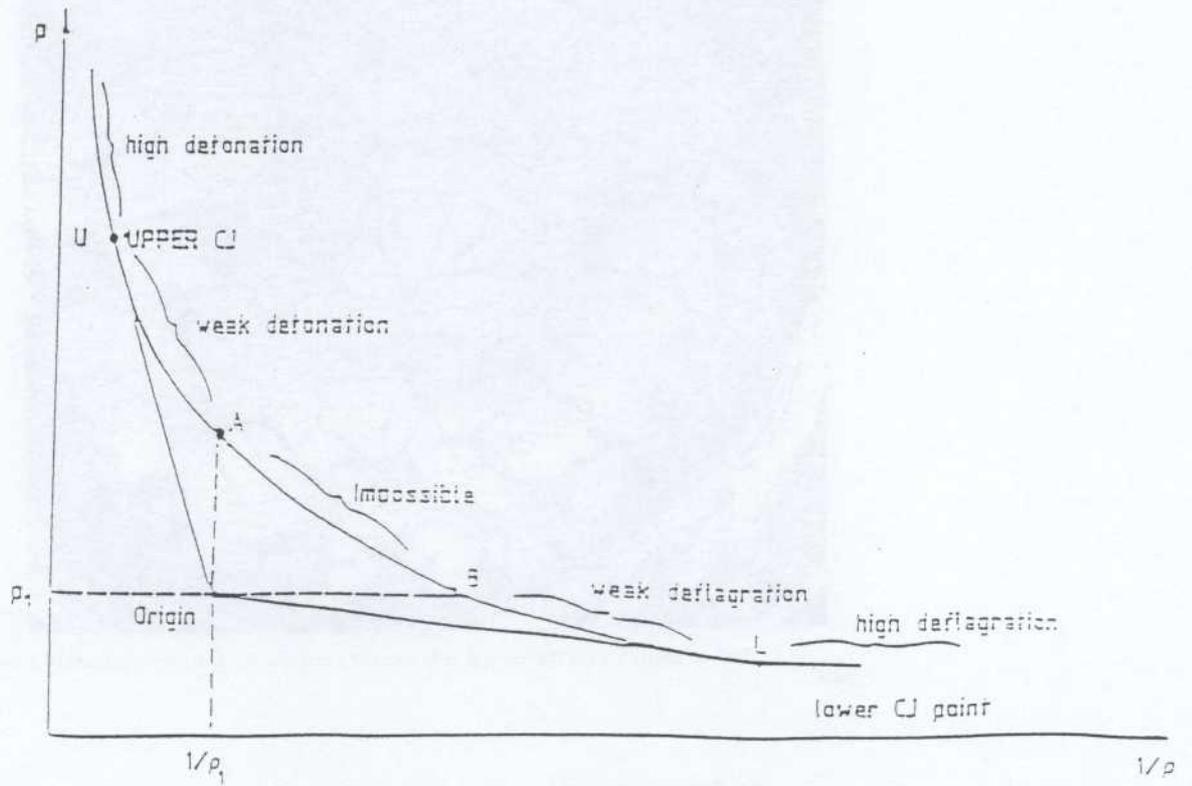
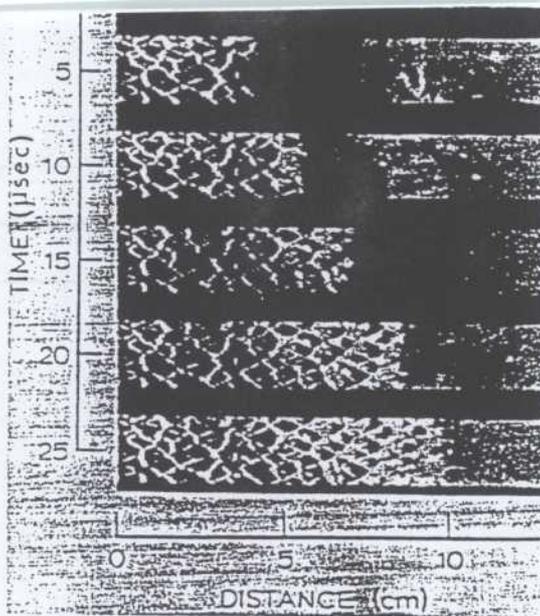
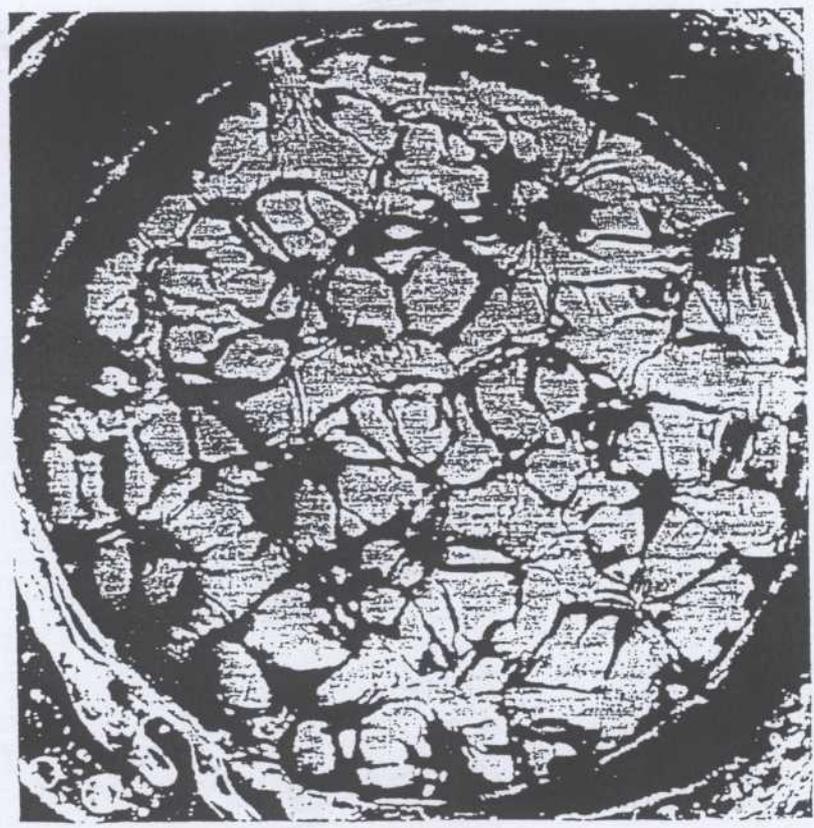


FIGURE 4 : Z-N-D theory



Laser-schlieren cinematography of a propagating detonation in low-pressure mixtures with fish-scale pattern on a soot-covered window (courtesy of A. K. Oppenheim).



End-on pattern from the normal reflection of a cellular detonation on a smoked glass plate

Figure 5 : Cellular Detonation Front

## 2.4 Traitement numérique en 2D: cas de la réaction oxygène-hydrogène

### 2.4.1 Cadre général

Pour résumer, il s'agit de traiter le système couplé Euler-Chimie qui s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + P) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) = 0 \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + P) = 0 \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[(\rho E + P)u] + \frac{\partial}{\partial y}[(\rho E + P)v] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho c_i) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho c_i u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho c_i v) = w_i(P, T, c_1, \dots, c_n) \end{array} \right. \quad (2.18)$$

La chimie est modélisée à travers les termes sources  $w_i$

La théorie au premier ordre est décrite par celle de Chapman-Jouguet. Cette théorie fait apparaître les gaz brûlés comme fonction de l'état initial. Aussi est-il suffisant de prendre les équations d'Euler avec une loi d'état à chaque instant. Dans le cadre d'une théorie au second ordre, il est nécessaire d'utiliser la théorie Z.N.D. (Zeldovitch-Von Neumann-Doring) afin de calculer le chemin de l'onde réactive. Une autre raison de cette justification est le développement de structures bidimensionnelles (appelées "écailles de poisson") qui apparaissent dans une réaction chimique mais pas dans un écoulement inerte. On peut noter ces structures par observations expérimentales sur la figure 5 (cf. [34] et [67]).

A partir de ce constat, il est nécessaire de modéliser un temps de retard  $\theta$  associé à une température seuil  $T_c$  telle que:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \theta) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \theta u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \theta v) = -\rho \alpha(T) \text{ où } \alpha(T) = \begin{cases} \bar{\alpha} & \text{si } T \leq T_c \\ 0 & \text{si } T > T_c \end{cases} \quad (2.19)$$

La chimie obéit à une loi d'ARRHENIUS de donnée  $w_i$ .

Ainsi pour une réaction du type  $A + B \rightarrow C + D$ , le réactant A est décrit par:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_A) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho c_A u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho c_A v) = (\rho c_A)(\rho c_B)K(\theta)\exp\left(-\frac{E}{RT}\right)$$

où E est l'énergie d'activation et K vaut:

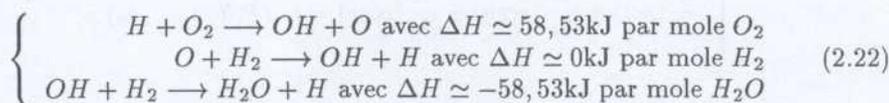
$$K = \begin{cases} 0 & \text{if } \theta < 0 \\ kT^\beta & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.20)$$

## 2.4.2 Modèle oxygène-hydrogène

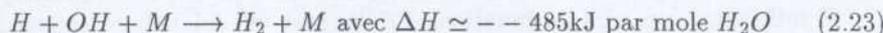
Différents modèles peuvent être proposés. Dans notre cas, on initialise la chaîne par:



La chaîne se propage par:



A la fin, la chaîne se termine par:



Pour notre cas, M est un gaz inerte tel que par exemple  $N_2$  si on s'intéresse à la réaction hydrogène dans l'air. L'ensemble du système s'écrit alors:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = H(U) \quad (2.24)$$

avec

$$U = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E, \rho \theta, \rho c_{N_2}, \rho c_{O_2}, \rho q)^t \quad (2.25)$$

$$F(U) = (\rho u, \rho u^2 + P, \rho uv, (\rho E + P)u, \rho \theta u, \rho c_{N_2} u, \rho c_{O_2} u, \rho qu)^t \quad (2.26)$$

$$G(U) = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + P, (\rho E + P)v, \rho \theta v, \rho c_{N_2} v, \rho c_{O_2} v, \rho qv)^t \quad (2.27)$$

$$H(U) = (0, 0, 0, 0, -\rho \alpha(T), 0, w_{O_2}, \phi)^t \quad (2.28)$$

et

$$w_{O_2} = -2.510^5 \rho^3 c_{H_2}^2 c_{O_2} K_1(\theta) \exp\left(-\frac{8455}{T}\right) \quad (2.29)$$

$$\phi = 28.52910^6 \rho c_H c_{OH} K_2(\theta) \quad (2.30)$$

avec

$$K_1(\theta) = \begin{cases} 9.5410^7 & \text{si } \theta \leq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.31)$$

$$K_2(\theta) = \begin{cases} 3.310^9 & \text{si } \theta \leq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.32)$$

L'ensemble est fermé par le traitement de  $c_{H_2O}$ ,  $c_H$ ,  $c_{OH}$ ,  $c_{H_2}$ .

Si on pose  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$ , on trouve alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D(c_{H_2})}{Dt} = \frac{1}{8} \frac{D(c_{O_2})}{Dt} \\ \frac{D(c_{H_2O})}{Dt} = 3.711410^{-5} \frac{Dq}{Dt} - 0.5625 \frac{D(c_{O_2})}{Dt} \\ \frac{D(c_H)}{Dt} = -2.062 \frac{Dq}{Dt} - 3.12510^{-2} \frac{D(c_{O_2})}{Dt} \\ \frac{D(c_{OH})}{Dt} = -35.052 \frac{Dq}{Dt} - 53.12510^{-2} \frac{D(c_{O_2})}{Dt} \end{array} \right. \quad (2.33)$$

Pour terminer, tous les gaz ( $H_2$ ,  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $H$ ,  $OH$ ,  $H_2O$ ) sont traités en gaz parfaits et donc en chaque point à chaque instant, la loi d'état s'écrit :

$$P = (\gamma - 1)(\rho E - \frac{1}{2}\rho u^2 - \frac{1}{2}\rho v^2)$$

où  $\gamma$  est une fonction des concentrations et change en espace et en temps.

### 2.4.3 Traitement numérique

Il est nécessaire ( pour utilisation de la théorie Z.N.D.) d'avoir recours à un schéma du second ordre associé aux systèmes hyperboliques. Notre choix s'est porté sur un schéma de type prédictor - correcteur similaire à celui proposé par VAN LEER. Dans notre configuration, on utilise une méthode pour maillage non structuré(cf [47]).

La méthode comporte quatre phases: chaque quantité conservative est décrite dans une maille ( en 2D triangle ou quadrangle, en 3D prisme, tétraèdre ou

hexaèdre ) Par une valeur moyenne et une pente dans chaque direction( on utilise donc 8 variables primitives ou 24 valeurs par maille en 2D).

La première étape est une étape de prédiction au demi- pas de temps  $t + \frac{\Delta t}{2}$  qui se propage à la frontière de la maille et qui est uniquement fonction des valeurs dans la maille.

La seconde utilise un solveur de Riemann pour traiter l'intersection des ondes qui se propage à l'interface de deux mailles.

Dans la troisième étape, la valeur moyenne au temps  $t + \Delta t$  et calculée par une loi de bilan.

Pour terminer, les pentes sont calculées afin de respecter une notion TVD dans chaque direction spatiale à partir des valeurs définies au milieu des mailles.

Mais la présence d'un terme source perturbe ce traitement. Chaque étape précédente est respectée mais dans les étapes 1 et 3, utilise une formule implicite pour les termes sources.

L'autre difficulté vient de la définition d'un solveur de Riemann qui utilise une formulation monodimensionnelle.

#### 2.4.4 Problème de Riemann 1D

On considère le système d'Euler 1D défini par:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(V)}{\partial x} = 0 \text{ et } \begin{cases} V = (\rho, \rho u, \rho E)^t \\ \Phi(V) = (\rho u, \rho u^2 + P, (\rho E + P)u)^t \end{cases} \quad (2.34)$$

avec les données initiales

$$V(0, x) = \begin{cases} V_L \text{ si } x < 0 \\ V_R \text{ si } x > 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

Pour  $V_L$  :

$$P_L = (\gamma_L - 1)(\rho_L E_L - \frac{1}{2}\rho_L u_L^2)$$

et pour  $V_R$  :

$$P_R = (\gamma_R - 1)(\rho_R E_R - \frac{1}{2}\rho_R u_R^2).$$

Comme dans [145], soient  $\tau = \frac{\gamma-1}{2\gamma}$ ,  $\beta = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x, \gamma) = \begin{cases} e^{-x/\gamma} & \text{with for } x \geq 0 \\ \frac{\beta + e^x}{1 + \beta e^x} & \text{with for } x \leq 0 \end{cases} \\ f_3(x, \gamma) = \frac{1}{f_1(x, \gamma)} \end{array} \right. \quad (2.36)$$

$$h_1(x, \gamma) = \begin{cases} \frac{2}{\gamma-1}(1 - e^{-\tau x}) & \text{avec pour } x \geq 0 \\ \frac{2\sqrt{\tau}}{\gamma-1} \frac{1 - e^{-x}}{(1 + \beta e^{-x})^{1/2}} & \text{avec pour } x \leq 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

$$h_3(x, \gamma) = \begin{cases} \frac{2}{\gamma-1}(e^{\tau x} - 1) & \text{avec pour } x \geq 0 \\ \frac{2\sqrt{\tau}}{\gamma-1} \frac{e^x - 1}{(1 + \beta e^x)^{1/2}} & \text{avec pour } x \leq 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

On a donc

$$h_3(x, \gamma) = \sqrt{f_1(x, \gamma)} e^{x/2} h_1(x, \gamma)$$

On en déduit(cf. [47])

**Théoreme 8** Si  $V_L$  et  $V_R$  sont les deux états initiaux du problème de Riemann, alors il existe une solution - unique- si

$$u_R - u_L < 2\left(\frac{C_L}{\gamma_L - 1} + \frac{C_R}{\gamma_R - 1}\right)$$

qui peut être calculée. Sinon le vide apparaît.

Par la suite, il est facile de calculer  $V(0, t)$  qui est indépendant du temps•

## 2.5 Glissement en combustion

### 2.5.1 Notations-Définitions

#### Définitions: gaz simples

Dans une approche tridimensionnelle, soit  $d^3\vec{r}$  un élément de volume de l'espace physique et  $d^3\vec{v}$  un élément de volume de l'espace des vitesses. De manière évidente, on peut écrire:

$$\begin{cases} d^3r = dx dy dz \\ d^3v = dv_x dv_y dv_z \end{cases} \quad (2.39)$$

On appelle densité notée  $n(\vec{r}, t)$ , le nombre de particules par unité de volume localisées en  $\vec{r}$  au temps  $t$ . On a clairement :

$$n(\vec{r}, t) = \int f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v \quad (2.40)$$

Si l'on note  $m$  la masse des particules, on appelle densité massique, la variable notée

$$\rho(\vec{r}, t) = mn(\vec{r}, t) \quad (2.41)$$

La quantité de mouvement totale dans  $d^3r$  s'écrit

$$d^3r \int m\vec{v} f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v$$

Comme la masse totale dans  $d^3r$  s'exprime par  $\rho(\vec{r}, t)d^3r$ , on définit la vitesse hydrodynamique par:

$$\vec{V}(r, t) = \frac{1}{\rho(\vec{r}, t)} \int m\vec{v} f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v \quad (2.42)$$

On appelle Vitesse Particulaire notée  $\vec{V}_p$  d'une molécule la vitesse de celle-ci par rapport à un référentiel se déplaçant à la vitesse hydrodynamique  $V$

$$\vec{V}_p = \vec{v} - \vec{V} \quad (2.43)$$

N.B.: Pour un gaz simple, la vitesse particulaire moyenne est constamment égale à zéro. On en déduit, d'après la thermodynamique, que la moyenne du terme  $\frac{1}{2}mV_p^2$  n'est autre que l'énergie interne du gaz, d'où:

$$e(\vec{r}, t) = \frac{1}{\rho(\vec{r}, t)} \int \frac{1}{2}mV_p^2 f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v \quad (2.44)$$

où  $e$  est l'énergie interne par unité de masse  
 En cinétique des gaz, la température est définie par la relation:

$$\rho e = \frac{3}{2} n k T \quad (2.45)$$

avec  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ , constante de Boltzmann. Comme on a 3 composantes pour  $\vec{V}_p$ , on dispose de 3 vecteurs dont les 9 composantes sont celles du tenseur symétrique de rang 2:

$$\overline{\overline{P}} = m \int \vec{V}_p : \vec{V}_p f d^3 v \quad (2.46)$$

On appelle pression hydrostatique le terme:

$$P = \frac{1}{3} \overline{\overline{P}} : \overline{\overline{I}} \quad (2.47)$$

De même, on définit le flux d'énergie cinétique par:

$$\vec{q} = \frac{1}{2} m \int V_p^2 f \vec{V}_p d^3 v \quad (2.48)$$

### Définitions pour un mélange de gaz

Il s'agit ici de simples généralisations des définitions précédentes. Considérons donc un mélange de  $K$ -composants. Le nombre de molécules de l'espèce  $i$  présentes en  $\vec{r}$  à  $d^3 r$  près, à la vitesse  $\vec{v}_i$  à  $dv_i$  près s'écrit:

$$f_i(\vec{r}, \vec{v}_i, t) d^3 v_i d^3 r$$

( $f_i$  est la fonction distribution de vitesse de l'espèce  $i$ ).

De même:

$$n_i = \int f_i(\vec{r}, \vec{v}_i, t) d^3 v_i$$

et

$$\rho_i = n_i m_i$$

La densité du mélange, notée  $n$ , s'exprime par:

$$n = \sum_{i=1}^K n_i \quad (2.49)$$

La densité massique du mélange, notée  $\rho$ , s'écrit:

$$\rho = \sum_{i=1}^K \rho_i = \sum_{i=1}^K n_i m_i \quad (2.50)$$

La moyenne  $\bar{\phi}_i$  d'une fonction  $\phi_i$  dépendant de la vitesse des particules de l'espèce  $i$  s'obtient par la relation :

$$n_i \bar{\phi}_i = \int f_i \phi_i d^3 v_i \quad (2.51)$$

La valeur moyenne  $\bar{\phi}$  pour le mélange s'obtient par :

$$n \bar{\phi} = \sum_{i=1}^K n_i \bar{\phi}_i = \sum_{i=1}^K \int f_i \phi_i d^3 v_i \quad (2.52)$$

Par exemple :

$$n \bar{V} = \sum_{i=1}^K n_i \bar{V}_i = \sum_{i=1}^K \int f_i v_i d^3 v_i$$

pour la vitesse moléculaire moyenne.

Il s'agit juste d'une moyenne numérique des vitesses de toutes les particules : elle ne doit pas être confondue avec la vitesse hydrodynamique  $\bar{v}$  définie par :

$$\rho \bar{v} = \sum_{i=1}^K \rho_i \bar{V}_i = \sum_{i=1}^K \int f_i \vec{v}_i d^3 v_i$$

Comme, en général, la vitesse moyenne des molécules de type  $i$  diffère à la fois de la vitesse hydrodynamique et de la vitesse moléculaire moyenne, il apparaît, dans les mélanges, un phénomène appelé diffusion ou glissement (c'est-à-dire un mouvement relatif en fait) d'une espèce par rapport à une autre. On peut caractériser la diffusion par la vitesse de glissement de phase de chaque espèce par rapport à  $\bar{V}$  ou par rapport à  $\bar{v}$ .

On note :

$$\vec{W}_i = \bar{V}_i - \bar{v} \quad (2.53)$$

Pour finir, la vitesse particulière  $\vec{V}_{p_i}$  d'une molécule de l'espèce  $i$  est définie par  $\vec{V}_{p_i} = \bar{V}_i - \bar{v}$  de telle sorte que  $\vec{V}_{p_i} = \vec{W}_i$

De même on considère les flux :

$$\bar{\phi}_i = \int \phi_i f_i \vec{v}_i d^3 v_i \quad (2.54)$$

et pour le mélange

$$\bar{\phi} = \sum_{i=1}^K \bar{\phi}_i \quad (2.55)$$

Soit :

$$\bar{P} = \sum_{i=1}^K n_i m_i \overline{v_i : v_i} = \sum_{i=1}^K m_i \int v_i : v_i f_i d^3 v_i$$

et

$$q = \sum_{i=1}^K \frac{1}{2} n_i m_i \overline{v_i^2 v_i} = \sum_{i=1}^K \frac{1}{2} m_i \int v_i^2 v_i f_i d^3 v_i$$

On appelle toujours pression hydrostatique le terme:

$$p = \frac{1}{3} \bar{P} : \bar{I}$$

On définit toujours la température T par la relation:

$$\rho e = \frac{3}{2} nkT$$

où e est l'énergie interne locale par unité de masse avec:

$$\rho e = \sum_{i=1}^K \frac{1}{2} m_i \int v_i^2 f_i d^3 v_i \quad (2.56)$$

### Equation de Boltzmann

Le but ici n'est pas de rétablir l'équation de Boltzmann mais seulement de la réécrire afin de préciser les notations pour la suite. L'équation de Boltzmann s'écrit, pour le ième composant du mélange (cf [22],[86],[46]) :

$$Df_i = \sum_{j=1}^K J(f_i, f_j) \quad (2.57)$$

qui traduit l'égalité entre :

un terme de transport :  $Df_i$

et un terme de collisions :  $\sum_{j=1}^K J(f_i, f_j)$

Dans ce cas , on a

$$Df_i = \frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{v}_i \vec{\nabla}_r f_i + \vec{F}_i \vec{\nabla}_{v_i} f_i \quad (2.58)$$

où  $\vec{F}_i$  représente les forces extérieures qui s'appliquent sur les molécules  $i$ .

$$J(f_i, f_j) = \int \int \int (f_i' f_j' - f_i f_j) g b d b d \epsilon d^3 v_j \quad (2.59)$$

où les ' indiquent les valeurs après collision,  $b$  est le paramètre d'impact et  $\epsilon$  l'angle de déviation.

## 2.5.2 Gaz simple hors équilibre-Méthode de Chapman-Enskog

### Solution de l'équation de Boltzmann . Méthode de Chapman-Enskog

Le théorème d'entropie de Boltzmann permet d'affirmer que la solution de l'équation de Boltzmann en équilibre thermodynamique n'est autre que la Maxwellienne :

$$f_i(\vec{v}_i) = n_i \left( \frac{m_i}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_i v_i^2}{2kT}\right) \quad (2.60)$$

Si les gradients macroscopiques sont petits, les molécules voyageant dans une petite région diffèrent peu en terme de distribution de vitesse, de celles déjà présentes dans cette petite région; autrement dit elles n'engendrent de variations qu'à l'échelle macroscopique (temps que mettrait une onde sonore pour parcourir une distance physiquement appréciable, soit  $10^{-3}$  à  $10^{-4}$  s contre environ  $10^{-9}$  s de temps libre moyen entre deux collisions).

On en déduit qu'en conclusion, l'effet dominant est celui des collisions amenant le gaz à l'équilibre thermique par rapport aux phénomènes de transport.

Pour faire ressortir cet effet dominant, Hilbert, et surtout Chapman-Enskog (Cf. [22], [86], [46]) ont eu l'idée de modifier l'équation de Boltzmann par un paramètre  $\epsilon$  petit, donnant ainsi plus de poids au terme de collisions, soit :

$$Df = \frac{1}{\epsilon} J(f, f) \quad (2.61)$$

Pour  $\epsilon$  petit l'équation précédente devient un problème de perturbation singulière pour  $f$ . On cherche une solution en considérant le développement suivant :

$$f = f^{(0)} + \epsilon f^{(1)} + \epsilon^2 f^{(2)} + \dots \quad (2.62)$$

Il restera alors, après calculs, à définir l'ordre d'approximation (en puissance de  $\epsilon$ ) auquel on décidera de se limiter

### Application de la méthode de Chapman-Enskog

On peut alors écrire :

$$D^{(i)} f = \frac{\partial_i f^{(0)}}{\partial t} + \dots + \frac{\partial_0 f^{(i)}}{\partial t} + \vec{v} \vec{\nabla} f^{(i)} + \vec{F} \vec{\nabla}_{\vec{v}} f^{(i)} \quad (2.63)$$

alors

$$Df = Df^{(0)} + \epsilon D^{(1)} f + \epsilon^2 D^{(2)} f + \dots \quad (2.64)$$

Si l'on considère toujours d'équation de Boltzmann modifiée, en égalant les termes en puissances de  $\epsilon$  on trouve :

$$\begin{cases} J(f^{(0)}, f^{(0)}) = 0 \\ J(f^{(0)}, f^{(r)}) + J(f^{(r)}, f^{(0)}) = D^{(r-1)} f - J(f^{(1)}, f^{(r-1)}) - \dots - J(f^{(r-1)}, f^{(1)}) \end{cases} \quad (2.65)$$

La relation d'orthogonalité est toujours valable car les composantes de  $\vec{\Psi}$  sont invariantes par collisions.

Après quelques calculs ( cf [63] ), on obtient :

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\vec{\nabla} \vec{v} \\ \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \sum_{j=1}^r \vec{\nabla} P^{(j)} \\ \rho \frac{de}{dt} = -(\vec{\nabla} \vec{q}^{(j)} + P^{(j)} : \vec{\nabla} \vec{v}) \end{cases} \quad (2.66)$$

où

$$\begin{cases} P^{(j)} = \epsilon^j \int m \vec{V} \vec{V} f^{(j)} d^3 v \\ \vec{q}^{(j)} = \epsilon^j \int \frac{1}{2} m V^2 \vec{V} f^{(j)} d^3 v \end{cases} \quad (2.67)$$

c'est-à-dire que  $\vec{P}^{(j)}$  apparaît comme la quantité de mouvement relative (i.e. par rapport à celle du fluide moyen correspondant) transportée par la vitesse relative du fluide et pondérée par le nombre de particules ayant la fonction de vitesse  $f^{(j)}$ .

La méthode de Chapman-Enskog permet ainsi d'écrire des équations de la dynamique des fluides sous une telle forme qu'elles peuvent être explicitement évaluées à chaque ordre d'approximation.

A l'ordre zéro, ne subsiste que l'équation

$$J(f^{(0)}, f^{(0)}) = 0$$

dont on a connait la solution :

$$f^{(0)}(\vec{r}, \vec{v}, t) = n^{(0)} \left( \frac{m}{2\pi kT^{(0)}} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mV^2}{2kT^{(0)}}\right)$$

avec  $n^{(0)}, \nu^{(0)}, T^{(0)}$  définies comme les quantités locales densité, vitesse hydrodynamique et température, et données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} n^{(0)} = \int f^{(0)} d^3v \\ \rho^{(0)} \nu^{(0)} = \int m \vec{v} f^{(0)} d^3v \\ \frac{3}{2} n^{(0)} kT^{(0)} = \rho^{(0)} e^{(0)} = \int \frac{1}{2} m V^2 f^{(0)} d^3v \end{array} \right. \quad (2.68)$$

Dans ce cas, on obtient en outre:

$$\left\{ \begin{array}{l} P^{(0)} = pI \\ q^{(0)} = 0 \end{array} \right. \quad (2.69)$$

et le système s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \\ \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \vec{\nabla} p \text{ avec } p = nkT = \frac{2}{3} \rho e \\ \rho \frac{de}{dt} = -p \vec{I} : \vec{\nabla} \vec{V} = -p \operatorname{div} \vec{v} \end{array} \right. \quad (2.70)$$

où

$$p = nkT = \frac{2}{3} \rho e$$

qui n'est rien d'autre que le système d'Euler de l'hydrodynamique appliqué à un gaz parfait.

Dans le cas du 1er ordre les équations s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(f^{(0)}, f^{(0)}) = 0 \\ J(f^{(0)}, f^{(1)}) + J(f^{(1)}, f^{(0)}) = Df^{(0)} \end{array} \right. \quad (2.71)$$

La solution à l'ordre 0 est connue, c'est la Maxwellienne précédente.

Il faut donc déterminer  $f^{(1)}$  ou  $\Phi^{(1)}$  qui est solution de :

$$n^2 I(\Phi^{(1)}) = Df^{(0)} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} + \vec{v} \vec{\nabla}_{\vec{r}} f^{(0)} + \left( \vec{F} - \frac{d\nu^{(0)}}{dt} \vec{\nabla}_{\vec{v}} f^{(0)} - (\vec{\nabla}_{\vec{v}} f^{(0)}) \vec{V} : \vec{\nabla}_{\vec{r}} \vec{v} \right)$$

avec

$$\frac{d}{dt}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}}(\cdot)$$

on obtient donc, tout calcul effectué, dans le cas de la Maxwellienne:

$$Df^{(0)} = f^{(0)} \left[ \left( \frac{m V^2}{2} \frac{5}{kT} \right) \vec{V} \vec{\nabla} \log T + \frac{m}{kT} (\vec{V} \vec{V} - \frac{1}{3} V^2 \vec{I}) : \vec{\nabla} \vec{v} \right]$$

D'après les calculs précédents, on doit avoir:

$$n^2 I(\Phi^{(1)}) = -f^{(0)} \left[ \left( \frac{m V^2}{2} \frac{5}{kT} \right) \vec{V} \vec{\nabla} \log T + \frac{m}{kT} (\vec{V} \vec{V} - \frac{1}{3} V^2 \vec{I}) : \vec{\nabla}_n \vec{u} \right] \quad (2.72)$$

La solution n'est pas déterminée de façon unique par cette équation puisque l'on sait que l'on peut ajouter à toute solution particulière une combinaison linéaire des invariants collisionnels / sommatoires qui sont solutions de l'équation homogène associée.

Il est clair d'après la forme de l'équation intégrale que la solution s'écrit comme la somme de :

- Une combinaison linéaire des composantes de  $\vec{\nabla} T$
  - Une combinaison linéaire des composantes de  $\vec{\nabla} \vec{v}$
  - Une solution scalaire associée à l'équation homogène
- ce qui peut s'exprimer comme suit :

$$\Phi^{(1)} = -\frac{1}{n} \vec{A} \vec{\nabla} \log T - \frac{1}{n} \overline{\overline{B}} : \vec{\nabla} \vec{v} + \frac{1}{n} \vec{A} \vec{\nabla} \log T \cdot \alpha^{(1)} \vec{\Psi} \quad (2.73)$$

où  $\vec{A}$  et  $\overline{\overline{B}}$  sont des vecteur et tenseur fonctions de  $\vec{V}$  tandis que  $\alpha^{(1)}$  est un vecteur indépendant de la variable vitesse. Tous ces "coefficients" peuvent a priori dépendre de  $\vec{r}$  et  $t$ .

Après calculs (pour plus de détails Cf. [46]), on trouve :

$$\vec{A} = A(v) \vec{V}$$

et

$$\overline{\overline{B}} = B(v) (\vec{V} : \vec{V} - \frac{1}{3} V^2 \vec{I})$$

où B est symétrique à trace nulle.

En posant

$$\overline{\overline{S}} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \vec{v})^t) - \frac{1}{3} \vec{\nabla} \vec{v}$$

(tenseur des contraintes transverses)

on trouve  $\overline{\overline{P}}^{(1)} = -2\eta \overline{\overline{S}}$  et donc

$$\overline{\overline{P}} = p \vec{I} - 2\eta \overline{\overline{S}}$$

ce qui correspond à la loi de Newton dans la théorie de Chapman-Enskog au 1er ordre d'approximation ( $\eta$  est appelé le coefficient de viscosité).

De même, on trouve pour  $\vec{q}$ :

$$\vec{q} = q^{(1)} = -\lambda \vec{\nabla} T$$

ce qui correspond à la Loi de Fourier avec  $\lambda$  le coefficient de conductivité thermique.

Le système global s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \\ \rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{F} - \vec{\nabla} p + 2\eta \vec{\nabla} \cdot \vec{S} \\ \rho \frac{dT}{dt} = -\frac{2m}{3k} (-\vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) + P \vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - 2\eta \vec{S} : \vec{\nabla} \vec{v} \end{array} \right. \quad (2.74)$$

ce qui correspond aux équations de Navier-Stokes pour un seul fluide.

### Mélange de gaz hors équilibre

En appliquant la même théorie mais étendue aux mélanges de gaz, on trouve (cf. [63])

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho_i} \frac{d\rho_i}{dt} = -\vec{\nabla}_n \cdot \vec{u} - \sum_{j=0}^r \vec{\nabla} V_i^{(j)} - \sum_{j=0}^r \frac{1}{\rho_i} V_i^{(j)} \vec{\nabla} \rho_i \\ \frac{1}{\rho} \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_{i=1}^K \rho_i \vec{F}_i - \sum_{j=0}^r \vec{\nabla} P^{(j)} \\ \rho \frac{de}{dt} = -\sum_{j=0}^r \vec{\nabla} q^{(j)} - \sum_{j=0}^r \vec{\nabla} P^{(j)} : \vec{\nabla} \vec{v} + \sum_{i=1}^K \sum_{j=0}^r \rho_i \vec{F}_i V_i^{(j)} \end{array} \right. \quad (2.75)$$

où

$V_i^{(j)}$  est la contribution du jème ordre à la vitesse de diffusion de l'espèce  $i$

$P^{(j)}$  est la contribution du jème ordre au tenseur de pression

$q^{(j)}$  est la contribution du jème ordre au flux de chaleur en notant :

$$\left\{ \begin{array}{l} n_i V_i^{(j)} = \epsilon^j \int \vec{V}_i f_i^{(j)} d^3 v_i \\ P^{(j)} = \sum_{i=1}^K P_i^{(j)} = \epsilon^j \sum_{i=1}^K \int m_i \vec{V}_i \vec{V}_i f_i^{(j)} d^3 v_i \\ q^{(j)} = \sum_{i=1}^K q_i^{(j)} = \epsilon^j \sum_{i=1}^K \int \frac{1}{2} m_i V_i^2 \vec{V}_i f_i^{(j)} d^3 v_i \end{array} \right. \quad (2.76)$$

avec

$$\sum_{i=1}^K \rho_i V_i^{(j)} = \vec{0}$$

Ainsi, comme dans le cas d'un gaz simple, la méthode de Chapman-Enskog fournit une méthode unique pour obtenir les approximations successives des fonctions distribution de vitesse de chaque composant du mélange et, en même temps, conduit aux équations de la dynamique des fluides sous une telle forme que les coefficients peuvent être évalués à chaque ordre de l'approximation. Avec une approximation à l'ordre zéro, on a:

$$\begin{cases} V_i^{(0)} = \vec{0} \\ P^{(0)} = p\vec{I} \\ q^{(0)} = \vec{0} \end{cases} \quad (2.77)$$

où  $p = nkT$ . Le système hydrodynamique s'écrit donc :

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_i} \frac{d\rho_i}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \text{ pour } i = 1, \dots, K-1 \\ \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \\ \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_{i=1}^K \rho_i \vec{F}_i - \vec{\nabla} p \\ \rho \frac{de}{dt} = -p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \end{cases} \quad (2.78)$$

ce qui correspond au système d'Euler pour un K mélange.

Par le même type de calcul que celui qui a été mené pour le monofluide, on obtient:

$$Df_i^{(0)} = f_i^{(0)} \left[ \frac{n}{n_i} \vec{v}_i \cdot \vec{d}_i + \left( \frac{m_i V_i^2}{2kT} - \frac{5}{2} \vec{v}_i \cdot \vec{\nabla} \log T + \frac{m_i}{kT} (\vec{v}_i \vec{v}_i - \frac{1}{3} V_i^2 \vec{I}) : \vec{\nabla} \vec{v} \right. \right.$$

où

$$\vec{d}_i = \vec{\nabla} \frac{n}{n_i} + \left( \frac{n}{n_i} - \frac{\rho}{\rho_i} \right) \vec{\nabla} \log P - \frac{\rho_i}{P} (\vec{F}_i - \sum_{j=1}^K \frac{\rho_j}{\rho} \vec{F}_j)$$

Par une démarche analogue à celle du gaz simple, on cherche  $\Phi_i^{(1)}$  tel que

$$\Phi_i^{(1)} = -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^K D_i^{(j)} \vec{d}_j - \frac{1}{n} \vec{A}_i \cdot \vec{\nabla} \log T - \frac{1}{n} \vec{B}_i : \vec{\nabla} \vec{v}$$

Dans l'approximation au 1er Ordre de Chapman-Enskog, la vitesse de diffusion des molécules de l'espèce  $i$  peut s'écrire :

$$\vec{V}_i = V_i^{(1)} = -\sum_{j=1}^K D_{ij} \vec{d}_j - D_{T_i} \vec{\nabla} T \quad (2.79)$$

N.B. : Dans la suite on parlera indifféremment de vitesse de diffusion ou de vitesse de glissement de phase.

Remarque : les  $D_{ij}$  sont appelés coefficients de diffusion multicomposants.

Les  $D_{T_i}$  sont appelés coefficients de diffusion thermique multicomposants. Si l'on introduit le taux de diffusion thermique  $k_{T_i}$  tel que :

$$\sum_{j=1}^K D_{ij} k_{T_j} = D_{T_i}$$

on peut aussi écrire  $\vec{V}_i$  sous la forme :

$$\vec{V}_i = - \sum_{j=1}^K D_{ij} (\vec{d}_j + k_{T_j} \vec{\nabla} \log T) \quad (2.80)$$

Remarque : L'hypothèse fondamentale réalisée par Enskog nous amène à avoir un glissement de phase stationnaire au sens où il ne dépend pas explicitement du temps mais seulement des grandeurs thermodynamiques macroscopiques.

On trouverait également comme dans le cas du gaz simple au premier ordre :

$$\vec{P} = p\vec{I} - 2\eta\vec{S} \quad (2.81)$$

Mais cette fois  $\vec{q}$  s'écrit :

$$\vec{q} = -\lambda\vec{\nabla}T + P \sum_{i=1}^K (k_{T_i} + \frac{5n_i}{2n}) \vec{V}_i \quad (2.82)$$

et donc dans l'expression du flux de chaleur apparaissent deux termes :

- Le premier, purement conductif, de type loi de Fourier.
- Le second, purement convectif, représentant une quantité de chaleur transportée par la vitesse relative de chaque espèce du mélange (par relative on entend relative à la vitesse moyenne du mélange).

Au bilan on dispose donc des équations de Navier-Stokes multi-espèces :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho_i} \frac{d\rho_i}{dt} = -\vec{\nabla}\vec{v} - \frac{1}{\rho_i} \vec{\nabla}\rho_i \vec{V}_i \text{ pour } i = 1, \dots, K-1 \\ \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\vec{\nabla}\vec{v} \\ \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_{i=1}^K \rho_i \vec{F}_i - \vec{\nabla}\vec{P} \\ \rho \frac{de}{dt} = \vec{\nabla}\vec{q} - \vec{P} : \vec{\nabla}\vec{v} + \sum_{i=1}^K \rho_i \vec{F}_i \vec{V}_i \end{array} \right. \quad (2.83)$$

associés aux relations de fermeture précédentes.

### Les équations générales du modèle de combustion

Soient les équations de l'hydrodynamique pour un mélange de gaz précédemment établies et prenons en compte le fait qu'il peut y avoir des réactions chimiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho_i} \frac{d\rho_i}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_i - \frac{1}{\rho_i} \vec{\nabla} \rho_i \cdot \vec{V}_i + w_i \text{ pour } i = 1, \dots, K-1 \\ \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\vec{\nabla}_n \cdot \vec{u} \\ \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_{i=1}^K \rho_i \vec{F}_i - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \\ \rho \frac{de}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{q} - \vec{P} : \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \sum_{i=1}^K \rho_i \vec{F}_i \cdot \vec{V}_i + E_\chi \end{array} \right. \quad (2.84)$$

avec les mêmes notations qu'au chapitre précédent:

$$\vec{V}_i = - \sum_{j=1}^K D_{ij} (\vec{d}_j + k_{T_j} \vec{\nabla} \log T)$$

où

$$\vec{d}_j = \vec{\nabla} X_j + (X_j - Y_j) \vec{\nabla} \log P - \frac{\rho_j}{\rho} (\vec{F}_j - \sum_{i=1}^K Y_i \vec{F}_i)$$

où on note  $X_i$  la fraction molaire et  $Y_i$  la fraction massique.

$w_i$  est le taux de production de l'espèce  $i$  (qui obéit à une loi d'Arrhénius) et tel que

$$\sum_{i=1}^K w_i = 0$$

et  $E_\chi$  l'énergie libérée (ou absorbée) par la réaction chimique.

On rappelle que l'on a

$$\sum_{i=1}^K Y_i \vec{V}_i = \vec{0}$$

Dans ce cadre, un certain nombre d'hypothèses simplificatrices vont être appliquées:

H1: On suppose que les fluides sont soumis à la seule force de la pesanteur.

H2: On néglige les termes en  $\vec{\nabla} \log P$  et  $\vec{\nabla} \log T$

En effet dans un mélange en mouvement, surtout aux vitesses élevées, le terme prépondérant dans la diffusion est celui concernant les gradients de fractions molaires (i.e. de concentrations).

$\vec{V}_i$  devient alors sous ces hypothèses associée à la loi de Stephan-Maxwell :

$$\vec{V}_i = - \sum_{j=1}^K D_{ij} \vec{\nabla} X_j \quad (2.85)$$

Par suite on peut écrire

$$\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T + \frac{5}{2} P \sum_{i=1}^K X_i \vec{V}_i = -\lambda \vec{\nabla} T + \frac{5}{2} P \vec{V}_m \quad (2.86)$$

H3 :

On suppose que chaque gaz obéit à une loi des GP tq :

$$P_i = (\gamma_i - 1) \rho_i e_i \text{ pour } i = 1, \dots, K$$

**Proposition 16** *Un mélange de gaz parfaits obéit à une loi de gaz parfaits du même type*

$$\frac{1}{\gamma - 1} = \sum_{i=1}^K \frac{X_i}{\gamma_i - 1}$$

Démonstration : cf. [63] par exemple.

Le problème en 1D peut s'écrire sous forme canonique :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + A(\vec{U}) \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = H(\vec{U})$$

pour lequel, on va définir le problème hyperbolique associé :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + A(\vec{U}) \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = 0$$

où l'on a pris pour U qui représente les inconnues du problème :

$$\vec{U} = (Y_1, \dots, Y_{k-1}, \rho, V, e)^T$$

### Les différents systèmes étudiés

Les équations de conservation des espèces peuvent être réécrites grâce à l'équation de conservation de la masse de la manière qui suit :

$$\frac{\partial Y_i}{\partial t} + \vec{V} \vec{\nabla} Y_i + \vec{\nabla} Y_i \vec{V}_i + \frac{Y_i}{\rho} \vec{V}_i \vec{\nabla} \rho = Y_i w_i$$

Dans la suite nous allons étudier deux cas qui correspondent à deux manières de considérer cette dernière équation. Mathématiquement cela revient à décomposer de deux façons différentes la matrice du système de convection-diffusion.

Dans le premier cas:

$$\frac{\partial Y_i}{\partial t} + \vec{V} \vec{\nabla} Y_i = -(\vec{\nabla} (Y_i \vec{V}_i) + \frac{Y_i}{\rho} \vec{V}_i \vec{\nabla} \rho) + Y_i w_i$$

Dans le second cas , on écrit:

$$\frac{\partial Y_i}{\partial t} + (\vec{V} + \vec{V}_i) \vec{\nabla} Y_i = -(Y_i \vec{\nabla} \vec{V}_i + \frac{Y_i}{\rho} \vec{V}_i \vec{\nabla} \rho) + Y_i w_i$$

Dans le premier cas, cela revient à dire que tous les termes comprenant du glissement de phase sont ici considérés comme des termes de diffusion.

Dans le second cas en revanche, on introduit un terme de convection qui signifie que l'espèce  $i$  est convectée avec sa vitesse propre  $(\vec{V} + \vec{V}_i)$  et non à la vitesse d'ensemble du mélange  $\vec{V}$ .

Cela conduit à écrire deux systèmes qui sont:

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Y_i}{\partial t} + \vec{V} \vec{\nabla} Y_i = Y_i w_i - (\vec{\nabla} (Y_i \vec{V}_i) + \frac{Y_i}{\rho_i} \vec{V}_i \vec{\nabla} \rho) \text{ pour } i = 1, \dots, K-1 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} (\rho \vec{V}) = 0 \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \vec{V} (\vec{\nabla} \vec{V}) = +\vec{g} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} : 2\eta \vec{S} \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{P}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \frac{5}{2\rho} \vec{\nabla} \cdot P \vec{V}_m + \vec{V} \vec{\nabla} e = \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) + \frac{2\eta}{\rho} \vec{S} : \vec{\nabla} \vec{V} + E_x \end{array} \right. \quad (2.87)$$

et

$$(S_2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Y_i}{\partial t} + (\vec{V} + \vec{V}_i) \vec{\nabla} Y_i = Y_i w_i - (Y_i \vec{\nabla} \vec{V}_i + \frac{Y_i}{\rho_i} \vec{V}_i \vec{\nabla} \rho) \text{ pour } i = 1, \dots, K-1 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} (\rho \vec{V}) = 0 \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \vec{V} (\vec{\nabla} \vec{V}) = +\vec{g} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} : 2\eta \vec{S} \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{P}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \frac{5}{2\rho} \vec{\nabla} \cdot P \vec{V}_m + \vec{V} \vec{\nabla} e = \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) + \frac{2\eta}{\rho} \vec{S} : \vec{\nabla} \vec{V} + E_x \end{array} \right. \quad (2.88)$$

On considère l'ensemble d'équations suivant , écrit en monodimensionnel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Y_i}{\partial t} + V \frac{\partial Y_i}{\partial x} = Y_i w_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho Y_i V_i) \text{ pour } i = 1, \dots, K-1 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + V \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial P}{\partial Y_i} \frac{\partial Y_i}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial x} = g + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (2\eta S) \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{5}{2\rho} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial P V_m}{\partial Y_i} \frac{\partial Y_i}{\partial x} + \frac{P}{\rho} \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial e}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{2\eta}{\rho} (\vec{S} : \vec{\nabla} \vec{V})_x + E_x \end{array} \right. \quad (2.89)$$

On en déduit la matrice  $A(U)$  de ce système qui s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} V & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & V & \rho & 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Y_1} & \dots & \dots & \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Y_{K-1}} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \rho} & V & \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial e} \\ \frac{5}{2\rho} \frac{\partial(PV_m)}{\partial Y_1} & \dots & \dots & \frac{5}{2\rho} \frac{\partial(PV_m)}{\partial Y_{K-1}} & \frac{5V_m}{2\rho} \frac{\partial P}{\partial \rho} & \frac{P}{\rho} & V + \frac{5V_m}{2\rho} \frac{\partial P}{\partial e} \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

On considère le système (S1') suivant ( système homogène associé à (S1) ) :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (2.91)$$

**Théoreme 9** *Le système (S1') est inconditionnellement hyperbolique*

Démonstration: cf. [63]

Remarques:

- 1) A ce stade la loi d'état pour le gaz  $n'$  est pas spécifiée .
- 2) Si l'on annule le glissement de phase ( $V_m = 0$ ) on retrouve le cas bien connu de l'hydrodynamique sans glissement.

Désormais , afin de simplifier les notations, tous les gaz seront considérés comme parfaits si bien que l'équation en  $Z$  ( où  $Z = V - \lambda$  ) à résoudre devient :

$$Z(Z^2 + \frac{5}{2}(\gamma - 1)V_m Z - c^2) = 0$$

ce qui donne pour solutions

$$Z = 0 \text{ et } Z = Z_{\pm}$$

avec

$$Z_{\pm}^2 + \frac{5}{2}(\gamma - 1)V_m Z_{\pm} - c^2 = 0$$

Il est aisé de vérifier que le discriminant est toujours positif quelle que soit la vitesse de glissement  $V_m$ .

**Proposition 17** Les valeurs propres de  $A(U)$  s'expriment lorsque  $\frac{|V_m|}{c} \ll 1$  par:  $\lambda = V$  de multiplicité  $K$  et  $\lambda = \lambda_{\pm} = V \pm c + \frac{5}{4}(\gamma - 1)V_m$  ( ceci est vrai au premier ordre en  $V_i$  )

Démonstration: cf.. [63]

**Proposition 18** Les vecteurs propres de la matrice de convection  $A(U)$  de  $(S1')$  sont:

Pour  $\lambda_i = V, \forall i = 1, \dots, K - 1, \vec{r}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^t$

Pour  $\lambda_K = V, \vec{r}_K = (0, \dots, 0, \rho, 0, -e)^t$

Pour  $\lambda_{\pm}, \vec{r}_{\pm} = (0, \dots, 0, \rho, \pm c + \frac{5}{4}(\gamma - 1)V_m, \frac{c^2}{\gamma} \pm \frac{5}{2}V_m c)^t$

Démonstration: cf. . [63]

Remarque:

La prise en compte du glissement de phase dans le système  $(S1')$  (où seule l'équation d'énergie interne présente une différence par rapport au cas sans glissement de phase) a pour conséquence de modifier deux champs propres.

Le système  $(S1')$  n'étant pas strictement hyperbolique (la valeur propre  $V$  est de multiplicité  $K$ ) il nous faut encore nous assurer que l'ensemble des vecteurs propres ci-dessus forme bien une base de  $R^{K+2}$  Un calcul immédiat nous donne le résultat suivant :

**Proposition 19** L' ensemble des vecteurs propres de  $A(U)$  forme une base de  $R^{K+2}$

Remarque: On peut également noter que cette base propre tend continûment vers la base propre du cas homogène ( ie sans glissement de phase ) lorsqu'on fait tendre les vitesses de glissement vers 0.

Par référence à [70],[71], on va étudier la linéarité des champs . Il est aisé de vérifier que les  $K$  champs associés à la valeur propre  $V$  sont tous Linéairement Dégénérés.

Les deux champs  $\lambda_{\pm}, \vec{r}_{\pm}$  sont Vraiment Non Linéaires lorsque  $\frac{|V_m|}{c} \ll 1$  . En effet, on trouve que

$$\vec{\nabla} \lambda_{\pm} \vec{r}_{\pm} = \pm \left( \frac{\gamma - 1}{2} \right) c + \frac{5}{4} \gamma (\gamma - 1) V_m$$

La conclusion en découle immédiatement.

Les invariants de Riemann associés aux champs  $i$  (  $i = 1, \dots, K - 1$  ) sont:

$$(Y_1, \dots, Y_i, Y_{i+1}, \dots, Y_{K-1}, \rho, V, e)$$

On connaît également  $K+1$  invariants de Riemann pour le champ  $K$  où  $\lambda_K = V$ .  
On trouve :

$$(Y_1, \dots, Y_i, Y_{i+1}, \dots, Y_{K-1}, \rho, P)$$

Nous devons chercher des invariants de Riemann pour les champs  $\lambda_{\pm}$ . Pour cela nous devons au préalable nous rappeler un résultat établi lors de l'étude bibliographique concernant l'ordre d'approximation auquel on se plaçait pour écrire les équations de transport. Ce résultat nous disait que les équations de Navier-Stokes étaient les équations de transport macroscopiques dérivées de l'équation de transport de Boltzmann microscopique aux termes d'ordre 2 en vitesses de glissement près. Si bien que nous nous sommes jusqu'à maintenant limités ( et nous continuerons à le faire bien sûr ) à exprimer toute quantité dépendant du glissement de phase jusqu'à l'ordre 1 en celui-ci ( d'où le développement limité introduit pour les  $\lambda_{\pm}$  et leurs vecteurs propres ). On connaît  $K+1$  invariants de Riemann du cas homogène :

$$Y_1, \dots, Y_K, V \pm \frac{2}{\gamma-1}c, \frac{P}{\rho^\gamma}$$

Après résolution du système, on dispose de  $K+1$  invariants de Riemann du cas avec glissement ( on vérifie aisément que les gradients de ces invariants sont bien linéairement indépendants):

$$(Y_1, \dots, Y_K, V \pm \frac{2}{\gamma-1}c + \frac{3\gamma-1}{\gamma-1}V_m \text{Ln}(e), \frac{P}{\rho^\gamma} \mp 5V_m \frac{c}{\rho^\gamma})$$

On considère l'ensemble d'équations suivant, écrit en monodimensionnel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Y_i}{\partial t} + (V + V_i) \frac{\partial Y_i}{\partial x} = Y_i w_i - \frac{Y_i V_i}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} - Y_i \frac{\partial V_i}{\partial x} \text{ pour } i = 1, \dots, K-1 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + V \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial P}{\partial Y_i} \frac{\partial Y_i}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial x} = g + \frac{1}{\rho} \frac{\partial 2\eta S}{\partial x} \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{5}{2\rho} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial P V_m}{\partial Y_i} \frac{\partial Y_i}{\partial x} + \frac{P}{\rho} \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial e}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{2\eta}{\rho} (\vec{S} : \vec{\nabla} \vec{V})_x + E_x \end{array} \right. \quad (2.92)$$

On en déduit la matrice  $B(U)$  de ce système qui s'écrit :

$$B = \begin{pmatrix} V + V_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & V + V_{K-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & V & \rho & 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Y_1} & \dots & \dots & \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Y_{K-1}} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \rho} & V & \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial e} \\ \frac{5}{2\rho} \frac{\partial(PV_m)}{\partial Y_1} & \dots & \dots & \frac{5}{2\rho} \frac{\partial(PV_m)}{\partial Y_{K-1}} & \frac{5V_m}{2\rho} \frac{\partial P}{\partial \rho} & \frac{P}{\rho} & V + \frac{5V_m}{2\rho} \frac{\partial P}{\partial e} \end{pmatrix} \quad (2.93)$$

On considère le système (S2') suivant (système homogène associé à (S2)) :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + B(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (2.94)$$

**Théoreme 10** *Le système (S2') est inconditionnellement hyperbolique*

Démonstration:cf.. [63]

**Proposition 20** *Les vecteurs propres de la matrice de convection  $B(U)$  de (S2') sont les mêmes que ceux de la matrice  $A(U)$*

Démonstration:cf.. [63]

Les invariants de Riemann de (S2') sont identiques à ceux de (S1') car les bases propres sont identiques. Les valeurs propres du système (S1) peuvent être classées par ordre croissant :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{K+1} \leq \lambda_{K+2}$$

avec :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_- = V - c + \frac{5}{4}(\gamma - 1)V_m \\ \lambda_2 = \dots = \lambda_{K+1} = V \\ \lambda_{K+2} = \lambda_+ = V + c + \frac{5}{4}(\gamma - 1)V_m \end{cases} \quad (2.95)$$

Les premier et dernier champs sont, on l'a vu, vraiment non linéaires c'est-à-dire

que les ondes associées sont soit des ondes de choc, soit des ondes de détente . Les champs intermédiaires sont quant à eux linéairement dégénérés c'est-à-dire que leur sont associées des ondes de raréfaction .

NB: Par rapport à l'hydrodynamique sans glissement de phase, seule la quatrième relation de choc est modifiée. Aussi, le raisonnement appliqué sans glissement sur les courbes de choc peut être souvent réutilisé. On considère le problème de Riemann (P) défini par  $U_L$  l'état gauche et par  $U_R$  l'état droit.

**Théoreme 11** *Le problème de Riemann admet une solution unique si et seulement si*

$$V_R - V_L < \frac{2}{\gamma_L - 1} c_L + \frac{2}{\gamma_R - 1} c_R$$

Démonstration: cf . [63]

Pour résoudre le problème de Riemann que nous avons étudié, nous avons considéré que les vitesses de glissement de phase obéissaient à une loi de Stefan-Maxwell.

Si l'on se réfère à la théorie cinétique des gaz ( cf étude bibliographique ) il nous faudrait pour déterminer ces seuls coefficients inverser plusieurs systèmes (K,K) à chaque pas de temps : ce serait par trop coûteux et rendrait le code quasi inutilisable.

Hirschfelder et Curtiss, confrontés au même problème, ont avancé la formule approchée suivante :

$$\vec{V}_k = -\frac{D_k^*}{X_k} \vec{\nabla} X_k + \vec{V}_c$$

avec

$$D_k^* = \frac{1 - Y_k}{\sum_{l \neq k} \frac{X_l}{D_{k,l}}}$$

où  $D_{k,l}$  est le coefficient de diffusion binaire et  $\vec{V}_c$  vitesse de correction telle que :

$$\sum_{k=1}^K Y_k \vec{V}_k = \vec{0}$$

soit :

$$\vec{V}_c = \sum_{k=1}^K D_k^* \frac{Y_k}{X_k} \vec{\nabla} X_k$$

De l'expression des  $\vec{V}_i$ , on en déduit celle de  $\vec{V}_m$  qui vaut

$$\vec{V}_m = \sum_{l=1}^K \frac{1 - Y_l}{\sum_{j \neq l} \frac{X_j}{D_{j,l}}} \left( \frac{Y_l}{X_l} - 1 \right) \vec{\nabla} X_l$$

Le système (S'2) contrairement à (S'1) n'est pas conservatif. Il est cependant très intéressant à étudier car il prend plus en compte dans sa partie convective - que nous allons regarder plus attentivement dans ce paragraphe - la physique des mélanges puisqu'il convecte les fractions massiques  $Y_i$  à la vraie vitesse de l'espèce  $i$ , à savoir  $V + V_i$  et non plus seulement à la vitesse d'ensemble du mélange  $V$ .

Nous nous intéresserons dans ce qui suit à la partie transport de ce système, c'est-à-dire que nous considérerons le système suivant :

On a vu dans le chapitre précédent que l'on connaissait déjà beaucoup d'informations sur ce système :

Il est inconditionnellement hyperbolique ( strictement même si les vitesses de glissement sont toutes différentes les unes des autres ). Les valeurs propres sont :

$$\lambda_i = V + V_i \text{ pour } i = 1, K - 1, \lambda = V, \lambda_{\pm} = V \pm c + \frac{5}{4}(\gamma - 1)V_m$$

les vecteurs propres sont identiques à ceux du système (S'1) Par conséquent les invariants de Riemann sont eux-aussi identiques à ceux de (S'1)

Le champ  $(V, r_{\vec{K}})$  est linéairement dégénéré.

Tous les autres champs sont vraiment non linéaires.

Les courbes paramétrées des détente ont été exprimées pour le système (S'1) et sont ici identiques puisque les invariants de Riemann sont communs aux deux systèmes

En ce qui concerne les courbes de choc il faut noter que le système (S2') n'est pas conservatif : les équations d'évolution des espèces sont non conservatives et posent problème pour l'écriture des courbes de choc correspondantes. En considérant l'équation d'évolution de l'espèce  $i$  et en notant par 1 les états avant le choc et 2 après, pour  $\sigma$  une vitesse de choc donnée, on obtient :

$$[mY_i] + \left[ \int \rho V_i \partial_x Y_i dx \right] = 0$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement nous donne  $m=cst$

On en déduit :

$$\int (m + \rho V_i) \partial_x Y_i = cst$$

Conclusion : les fractions massiques ne varient pas au travers des chocs associés aux valeurs propres  $\lambda_{\pm}$  et  $\lambda_i = V + V_i$ .

Comme elles ne varient pas non plus au travers des ondes de détente associées aux valeurs propres  $\lambda_{\pm}$ , on peut dire que les fractions massiques ne sont pas affectées par les 1 et  $K+2$  ondes.

Pour le champ  $\lambda_k = V$ , son étude a déjà été réalisée pour le système (S1) . Il s'agit d'un champ linéairement dégénéré donc d'une discontinuité de contact.

Par un raisonnement analogue au cas général , on obtient :

**Théoreme 12** *La solution du problème de Riemann existe et est unique si et seulement si :*

$$V_R - V_L < \frac{2}{\gamma_L - 1} c_L + \frac{2}{\gamma_R - 1} c_R$$

Démonstration: cf.. [63]

### 2.5.3 Schéma Numérique

Le schéma qui est mis en oeuvre est le schéma de Van Leer qui est une extension au deuxième ordre en espace du schéma de Godounov.

#### Rappel sur les schémas conservatifs

Quelques rappels sur la construction du schéma de Van-Leer dans le cas classique, c.à.d. dans le cas de systèmes d'équations conservatives hyperboliques permettent de comprendre son extension. Ceci est nécessaire pour mieux comprendre les changements à faire pour adapter le schéma de Van-Leer le plus naturellement possible au cas de systèmes non conservatifs hyperboliques.

On suppose tout d'abord qu'à chaque étape de la discrétisation la solution aura une pente constante dans chaque maille.

On suppose également, que la solution de problème de Riemann sur la frontière entre les mailles est connue.

Considérons maintenant les équations sous forme conservative:

On pourra se référer par exemple à [47]

Le schéma se développe dans quatre étapes :

- Prédiction de la solution au demi pas de temps dans le cadre d'un schéma prédicteur
- Calcul des flux par un solveur de Riemann faisant interagir les différentes ondes.
- Bilan sur un pas de temps dans une cellule de travail
- Calcul des pentes de manière à préserver au mieux une notion T.V.D. sur les quantités conservatives .

#### Cas des systèmes non conservatifs 1D

Canoniquement un tel système peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\partial_t U + A(U) \partial_x U = 0$$

Il est évident, que l'étape de la prédiction est exactement la même que dans le cas du système conservatif. Par contre, pour l'étape de bilan on ne peut plus

utiliser le théorème de la divergence puisque l'on ne dispose pas d'un flux. Intégrer le système non conservatif ci-dessus signifie savoir proposer une estimation de l'intégrale volumique intervenant dans la partie non conservative.

Pour la partie strictement non conservative on propose une estimation très simple, dont la bonne correspondance avec les solutions analytiques a été démontrée par [116]:

$$I = \int_{n\delta t}^{(n+1)\delta t} \int_{(j-1/2)\delta x}^{(j+1/2)\delta x} A(U^{n+1/2}) \nabla U^{n+1/2} dx$$

est approximé par

$$I' = \Delta t \bar{A}(U_j^{n+1/2}) \int_{(j-1/2)\delta x}^{(j+1/2)\delta x} \nabla U^{n+1/2} dx$$

où

$$\bar{A}(U_j^{n+1/2}) = \frac{1}{N_j} \sum_{i=1}^{N_j} \bar{A}(U_{j,i}^{n+1/2})$$

avec  $N_j$  représentant le nombre de voisins de la cellule  $j$ .

Comme il faut résoudre le système considéré en géométrie 3D, il est utile de s'intéresser aux ajouts liés au passage multidimensionnel.

### Cas des systèmes non conservatifs 3D

Il est facile maintenant d'écrire le schéma adapté au non conservatif dans le cas multidimensionnel (l'extension du schéma conservatif 1D au cas à plusieurs dimensions a été réalisée dans [47])

On considère de même les quatre étapes :

Prédiction puis Etude du Problème de Riemann pour le Bilan et enfin le calcul des pentes

Pour faire le lien avec ce que l'on a dit aux paragraphes précédents concernant les systèmes que l'on veut étudier, il faut avoir à l'esprit que la résolution du problème de Riemann intervient entre l'étape de prédiction et celle du bilan.

C'est ainsi que nous considérons les quantités  $V_m$  et  $V_i$  comme connues dans le solveur de Riemann car nous les exprimons (au moyen de la loi de comportement de Stefan-Maxwell) en fonction des valeurs prédites. L'erreur ainsi commise est très faible car les vitesses de diffusion étant des quantités petites devant la vitesse du son, leurs variations d'un pas de temps à l'autre étant au plus de l'ordre de  $v/c$ , l'erreur commise sur la variation est vraiment très faible.

### Traitement des termes sources

Dans ce cadre, on traite en partie explicite les termes sources et les matrices visqueuses dont on calcule le bilan sur une maille par le fait qu'on connaisse

un gradient dans une maille. Dans le cas 3D on doit considérer 9 matrices visqueuses et non plus 4 comme en 2D.

Pour les termes sources, la méthode présentée précédemment ne peut être utilisée telle quelle.

L'étape de la prédiction est intégrée par une méthode de Runge-Kutta du second ordre et l'étape du bilan est donnée par la résolution numérique du système avec l'utilisation d'une méthode de Runge-Kutta du 4ème ordre. Le restant demeure inchangé.

Les termes sources sont de trois ordres :

- termes d'origine chimique d'ordre 0 en terme de U
- termes dus à la pesanteur, d'ordre 0 eux aussi.
- termes de diffusion et de viscosité d'ordre 2.

Le même traitement est utilisé dans les trois cas •

## Chapitre 3

# Traitement numérique de la Turbulence compressible par un modèle à deux équations

### 3.1 Introduction

Pour une présentation générale , à travers un point de vue numérique , voir par exemple [121].

Aussi voici une présentation à l'aide d'un modèle standard est envisagé A l'aide d'un modèle compressible  $K - \epsilon$ . Sont présentés:

Les équations du modèle à l'aide des moyennes de FAVRE

La réalisabilité des équations en relation avec les termes sources et les termes visqueux

Le modèle  $K-\epsilon$  model est analysé à l'aide de la théorie standard hyperbolique Dans la même voie, est proposée une nouvelle approche pour un mélange à deux fluides.

La principale contribution porte sur le problème de Riemann sous jacent à ces équations ainsi que la relation avec les termes visqueux et les termes du second ordre.

Sur ce type d'études, les contributions sur les systèmes conservatifs et leurs extensions au cas non conservatif sont fondées sur les approches continues dans différents papiers comme [33] qui est essentiel. Sur ce sujet, d'autres travaux doivent être pris en considération comme ceux de [25],[26],[27]•.

### 3.2 Equations moyennées par les moyennes de FAVRE

On utilise la modélisation standard des fluides compressibles à travers les équations de NAVIER-STOKES écrites sous forme conservative:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho W)}{\partial z} = 0. \\ \frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U^2 + \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho UV + \tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho UW + \tau_{xz})}{\partial z} = 0. \\ \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho UV + \tau_{yx})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V^2 + \tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho VW + \tau_{yz})}{\partial z} = 0. \\ \frac{\partial(\rho W)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho UW + \tau_{zx})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho VW + \tau_{zy})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho W^2 + \tau_{zz})}{\partial z} = 0. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

à laquelle est associée l'équation d'énergie

$$\begin{aligned} & (\rho E)_t + (U(\rho E + \tau_{xx}) + V\tau_{xy} + W\tau_{xz})_x + \\ & (U\tau_{yx} + V(\rho E + \tau_{yy}) + W\tau_{yz})_y + (U\tau_{zx} + V\tau_{zy} + W(\rho E + \tau_{zz}))_z = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

où la loi standard de NEWTON est employée

$$\tau_{ij} = p\delta_{ij} - \mu_{lam}(U_{i,j} + U_{j,i} - \frac{2}{3}U_{l,l}\delta_{i,j}) \quad (3.3)$$

pour laquelle la loi des gaz parfaits est utilisée:

$$p = (\gamma - 1)(\rho E - \frac{1}{2}\rho(U^2 + V^2 + W^2)) \quad (3.4)$$

où  $\gamma$  est le ratio des chaleurs spécifiques ( $\gamma > 1$ ).

En utilisant la moyenne de FAVRE, comme dans [?] pour une quantité  $f$ :

$$\tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}} \quad (3.5)$$

Les équations de NAVIER-STOKES sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{V}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{W}}{\partial z} = 0. \\ \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{U}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{U}^2 + \tau_{xx}^t)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{U} \tilde{V} + \tau_{xy}^t)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{U} \tilde{W} + \tau_{xz}^t)}{\partial z} = 0. \\ \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{V}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{U} \tilde{V} + \tau_{yx}^t)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{V}^2 + \tau_{yy}^t)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{V} \tilde{W} + \tau_{yz}^t)}{\partial z} = 0. \\ \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{W}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{U} \tilde{W} + \tau_{zx}^t)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{V} \tilde{W} + \tau_{zy}^t)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{W}^2 + \tau_{zz}^t)}{\partial z} = 0. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

et l' équation moyennée d'énergie s'écrit:

$$(\bar{\rho}\bar{E})_t + (\bar{U}(\bar{\rho}\bar{E} + \tau_{xx}^t) + \bar{V}\tau_{xy}^t + \bar{W}\tau_{xz}^t)_x + (\bar{U}\tau_{yx}^t + \bar{V}(\bar{\rho}\bar{E} + \tau_{yy}^t) + \bar{W}\tau_{yz}^t)_y + (\bar{U}\tau_{zx}^t + \bar{V}\tau_{zy}^t + \bar{W}(\bar{\rho}\bar{E} + \tau_{zz}^t))_z + (\Phi_x^E)_x + (\Phi_y^E)_y + (\Phi_z^E)_z = 0. \quad (3.7)$$

où l'énergie cinétique turbulente  $K$  ( $2K = \langle \rho u_i'' u_i'' \rangle$ ) est associée

$$\frac{\partial \bar{K}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{K}\bar{U} + \Phi_x^K)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{K}\bar{V} + \Phi_y^K)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{K}\bar{W} + \Phi_z^K)}{\partial z} + \frac{2}{3}\bar{K}\left(\frac{\partial\bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{V}}{\partial y} + \frac{\partial\bar{W}}{\partial z}\right) = S_K \quad (3.8)$$

Les relations de fermeture s'écrit:

$$\tau_{ij}^t = (\bar{p} + \frac{2}{3}\bar{K})\delta_{ij} - \mu(\bar{U}_{ij} + \bar{U}_{ji} - \frac{2}{3}\bar{U}_{ii}\delta_{ij}) \quad (3.9)$$

$$\Phi_i^E = -\frac{\kappa}{c_v} \frac{\partial(\bar{p}^{-1}\bar{P})}{\partial x_i} \quad (3.10)$$

et

$$\mu = \mu_{lam} + \mu^t = \mu_{lam} + C \frac{\bar{K}^2}{\epsilon}$$

$$S_K = \frac{\mu^t}{2}(\bar{U}_{ij} + \bar{U}_{ji} - \frac{2}{3}\bar{U}_{ii}\delta_{ij})(\bar{U}_{ij} + \bar{U}_{ji}) - \bar{\epsilon} = P - \bar{\epsilon} \quad (3.12)$$

avec

$$\Phi_i^K = -\sigma_K \frac{\partial(\bar{p}^{-1}\bar{K})}{\partial x_i} \quad (3.13)$$

La dissipation est définie par

$$\bar{\rho}\epsilon = \frac{\mu}{2} \overline{(\nabla u' + (\nabla u')^t)^2} - \frac{2}{3} \mu \overline{(\nabla u')^2} \quad (3.14)$$

L' équation non conservative de dissipation est:

$$\bar{\epsilon}_t + (\bar{\epsilon}\bar{U} + \Phi_x^\epsilon)_x + (\bar{\epsilon}\bar{V} + \Phi_y^\epsilon)_y + (\bar{\epsilon}\bar{W} + \Phi_z^\epsilon)_z + \frac{2}{3}C_{\epsilon_1}\bar{\epsilon}((\bar{U})_x + (\bar{V})_y + (\bar{W})_z) = S_\epsilon \quad (3.15)$$

où

$$S_\epsilon = \frac{\bar{\epsilon}}{K}(C_{\epsilon_1}P - C_{\epsilon_2}\bar{\epsilon}) \quad (3.16)$$

et

$$\Phi_i^\epsilon = -\sigma_\epsilon \frac{\partial(\bar{p}^{-1}\bar{\epsilon})}{\partial x_i} \quad (3.17)$$

Dans ces définitions,  $\sigma_K$  and  $\sigma_\epsilon$  sont des fonctions positives bornées.

Remarque: Dans le cas particulier où l'équation d'état est celle d'un gaz parfait, cette dernière définie dans le cas microscopique est étendue à la valeur moyenne soit:

$$\bar{p} = (\gamma - 1)(\bar{E} - \frac{1}{2}\bar{\rho}(\tilde{U}^2 + \tilde{V}^2 + \tilde{W}^2) - \bar{K}) \quad (3.18)$$

par la suite les symboles  $\tilde{\phantom{x}}$  et  $\bar{\phantom{x}}$  seront omis par soucis de simplification•

### 3.3 Considération sur le système du premier ordre

Dans un premier temps, on ne considère que le modèle en K.

#### 3.3.1 Modèle en K en 3D

En ne conservant que les termes au premier ordre, le système s'écrit dans les nouvelles variables sous forme non conservative avec :

$$Z = (\rho, U, V, W, K, p)^t \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + A \frac{\partial Z}{\partial x} + B \frac{\partial Z}{\partial y} + C \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \quad (3.20)$$

où on a note

$$A = \begin{pmatrix} U & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U & 0 & 0 & \frac{2}{3\rho} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & U & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5K}{3} & 0 & 0 & U & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & 0 & 0 & U \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

et aussi

$$B = \begin{pmatrix} V & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V & 0 & \frac{2}{3\rho} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5K}{3} & 0 & V & 0 \\ 0 & 0 & \gamma p & 0 & 0 & V \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

et

$$C = \begin{pmatrix} W & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & W & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W & \frac{2}{3\rho} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5K}{3} & W & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma p & 0 & W \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Ce système est non strictement hyperbolique et on pose

$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)^t$  as  $\|\vec{n}\| = 1$ ,  $M = An_x + Bn_y + Cn_z$  et  $u = Un_x + Vn_y + Wn_z$

$$c'^2 = \gamma \frac{p}{\rho} + \frac{10K}{9\rho} \quad (3.24)$$

**Proposition 21** La matrice  $M$  admet un ensemble complet de vecteurs propres  $r_i$  associés aux valeurs propres  $\lambda_i$  définies par:

$$\lambda_1 = u - c'; \lambda_i = u \text{ (pour } i = 2 \text{ à } 5); \lambda_6 = u + c'$$

Démonstration cf. [59]

### 3.3.2 Cas 1D

En se concentrant sur ce cas où  $V = W = 0$  et tout dépend de  $t$  et  $x$ , voir pour une présentation générale [70]. On peut écrire:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho U) = 0. \\ \frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho U^2 + p + \frac{2}{3}K) = 0. \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(U(\rho E + p + \frac{2}{3}K)) = 0. \\ \frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(KU) + \frac{2}{3}K \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \end{array} \right. \quad (3.25)$$

avec la loi d'état(E.O.S.):

$$p = (\gamma - 1)(\rho E - \frac{1}{2}\rho(U^2 + V^2 + W^2) - K) \quad (3.26)$$

Soient:

$$s = c_v \log(p\rho^{-\gamma})$$

avec

$$\alpha = \frac{\partial p}{\partial s}, c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \text{ et } K = \rho k \quad (3.27)$$

**Proposition 22** *Le système est hyperbolique et admet comme ensemble de valeurs propres  $\lambda_1 = U - c'$ ;  $\lambda_i = U$  pour  $i = 2, 3$ ;  $\lambda_4 = U + c'$  et de vecteurs propres  $r_i$*

$$r_1 = (\rho, -c', 0, 5K/3)^t$$

$$r_2 = (-\alpha/c^2, 0, 1, 0)^t$$

$$r_3 = (-2/(3c^2), 0, 0, 1)^t$$

$$r_4 = (\rho, c', 0, 5K/3)^t$$

**Proposition 23** *Les champs 1 et 4 sont vraiment non linéaires et les champs 2 et 3 linéairement dégénérés (associés à la même valeur propre)*

Démonstration: cf. [59]

### 3.3.3 Paramétrisation des courbes de choc et discontinuités de contact

La difficulté essentielle provient du fait qu'une équation s'écrit sous forme non conservative. Aussi doit on justifier le traitement de relations de saut généralisée qui fera l'objet d'un traitement dans le chapitre suivant.

Soient deux états (droit R et gauche L) pour une quantité  $\Psi$ , on note:

$$[\Psi] = \Psi_R - \Psi_L, \bar{\Psi} = \frac{1}{2}(\Psi_R + \Psi_L) \quad (3.28)$$

Les conditions de Rankine-Hugoniot s'écrivent:

$$\begin{cases} \sigma[\rho] = [\rho U] \\ \sigma[\rho U] = [\rho U^2 + p + \frac{2}{3}K] \\ \sigma[\rho E] = [U(\rho E + p + \frac{2}{3}K)] \end{cases} \quad (3.29)$$

avec la dernière relation de saut:

$$\sigma[K] = [KU] + \frac{2}{3}\bar{K}[U]$$

On en déduit les paramétrisations des courbes.

**Proposition 24** Pour les 1-4 chocs (où  $m$  est différent de zéro), une paramétrisation est:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \frac{z}{z-1}(u_r - u_l/z) \\ \frac{\rho_r}{\rho_l} = z \\ \frac{p_r}{p_l} = \pi = \frac{\beta z - 1}{\beta - z} \\ \frac{K_r}{K_l} = \frac{4z - 1}{4 - z} \\ \frac{u_r - u_l}{c_l} = \pm \frac{z-1}{z^{1/2}} \left( \frac{2}{(\gamma-1)(\beta-z)} + \frac{10K_l}{3\gamma p_l(4-z)} \right)^{1/2} \end{array} \right. \quad (3.30)$$

avec le signe - pour un 1-choc ( $z > 1$ ) et le signe + pour les 4-chocs ( $0 < z < 1$ ).  
En ce qui concerne les discontinuités de contact ( $m = 0$ ), on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = u_l = u_r \\ p_r - p_l + \frac{2}{3}(K_r - K_l) = 0 \end{array} \right. \quad (3.31)$$

avec  $\frac{\rho_r}{\rho_l}$  et  $\frac{K_r}{K_l}$  indéterminés.

#### Calcul formel

On utilise les mêmes notations que dans [11] où la loi de turbulence est définie avec  $\gamma_\tau$  ce qui correspond à notre cas avec  $\gamma_\tau = \frac{5}{3}$ . Dans le cas 1D, le système s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho U) = 0. \\ \frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho U^2 + p + (\gamma_\tau - 1)K) = 0. \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(U(\rho E + p + (\gamma_\tau - 1)K)) = 0. \\ \frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(KU) + (\gamma_\tau - 1)K \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \end{array} \right. \quad (3.32)$$

Les relations de Rankine-Hugoniot peuvent s'écrire:

$$\left\{ \begin{array}{l} s[\rho] = [\rho U] \\ s[\rho U] = [\rho U^2 + p + (\gamma_\tau - 1)K] \\ s[\rho E] = [U(\rho E + p + (\gamma_\tau - 1)K)] \end{array} \right. \quad (3.33)$$

avec la dernière relation

$$s[K] = [KU] + (\gamma_\tau - 1) \int K \frac{\partial U}{\partial x}$$

Par simple changement à travers une transformation Galiléenne

$$V = U - s$$

on a:

$$\begin{cases} [\rho V] = 0 \\ [\rho V^2 + p + (\gamma_\tau - 1)K] + s[\rho V] = 0 \\ [V(\frac{1}{2}\rho V^2 + \rho e + K + p + (\gamma_\tau - 1)K)] + s[\rho V^2 + p + (\gamma_\tau - 1)K] + \frac{s^2}{2}[\rho V] = 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

et la dernière:

$$[KV] + (\gamma_\tau - 1) \int K \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

**Proposition 25** Il existe trois constantes  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  telles que  $K$  peut être écrit comme combinaison des énergies  $\rho V^2$ ,  $\rho V^2 + p + (\gamma_\tau - 1)K$ ,  $(\frac{1}{2}\rho V^2 + \rho e + K) + p + (\gamma_\tau - 1)K$ . On en déduit:

$$K = a_1 \rho V^2 + a_2 (\rho V^2 + p + (\gamma_\tau - 1)K) + a_3 ((\frac{1}{2}\rho V^2 + \rho e + K) + p + (\gamma_\tau - 1)K) \quad (3.35)$$

avec

$$\text{pour } \gamma \neq \gamma_\tau \quad \begin{cases} a_1 = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - \gamma_\tau)} \\ a_2 = -\frac{\gamma}{\gamma - \gamma_\tau} \\ a_3 = \frac{\gamma - 1}{\gamma - \gamma_\tau} \end{cases} \quad (3.36)$$

Démonstration: un simple calcul donne ce résultat.

**Proposition 26** Par calcul formel, l'expression non conservative donne:

$$\int K \frac{\partial U}{\partial x} = \bar{K}[U] + O([U]^3) \quad (3.37)$$

for  $\gamma \neq \gamma_\tau$

Démonstration: cf. [59]

**Chemins visqueux à l'aide des équations de NAVIER-STOKES dans le cas laminaire**

On utilise les équations 1D de Navier-Stokes,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho U}{\partial t} + \frac{\partial (\rho U^2 + \tau)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (U(\rho E + \tau) + \Phi)}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (3.38)$$

Les fermetures s'écrivent:

$$\tau = p - \frac{4}{3} \mu^l \frac{\partial U}{\partial x} \quad (3.39)$$

$$\Phi = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\kappa}{c_v} \frac{\partial e}{\partial x} \quad (3.40)$$

On utilise la théorie des travelling waves, en définissant  $V = U - \sigma$ , on obtient comme solution:

$$V = \frac{V_l + V_r \exp(\theta)}{1 + \exp(\theta)} \quad (3.41)$$

avec

$$\theta = \frac{M}{2\chi} (\gamma + 1) (V_l - V_r) (x - x_0)$$

Ces relations donnent la relation à l'infini si et seulement si  $V_l > V_r$  qui est précisément la relation de choc (par rapport à une détente). Les conditions portent sur le nombre de Prandtl défini par

$$Pr = \frac{4\mu^l}{3\chi} \quad (3.42)$$

qui doit vérifier

$$\gamma Pr = 1 \quad (3.43)$$

**Justification par la théorie des chemins visqueux**

Le calcul de saut généralisé n'est pas autorisé et la justification passé par la théorie des chemins visqueux développée par [137]. Soit en 1D, le système

suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho U}{\partial t} + \frac{\partial (\rho U^2 + \tau)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (U(\rho E + \tau) + \Phi)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial (KU + \Phi^K)}{\partial x} + (\gamma_\tau - 1)K \frac{\partial U}{\partial x} = S_K \end{array} \right. \quad (3.44)$$

avec:

$$\tau = (p + (\gamma_\tau - 1)K) - \frac{4}{3}\mu \frac{\partial U}{\partial x} \quad (3.45)$$

et

$$\mu = \mu_{lam} + \mu^t$$

$$\Phi = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\kappa}{c_v} \frac{\partial e}{\partial x} \quad (3.47)$$

$$S_K = \frac{4}{3}\mu^t \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 \quad (3.48)$$

with

$$\Phi^K = -\sigma_K \frac{\partial (\rho^{-1}K)}{\partial x} \quad (3.49)$$

Par la théorie des travelling waves, en posant

$$g_1 = -\frac{1}{M(\gamma-1)}\left(2\chi + \frac{4}{3}\mu\right) - \frac{\sigma}{M(\chi-\sigma)}\left(\chi - \sigma \frac{\gamma-1}{\gamma_\tau-1}\right) \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

$$g_2 = \frac{C\chi}{M^2(\gamma-1)} - \frac{\sigma}{M(\chi-\sigma)}\left(\chi - \sigma \frac{\gamma-1}{\gamma_\tau-1}\right) \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{C}{M}$$

$$g_3 = \frac{4}{3} \frac{\chi\mu}{M^2(\gamma-1)} + \frac{2\chi + \frac{4}{3}\mu}{\gamma-1} \frac{\sigma}{M^2(\chi-\sigma)}\left(\chi - \sigma \frac{\gamma-1}{\gamma_\tau-1}\right)$$

$$g_4 = -\frac{4\mu_\tau}{3M^2}\left(\chi - \sigma \frac{\gamma-1}{\gamma_\tau-1}\right)^2 \frac{\gamma_\tau-1}{\gamma-1}$$

$$g_5 = -\left(\chi - \sigma \frac{\gamma-1}{\gamma_\tau-1}\right) \frac{\sigma}{M(\chi-\sigma)} \frac{C\chi}{M^2(\gamma-1)}$$

$$g_6 = -(\chi - \sigma \frac{\gamma - 1}{\gamma_\tau - 1}) \frac{\sigma}{M(\chi - \sigma)} \frac{4\chi\mu}{3M^2(\gamma - 1)}$$

alors l'équation différentielle vérifiée s'écrit:

$$\begin{aligned} (\gamma_\tau - 1)KV' &= \frac{\gamma_\tau - 1}{F} \left( \frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} MVV' - \frac{\gamma}{\gamma - 1} CV' + D \frac{V'}{V} \right) \\ + M \frac{\gamma_\tau - 1}{F} &(g_1 V'^2 + g_2 \frac{V'^2}{V} + (g_3 + g_4) \frac{V'^3}{V} + g_3 V'V'' + g_5 \frac{V'V''}{V} + g_6 (VV''' + \frac{3V'^3 V''}{V})) \end{aligned} \quad (3.50)$$

**Théoreme 13** Si on suppose que toutes les intégrales de  $V'^2$ ,  $\frac{V'^2}{V}$ ,  $\frac{V'^3}{V}$ ,  $V'V''$ ,  $\frac{V'V''}{V}$ ,  $V'V'''$ ,  $\frac{V''V'^2}{V}$  existent et qu'il existe trois constantes positives  $a_1, a_2, a_3$  telles que  $\frac{1}{a_1} \leq \frac{\sigma}{\chi} \leq a_1$ ,  $\frac{1}{a_2} \leq \frac{\mu}{\chi} \leq a_2$ ,  $\frac{1}{a_3} \leq \frac{\mu_\tau}{\chi} \leq a_3$ , alors tous les paramètres visqueux tendent vers zero et

$$(\gamma_\tau - 1) \int KV' = (\gamma - 1) \left( \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} M \left[ \frac{V^2}{2} \right] - \frac{\gamma}{\gamma - 1} C[V] + D[\text{Log}V] \right)$$

ou

$$(\gamma_\tau - 1) \int KV' = \frac{\gamma + 1}{2} M \left[ \frac{V^2}{2} \right] - \gamma C[V] + D(\gamma - 1)[\text{Log}V]$$

ce qui signifie que le chemin de Volpert est une approximation du chemin réel.

Démonstration: cf. [59]

**Théoreme 14** Pour le cas particulier correspondant aux conditions de choc sur la vitesse, on peut conclure que les chemins visqueux EXACTS vérifient

$$(\gamma_\tau - 1) \int KV' = \frac{\gamma + 1}{2} M \left[ \frac{V^2}{2} \right] - \gamma C[V] + D(\gamma - 1)[\text{Log}V] \quad (3.51)$$

ce qui donne le produit de Volpert comme une approximation.

Démonstration: cf. [59]

**Proposition 27** De cette formulation, on en déduit que  $\mu^\dagger$  s'exprime comme une fonction de  $V$ .

Démonstration: cf. [59]

### 3.3.4 Ondes de détente

**Proposition 28** *Le système admet les invariants de RIEMANN suivants*

$$\lambda_1 = U - c', \Phi_1^{1,2,3} = (s, K\rho^{-5/3}, U + \int^\rho \frac{c'(\mu, s, K\rho^{-5/3})}{\mu} d\mu)^t$$

$$\lambda_2 = U, \Phi_2^{1,2,3} = (U, p, p + \frac{2}{3}K)^t$$

$$\lambda_3 = U, \Phi_3^{1,2,3} = (U, s, p + \frac{2}{3}K)^t$$

$$\lambda_4 = U + c', \Phi_4^{1,2,3} = (s, K\rho^{-5/3}, U - \int^\rho \frac{c'(\mu, s, K\rho^{-5/3})}{\mu} d\mu)^t$$

Démonstration: cf. [59]

## 3.4 Etude générale du problème de RIEMANN

Soit le problème défini par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U)}{\partial x} = 0. \\ \frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{\partial K}{\partial x} = 0. \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(U(\rho E + p + \frac{2}{3}K))}{\partial x} = 0. \\ \frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial(KU)}{\partial x} + \frac{2}{3} K \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \end{array} \right. \quad (3.52)$$

avec l' E.O.S.

$$p = (\gamma - 1)(\rho E - \frac{1}{2}\rho U^2 - K)$$

et les données initiales:

$$\left\{ \begin{array}{l} W(x < 0, t = 0) = W_L = (\rho_l, U_l, s_l, K_l) \\ W(x > 0, t = 0) = W_R = (\rho_r, U_r, s_r, K_r) \end{array} \right. \quad (3.53)$$

### 3.4.1 Cas particulier $\gamma = 5/3$

Soit

$$\begin{cases} A = \rho_r / \rho_l \\ B = p_r / p_l \\ C = (U_r - U_l) / c_l' \\ D = (p_r + \frac{2}{3}K_r) / (p_l + \frac{2}{3}K_l) \end{cases} \quad (3.54)$$

Dans ce cadre, en prenant  $\gamma = 5/3$  et en notant

$$\begin{cases} h_1(x) = \frac{2}{\gamma-1}(1 - e^{-\tau x}) & \text{if } x \geq 0 \\ h_1(x) = \frac{2}{\gamma-1}\tau^{1/2}(1 - e^{-x})(1 + \beta e^{-x})^{-1/2} & \text{if } x \leq 0 \end{cases} \quad (3.55)$$

on a:

**Théoreme 15** *Le problème de RIEMANN admet une solution unique si et seulement si:*

$$U_r - U_l < \frac{2}{\gamma-1}(c_r' + c_l')$$

De plus:

(i) *La 1- composante est une onde de raréfaction si:*

$$\frac{D^{1/2}}{A} h_1(\log(D)) < C$$

*et une onde de choc dans le cas inverse*

(ii) *La 4- composante est une onde de raréfaction si:*

$$h_1(-\log(D)) < C$$

*et une onde de choc dans le cas inverse*

Démonstration: Cf. [59]

### 3.4.2 Cas $\gamma \neq 5/3$

De la même manière que précédemment, on définit:

$$\begin{cases} A = \rho_r / \rho_l \\ B = p_r / p_l \\ C = (U_r - U_l) \\ D = K_r / K_l \end{cases} \quad (3.56)$$

alors

**Théoreme 16** *Le problème de RIEMANN admet une solution (unique) si et seulement si*

$$U_r - U_l < \frac{2}{\gamma - 1}(X_r + X_l)$$

où

$$X_i = \int_0^{\rho_i} \frac{c'(s, y, K\rho^{-5/3})}{y} dy$$

*Aussi, le problème de RIEMANN admet il une solution (unique) sous la condition:*

$$U_r - U_l < \frac{2}{\gamma - 1}(c_r + c_l)$$

*De plus, si*

$$U_r - U_l \geq \frac{2}{\gamma - 1}(c'_r + c'_l)$$

*le problème de RIEMANN n'a pas de solution.*

Démonstration: cf. [59]

Remarque: Il est à noter que ce résultat est sensiblement plus faible que celui obtenu dans le cas laminaire.

### 3.4.3 Du problème de RIEMANN 1D au schéma multidimensionnel

On introduit:

$V(i)$  l'ensemble des cellules voisines de la cellule "i" (ne comprenant pas la cellule i)

$l_{ij}$  la mesure de l'interface:  $l_{ij} = |\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j|$

$n_{ij}$  le vecteur normal unité orienté de la cellule i vers la cellule j

Soit  $V^*(\frac{x}{t}, V_l, V_r)$  la solution du problème (PR) avec comme états initiaux gauche et droit  $V_l, V_r$ . Il faut assurer que les solutions provenant des différentes interfaces ne s'intersectent pas dans la cellule.

Alors

$$\begin{aligned} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega_j} \vec{F}(W, K) \vec{n} d\sigma dt &\simeq \int_{t^n}^{t^{n+1}} \sum_{k \in V(j)} \vec{F}(V^*(0, V_j, V_k)) \vec{n}_{jk} l_{jk} \\ &\simeq \Delta t \sum_{k \in V(j)} \vec{F}(V^*(0, V_j, V_k)) \vec{n}_{jk} l_{jk} \end{aligned}$$

et donc

$$W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_j|} \sum_{k \in V(j)} \vec{F}(V^*(0, V_j, V_k)) \vec{n}_{jk} l_{jk} \quad (3.57)$$

Si on note  $\mathcal{F}_{jk}(V^*, n_{jk})$  le flux numérique normal à l'interface entre  $V_j$  et  $V_k$  :

$$\mathcal{F}_{jk}((V^*, n_{jk})) = \vec{F}(V^*(0, V_j, V_k)) \vec{n}_{jk} \quad (3.58)$$

$$\mathcal{F}_{jk}(V^*, n_{jk}) = \begin{pmatrix} \rho^* u_n^* \\ \rho^* u_n^* \vec{u}^* + \left(\frac{2}{3} K^* + P^*\right) \vec{n} \\ u_n^* (\rho^* E^* + \frac{2}{3} K^* + P^*) \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

$$W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_j|} \sum_{k \in V(j)} \mathcal{F}_{jk}(V^*, n_{jk}) l_{jk} \quad (3.60)$$

et pour l'équation non conservative:

$$K_j^{n+1} - K_j^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_j|} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \sum_{k \in V(i)} K \vec{u} \vec{n}_{jk} l_{jk} dt - \Delta t \frac{2}{3} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\Omega_j} K \operatorname{div}(\vec{u}) d\omega dt = 0 \quad (3.61)$$

$$K_j^{n+1} = K_j^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_j|} \sum_{k \in V(i)} K^* u_n^* l_{jk} - \frac{2}{3} \frac{\Delta t}{|\Omega_j|} \overline{K}_j \sum_{k \in V(i)} u_n^* l_{jk} \quad (3.62)$$

où  $\overline{K}_j$  est une moyenne des solutions de Riemann à l'interface entre  $\Omega_j$  et ses voisins  $V(j)$  :

$$\overline{K}_j = \frac{\sum_{k \in V(i)} K^*(0, V_i, V_j)}{\sum_{k \in V(i)} 1} \quad (3.63)$$

Pour un problème multidimensionnel, une formulation conservative utilise un problème de Riemann 1D en prenant en compte le problème le long de la normale. La méthode a été employée dans [60] pour une présentation du traitement numérique de la Turbulence.

### 3.5 Considération sur le système au premier ordre dans le modèle K- $\epsilon$

#### 3.5.1 Principaux éléments du modèle K- $\epsilon$ model en 3D

On rappelle les équations sans les effets visqueux

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U}{\partial x} + \frac{\partial \rho V}{\partial y} + \frac{\partial \rho W}{\partial z} = 0. \\ \frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U^2 + p + \frac{2}{3}K)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho UV)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho UW)}{\partial z} = 0. \\ \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho UV)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V^2 + p + \frac{2}{3}K)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho VW)}{\partial z} = 0. \\ \frac{\partial(\rho W)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho UW)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho VW)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho W^2 + p + \frac{2}{3}K)}{\partial z} = 0. \end{array} \right. \quad (3.64)$$

avec une équation d'énergie globale sous forme conservative

$$(\rho E)_t + (U(\rho E + p + \frac{2}{3}K))_x + (V(\rho E + p + \frac{2}{3}K))_y + (W(\rho E + p + \frac{2}{3}K))_z = 0. \quad (3.65)$$

où l'équation non conservative d'énergie turbulente K ( $2K = \langle \rho u_i'' u_i'' \rangle$ ) est définie par :

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial(KU)}{\partial x} + \frac{\partial(KV)}{\partial y} + \frac{\partial(KW)}{\partial z} + \frac{2}{3}K \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) = 0. \quad (3.66)$$

et l'équation des effets de dissipation visqueuse  $\epsilon$  vérifie :

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\epsilon U)}{\partial x} + \frac{\partial(\epsilon V)}{\partial y} + \frac{\partial(\epsilon W)}{\partial z} + \frac{2}{3}C_{\epsilon 1} \epsilon \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) = 0. \quad (3.67)$$

dont l'équation d'état(E.O.S.) à la forme :

$$p = (\gamma - 1) \left( \rho E - \frac{1}{2} \rho (U^2 + V^2 + W^2) - K \right) \quad (3.68)$$

le système est associé à un problème hyperbolique qui s'écrit sous forme non conservative dans de nouvelles variables:

$$Z = (\rho, U, V, W, K, p, \epsilon)^t \quad (3.69)$$

avec:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + A \frac{\partial Z}{\partial x} + B \frac{\partial Z}{\partial y} + C \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \quad (3.70)$$

où on a posé:

$$A = \begin{pmatrix} U & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U & 0 & 0 & \frac{2}{3\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & U & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5K}{3} & 0 & 0 & U & 0 & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & 0 & 0 & U & 0 \\ 0 & \epsilon(1 + \frac{2}{3}C_{\epsilon_1}) & 0 & 0 & 0 & 0 & U \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

$$B = \begin{pmatrix} V & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V & 0 & \frac{2}{3\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5K}{3} & 0 & V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma p & 0 & 0 & V & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon(1 + \frac{2}{3}C_{\epsilon_1}) & 0 & 0 & 0 & V \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

$$C = \begin{pmatrix} W & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W & \frac{2}{3\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5K}{3} & W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma p & 0 & W & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon(1 + \frac{2}{3}C_{\epsilon_1}) & 0 & 0 & W \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

En définissant

$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)^t$  as  $\|\vec{n}\| = 1$ ,  $M = An_x + Bn_y + Cn_z$  and  $u = Un_x + Vn_y + Wn_z$

$$c'^2 = \gamma \frac{p}{\rho} + \frac{10K}{9\rho} \quad (3.74)$$

on peut formuler les propositions suivantes :

**Proposition 29** Pour la matrice  $M$ , existe un ensemble complet de vecteurs propres  $r_i$  associé aux valeurs propres  $\lambda_i$  définies par :

$$\lambda_1 = u - c'; \lambda_i = u \text{ (for } i = 2 \text{ to } 6); \lambda_7 = u + c'$$

Démonstration: cf. [59]

### 3.5.2 Cas 1D

Dans ce cas, le système s'écrit ( avec  $V = W = 0$  )

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho U) = 0. \\ \frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho U^2 + p + \frac{2}{3}K) = 0. \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(U(\rho E + p + \frac{2}{3}K)) = 0. \\ \frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(KU) + \frac{2}{3}K \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\epsilon U) + \frac{2}{3}C_{\epsilon_1} \epsilon \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \end{array} \right. \quad (3.75)$$

et l'équation E.O.S. :

$$p = (\gamma - 1)(\rho E - \frac{1}{2}\rho(U^2 + V^2 + W^2)) - K \quad (3.76)$$

Soient:

$$\begin{aligned} s &= c_v \log(p\rho^{-\gamma}) \\ \alpha &= \frac{\partial p}{\partial s}, c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \text{ et } K = \rho k \end{aligned} \quad (3.77)$$

alors le système prend la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2}{3\rho} \frac{\partial K}{\partial x} = 0. \\ \frac{\partial s}{\partial t} + U \frac{\partial s}{\partial x} = 0. \\ \frac{\partial K}{\partial t} + U \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{5}{3} K \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + (1 + \frac{2}{3} C_{\epsilon_1}) \epsilon \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \end{array} \right. \quad (3.78)$$

**Proposition 30** *Le problème précédent est hyperbolique (pas strictement) et admet l'ensemble de valeurs propres  $\lambda_1 = U - c'$ ;  $\lambda_i = U$  for  $i = 2, 3, 4$ ;  $\lambda_5 = U + c'$  et de vecteurs propres  $r_i$ :*

$$r_1 = (\rho, -c', 0, 5K/3, (1 + \frac{2}{3} C_{\epsilon_1}) \epsilon)^t$$

$$r_2 = (-\alpha/c^2, 0, 1, 0, 0)^t$$

$$r_3 = (-2/(3c^2), 0, 0, 1, 0)^t$$

$$r_4 = (0, 0, 0, 0, 1)^t$$

$$r_5 = (\rho, c', 0, 5K/3, (1 + \frac{2}{3} C_{\epsilon_1}) \epsilon)^t$$

**Proposition 31** *Les 1 et 5 champs sont vraiment non linéaires et les 2, 3 et 4 champs sont linéairement dégénérés.*

Démonstration: cf. [59]

### 3.5.3 Paramétrisation des courbes de choc et discontinuités de contact

On utilise la même démarche que pour le K système. Cela conduit à :

**Proposition 32** *Pour les 1 et 5 chocs, une paramétrisation possible des courbes*

est

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \frac{z}{z-1}(u_r - u_l/z) \\ \frac{\rho_r}{\rho_l} = z \\ \frac{p_r}{p_l} = \pi = \frac{\beta z - 1}{\beta - z} \\ \frac{K_r}{K_l} = \frac{4z - 1}{4 - z} \\ \frac{\epsilon_r}{\epsilon_l} = \frac{\mu z - 1}{\mu - z} \\ \frac{u_r - u_l}{c_l} = \pm \frac{z-1}{z^{1/2}} \left( \frac{2}{(\gamma-1)(\beta-z)} + \frac{10K_l}{3\gamma p_l(4-z)} \right)^{1/2} \end{array} \right. \quad (3.79)$$

où le signe - est associé aux 1-chocs ( $z > 1$ ) et le signe + aux 5 chocs ( $0 < z < 1$ ).  
Pour les discontinuités de contact, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = u_l = u_r \\ p_r - p_l + \frac{2}{3}(K_r - K_l) = 0 \end{array} \right. \quad (3.80)$$

and  $\frac{\rho_r}{\rho_l}$ ,  $\frac{K_r}{K_l}$  and  $\frac{\epsilon_r}{\epsilon_l}$  sont indéterminés.

### 3.5.4 Courbes de détente

**Proposition 33** Le système admet comme invariants de Riemann linéairement indépendants en posant  $\eta = 1 + \frac{2}{3}C_{\epsilon_1}$

$$\lambda_1 = U - c', \Phi_1^{1,2,3,4} = (s, K\rho^{-5/3}, U + \int^\rho \frac{c'(\mu, s, K\rho^{-5/3})}{\mu} d\mu, \frac{\epsilon}{\rho^\eta})^t$$

$$\lambda_2 = U, \Phi_2^{1,2,3,4} = (U, p, p + \frac{2}{3}K, \epsilon)^t$$

$$\lambda_3 = U, \Phi_3^{1,2,3,4} = (U, s, p + \frac{2}{3}K, \epsilon)^t$$

$$\lambda_4 = U, \Phi_4^{1,2,3,4} = (U, s, p, K, \epsilon)^t$$

$$\lambda_5 = U + c', \Phi_5^{1,2,3,4} = (s, K\rho^{-5/3}, U - \int^\rho \frac{c'(\mu, s, K\rho^{-5/3})}{\mu} d\mu, \frac{\epsilon}{\rho^\eta})^t$$

Démonstration : cf. [59]

### 3.5.5 Etude du problème de Riemann pour le modèle K- $\epsilon$

Cas particulier  $\gamma = 5/3$

Soient:

$$\begin{cases} A = \rho_r / \rho_l \\ B = p_r / p_l \\ C = (U_r - U_l) / c_l' \\ D = (p_r + \frac{2}{3}K_r) / (p_l + \frac{2}{3}K_l) \end{cases} \quad (3.81)$$

**Théorème 17** le problème de Riemann admet une solution (unique) si et seulement si

$$U_r - U_l < \frac{2}{\gamma - 1}(c_r' + c_l')$$

De plus (i) la 1 composante est une onde de détente si

$$\frac{D^{1/2}}{A} h_1(\log(D)) < C$$

Et un choc dans l'autre cas.

(ii) la 5 composante est une détente si:

$$h_1(-\log(D)) < C$$

et un choc dans l'autre cas.

Démonstration: cf. [59]

Cas général  $\gamma \neq 5/3$

**Théorème 18** Le problème de Riemann admet une solution(unique) si et seulement si:

$$U_r - U_l < \frac{2}{\gamma - 1}(X_r + X_l)$$

où

$$X_i = \int_0^{\rho_i} \frac{c'(s, y, K\rho^{-5/3})}{y} dy$$

On en déduit que le problème de Riemann admet une solution (unique) si

$$U_r - U_l < \frac{2}{\gamma - 1}(c_r + c_l)$$

De plus si

$$U_r - U_l \geq \frac{2}{\gamma - 1}(c_r' + c_l')$$

le problème de Riemann n'a pas de solution.

Démonstration: cf. [59]

### 3.6 Modèle turbulent pour la description des fluides multi composants

On s'intéresse désormais au cas de fluide compressif, ainsi qu'aux fluides diphasiques pour l'instant dans le cadre isentropique. On obtient alors pour chaque phase :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla(\rho_k U_k) = 0 \\ \frac{\partial \rho_k U_k}{\partial t} + \nabla(\rho_k U_k^2 + P_k \bar{I}) = 0 \end{cases} \quad (3.82)$$

Dans le cas traité, les variables  $(\rho_k, P_k(\rho_k))$  sont des fonctions génériques, discontinues dans chaque phase. En fait,  $\rho_k = \rho \delta_k$  avec  $\delta_k$  la fonction indicatrice de la phase k :

$$\begin{cases} \delta_k(x, t) = 1 & \text{dans la phase k} \\ \delta_k(x, t) = 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.83)$$

Il existe le terme de transfert de masse  $\Gamma_k$  qui est ici négligé et  $M_k$  le terme de transfert de quantité de mouvement.

Les équations locales instantanées en espace et en temps donnent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{\rho}_k}{\partial t} + \nabla(\bar{\rho}_k U_k) \approx 0 \\ \frac{\partial \bar{\rho}_k U_k}{\partial t} + \nabla(\bar{\rho}_k U_k^2 + P_k \bar{I}) = M_k \end{cases} \quad (3.84)$$

Par moyenne sur la fraction volumique définie par  $\alpha_k = \overline{\delta_k(x, t)}$  et comme  $\delta_k \delta_k = \delta_k$ , alors  $\overline{\rho_k \delta_k} = \overline{\rho_k \delta_k \delta_k} = \overline{\rho \delta_k} = \overline{\rho} \alpha_k$  D'où

$$\overline{\rho_k} = \frac{\overline{\rho_k \delta_k}}{\alpha_k} = \frac{\overline{\rho}}{\alpha_k} \quad (3.85)$$

De plus par moyenne de FAVRE, on a :

$$\overline{\rho_k U_k} = \overline{\rho_k} \widetilde{U}_k = \alpha_k \overline{\rho_k} \widetilde{U}_k \quad (3.86)$$

le terme de transfert de l'équation de moment  $M_k$  est réécrit en tenant compte de la force de traînée  $M_k^d$ . Soit  $v_i$  la vitesse d'interface,  $n_k$  la normale externe de la phase k et  $a_i$  la surface d'interface :

$$M_k = -\overline{\rho_k U_k (U_k - v_i) a_i n_k} - \overline{P_k a_i n_k} = M_k^d + \overline{P_k} \nabla \alpha_k \quad (3.87)$$

Soit alors  $\alpha$  la fraction volumique de la phase vapeur v, on a pour le système suivant en 2D avec  $\overline{R^v}$  le tenseur de Reynolds de la phase v et  $(u, v)$  les composantes de la vitesse U. le tenseur de Reynolds  $\overline{R^v}$  est défini par :

$$(\overline{R^v})_{ij} = R_{ij}^k = \overline{\rho_k u_{ik} u_{jk}} - \alpha_k \overline{\rho_k} \widetilde{u}_{ik} \widetilde{u}_{jk} \quad (3.88)$$

$$(\mathcal{S}_v) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\alpha\bar{\rho}_v)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha\bar{\rho}_v\tilde{u}_v)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha\bar{\rho}_v\tilde{v}_v)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial(\alpha\bar{\rho}_v\tilde{u}_v)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha\bar{\rho}_v\tilde{u}_v^2 + R_{11}^v)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha\bar{\rho}_v\tilde{u}_v\tilde{v}_v + R_{12}^v)}{\partial y} = -\alpha\frac{\partial\bar{P}_v}{\partial x} + M_{vx}^d \\ \frac{\partial(\alpha\bar{\rho}_v\tilde{v}_v)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha\bar{\rho}_v\tilde{u}_v\tilde{v}_v + R_{21}^v)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha\bar{\rho}_v\tilde{v}_v^2 + R_{22}^v)}{\partial y} = -\alpha\frac{\partial\bar{P}_v}{\partial y} + M_{vy}^d \end{array} \right. \quad (3.89)$$

Dans le cas qui nous intéresse, les grandeurs à obtenir sont les quantités moyennes. On obtient  $\bar{S}$  par sommation sur les deux phases. la somme de forces de traînée se réduit à zéro. Selon la loi de Laplace, on suppose un équilibre mécanique tel que  $\bar{P}_v = \bar{P}_l$  constant, aussi on pose  $\nabla P_k = \nabla P$ .

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_v + (1 - \alpha)\bar{\rho}_l \quad (3.90)$$

$$\bar{\rho}\tilde{U} = \bar{\rho}_v\tilde{U}_v + (1 - \alpha)\bar{\rho}_l\tilde{U}_l \quad (3.91)$$

En introduisant la fraction massique  $c_v$  et la vitesse relative  $V_k$  :

$c_v = \frac{\alpha\bar{\rho}_v}{\bar{\rho}}$ ,  $V_k = \tilde{U}_k - \tilde{U}$ ,  $\sum_k c_v V_k = 0$  donnent:

$$\alpha\bar{\rho}_v V_v^2 + (1 - \alpha)\bar{\rho}_l V_l^2 = \bar{\rho}c_v \frac{V_v^2}{1 - c_v}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t} + \nabla(\bar{\rho}\tilde{U}) = 0 \\ \frac{\partial\bar{\rho}c_v}{\partial t} + \nabla(\bar{\rho}c_v\tilde{U}) = -\nabla(\bar{\rho}c_v V_v) \\ \frac{\partial\bar{\rho}\tilde{U}}{\partial t} + \nabla(\bar{\rho}\tilde{U}^2 + \frac{2}{3}K^s + \bar{P}\tilde{I}) = -\nabla(\bar{\rho}c_v \frac{V_v^2}{1 - c_v}) \end{array} \right. \quad (3.92)$$

L'énergie turbulente  $K^v$  est la trace du tenseur  $\frac{1}{2}\bar{R}^v$  en 2D, on peut alors écrire:

$$2K^v = Tr(\bar{R}) = \sum_i \bar{R}_{ii} = \overline{\rho_v(u_v^2 + v_v^2)} - \alpha\bar{\rho}_v(\tilde{u}_v^2 + \tilde{v}_v^2) \quad (3.93)$$

Remarque: on a noté  $K^s = K^v + K^l = \frac{1}{2}(\overline{\rho_v U_v'^2} + \overline{\rho_l U_l'^2})$

A noter que l'énergie turbulente du fluide s'écrit:  $K = \frac{1}{2}\overline{\rho U'^2}$  •

### 3.6.1 Modèle en K

Afin de clore le modèle, on dérive une équation supplémentaire sur la turbulence de la phase vapeur. Pour la calculer, on soustrait l'équation de  $\alpha\bar{\rho}_v\tilde{U}_v^2$

de l'équation de  $\overline{\rho_v U_v^2}$ . Le déviateur  $\overline{\overline{D}}$  est tel que:

$$\overline{\overline{R}} = \frac{\text{Tr}(\overline{\overline{R}})}{3} \overline{\overline{I}} + \overline{\overline{D}} \quad (3.94)$$

**Proposition 34** L'équation d'évolution de l'énergie de la turbulence de la phase vapeur est:

$$\frac{\partial K^v}{\partial t} + \nabla(K^v \widetilde{U}_v) + \frac{2}{3} K^v \nabla \widetilde{U}_v - 2(\nabla^t \overline{\overline{D}}) \widetilde{U}_v + \nabla(\overline{\rho_v U_v'^3}) + \overline{U_v' \nabla P} + \overline{\rho_v U_v'^2 (U_v - v_i) a_i n_v} = 0 \quad (3.95)$$

Démonstration: cf.[31]

Quelques simplifications sont introduites: Les corrélations impaires sont négligées:

$$\overline{\rho_v U_v'^2 (U_v - v_i) a_i n_v} \approx 0 \quad (3.96)$$

$$\overline{\rho_v U_v'^3} \approx 0 \quad (3.97)$$

La turbulence est isotrope et décrite à travers  $K^v$

$$R^v_{ij} = \frac{2}{3} K^v \delta_{ij} \quad (3.98)$$

On obtient alors en 2D:

$$\frac{\partial K^v}{\partial t} + \nabla(K^v \widetilde{U}_v) + \frac{2}{3} K^v \nabla \widetilde{U}_v + \overline{\widetilde{U}_v \nabla P} = 0 \quad (3.99)$$

Pour clore le système, l'équation de  $K^v$  est nécessaire. Tronquer au premier ordre revient à supposer que les vitesses sont du même ordre de grandeur. On néglige donc les symboles moyens et on note  $K$  pour  $K^v$ . Sous toutes ces hypothèses, le système s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial(\rho c_v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho c_v u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho c_v v)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + \frac{2}{3} K + P)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + \frac{2}{3} K + P)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial(Ku)}{\partial x} + \frac{\partial(Kv)}{\partial y} + \frac{2}{3} K \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3} K \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (3.100)$$

### 3.6.2 Cas 1D

En prenant  $v = w = 0$  et en supposant que tout dépend de  $x$  et  $t$ , on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho U) = 0. \\ \frac{\partial \rho c_v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho c_v U) = 0. \\ \frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho U^2 + p + \frac{2}{3}K) = 0. \\ \frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(KU) + \frac{2}{3}K \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \end{array} \right. \quad (3.101)$$

Soit alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} c'^2 = c_v P'(\rho c_v) \\ K = \rho k \\ \tilde{c}^2 = c'^2 + \frac{10}{9}k \end{array} \right. \quad (3.102)$$

Le système peut alors s'écrire:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial c_v}{\partial t} + U \frac{\partial c_v}{\partial x} = 0. \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2}{3\rho} \frac{\partial K}{\partial x} = 0. \\ \frac{\partial K}{\partial t} + U \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{5}{3}K \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \end{array} \right. \quad (3.103)$$

Pour simplification, on écrit ce système dans de nouvelles variables

$$V = (\rho, c_v, u, K)^t \quad (3.104)$$

Cela conduit à la proposition suivante

**Proposition 35** *Le système précédent est hyperbolique (non strictement) et admet comme ensemble de valeurs propres:  $\lambda_1 = U - \tilde{c}$ ;  $\lambda_i = U$  pour  $i = 2, 3$ ;  $\lambda_4 = U + \tilde{c}$  et de vecteurs propres  $r_i$*

$$r_1 = (\rho, 0, -\tilde{c}, 5K/3)^t$$

$$r_2 = (-\rho, c_v, 0, 0)^t$$

$$r_3 = (-2/(3c'^2), 0, 0, 1)^t$$

$$r_4 = (\rho, 0, \tilde{c}, 5K/3)^t$$

**Proposition 36** Les 1 et 4 champs sont vraiment non linéaires et les 2 et 3 champs (associés à la même valeur propre) sont linéairement dégénérés.

Démonstration: cf.[31]

### 3.6.3 Paramétrisation des courbes de choc et des discontinuités de contact

On tient le même type de raisonnement que dans les sections précédentes et on obtient:

**Proposition 37** Pour les 1 et 4 chocs, une paramétrisation admissible est:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \frac{z}{z-1}(u_r - u_l/z) \\ \frac{\rho_r}{\rho_l} = z \\ \frac{c_{vr}}{c_{vl}} = 1 \\ \frac{p_r}{p_l} = \pi = \frac{c_{vl}}{\beta z - 1} \\ \frac{K_r}{K_l} = \frac{\beta - z}{4z - 1} \\ \frac{u_r - u_l}{c_l} = \pm \left( \frac{z-1}{\sqrt{z}} \right) \left( \frac{2K_l(4z-1)}{3\rho_l(4-z)} + \frac{P - P_l}{\rho_l} \right)^{1/2} \end{array} \right. \quad (3.105)$$

où le signe - est associé aux 1 chocs ( $z > 1$ ) et le signe + aux 4 chocs ( $0 < z < 1$ ). En ce qui concerne les discontinuités de contact ( $m = 0$ ), on a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = u_l = u_r \\ p_r - p_l + \frac{2}{3}(K_r - K_l) = 0 \end{array} \right. \quad (3.106)$$

$\frac{\rho_r}{\rho_l}$  et  $\frac{K_r}{K_l}$  sont indéfinis.

### 3.6.4 Ondes de détente

**Proposition 38** Le système précédent admet des invariants de Riemann qui sont:

$$\lambda_1 = U - \tilde{c}, \Phi_1^{1,2,3} = (c_v, K\rho^{-5/3}, U + \int^\rho \frac{\tilde{c}(\mu, c_v, K\rho^{-5/3})}{\mu} d\mu)^t$$

$$\lambda_2 = U, \Phi_2^{1,2,3} = (P, U, K)^t$$

$$\lambda_3 = U, \Phi_3^{1,2,3} = (U, \rho, p + \frac{2}{3}K)^t$$

$$\lambda_4 = U + \tilde{c}, \Phi_4^{1,2,3} = (c_v, K\rho^{-5/3}, U - \int^\rho \frac{\tilde{c}(\mu, c_v, K\rho^{-5/3})}{\mu} d\mu)^t$$

Démonstration: cf.[31]

### 3.6.5 Etude du Problème de Riemann

Soit le problème de Riemann défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U)}{\partial x} = 0. \\ \frac{\partial(\rho c_v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho c_v U)}{\partial x} = 0. \\ \frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{\partial K}{\partial x} = 0. \\ \frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial(KU)}{\partial x} + \frac{2}{3} K \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \end{array} \right. \quad (3.107)$$

associé à la loi d'état ( E.O.S.)

$$P = P(\rho c_v)$$

avec les données initiales:

$$\left\{ \begin{array}{l} W(x < 0, t = 0) = W_L = (\rho_l, c_{v_l}, U_l, K_l) \\ W(x > 0, t = 0) = W_R = (\rho_r, c_{v_r}, U_r, K_r) \end{array} \right. \quad (3.108)$$

**Théoreme 19** *Le problème de Riemann admet une solution ( unique) si et seulement si:*

$$U_r - U_l < Z_l + Z_r$$

avec

$$Z_i = h_1(x) = \int_0^{\rho_i} \frac{\sqrt{\gamma c_{v_i} \gamma s^{\gamma-1} + \frac{10K_i}{9\rho_i^3} s^2}}{s} ds$$

Démonstration: cf.[31]

## Chapitre 4

# Etude d'ondes électromagnétiques par couplage Euler-Maxwell

### 4.1 Introduction

Cette étude a été conduite pour développer un modèle de Physique des Plasmas avec comme application en MHD les torches à plasma . Il existe de nombreux problèmes de couplage entre fluide et champ électrique en relation avec des procédés technologiques (cf.[23]). Le cas qui nous intéresse relève de la Mécanique Non Relativiste.

Pour une présentation de ce problème cf. [97] par exemple. Il est décrit les équations de Maxwell et de la Mécanique ainsi que des termes de couplage.

Le problème traité est hyperbolique, non linéaire et non conservatif. Le traitement fait appel aux méthodes développées dans [104],[105], [106] en notant que le problème est intrinsèquement 3D•

## 4.2 Modèle Mathématique

Les équations d EULER peuvent s'écrire ainsi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{u} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{u}) + \nabla \cdot \bar{\Pi} = \vec{f} \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathcal{E}) + \nabla \cdot (\vec{q}) = 0. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où:

$\rho$  est la densité,  $\vec{u}$  la vitesse,  $\bar{\Pi}$  le tenseur Impulsion;  $\vec{q}$  le flux d'énergie et  $\mathcal{E}$  l'énergie totale.

Les équations de Maxwell donnent:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1./c^2) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \text{ ( équation d'Ampere )} \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot} \vec{E} = 0. \text{ ( équation de Faraday )} \\ \text{div}(\vec{B}) = 0. \text{ ( équation de la Divergence )} \\ \text{div}(\epsilon_0 \vec{E}) = \rho^* \text{ ( équation de Gauss )} \end{array} \right. \quad (4.2)$$

où:

$\vec{j}$  est le vecteur courant électrique

$c$  la vitesse de la lumière

$\rho^*$  la densité du champ électrique

### 4.2.1 Hypothèses

On appelle :

$\sigma$  la conductibilité électrique

$\mu_0$  la perméabilité magnétique

$\epsilon_0$  la constante du diélectrique

un certain nombre d'hypothèses sont faites comme dans [126]:

H1:Le plasma est totalement ionisé

H2:Le plasma est en équilibre électrique( les ions et les électrons sont en même quantité)

H3:La vitesse du plasma est de plusieurs ordres de grandeur plus petite que la

vitesse de la lumière soit  $|u| \ll c$

H4: Le plasma est en équilibre thermodynamique qui est approximé par une loi de type gaz parfait avec un  $\gamma$  constant

H5: Le plasma est homogène et les quantités  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  sont scalaires et constantes

H6: Il n'y a pas de champ magnétique extérieur

H7: La gravité est négligée

#### 4.2.2 Equations de Maxwell

Par transformation de Lorentz ( cf. [98]) on obtient,

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} (\vec{u} \wedge \vec{E}) \quad (4.3)$$

Par simplification, cela conduit ( cf. )

$$\vec{B} \simeq \frac{1}{c^2} (\vec{u} \wedge \vec{E}) \quad (4.4)$$

et l'équation de FARADAY s'écrit:

$$\frac{1}{c^2} \partial_t (\vec{u} \wedge \vec{E}) + \text{rot}(\vec{E}) = 0 \quad (4.5)$$

Les équations de MAXWELL deviennent:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \vec{E} + \text{div}(\vec{E} \otimes \vec{u} - \vec{u} \otimes \vec{E}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{j} \\ \frac{1}{c^2} \partial_t (\vec{u} \wedge \vec{E}) + \text{rot}(\vec{E}) = 0 \\ \text{div}(\vec{E}) = 0. \\ \vec{E} \text{rot}(\vec{u}) - \vec{u} \text{rot}(\vec{E}) = 0 \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Il est à noter la relation:

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1 \quad (4.7)$$

#### 4.2.3 Equations d' EULER

##### Equation de la quantité de mouvement

Après calcul, on trouve ( cf. [62] )

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) + \vec{\nabla}(\vec{u} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla}(P) = -\mu_0 \vec{j} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{E}) - \frac{1}{2} \vec{\nabla}(|E|^2) + \vec{\nabla}(\vec{E} \otimes \vec{E}) \quad (4.8)$$

### Energie totale

L'énergie totale s'exprime comme la somme de l'énergie cinétique du plasma  $\frac{1}{2}\rho u^2$ , de l'énergie interne  $\rho e$  et de l'énergie associée au champ électromagnétique  $(\frac{1}{2\mu_0}B^2 + \frac{\epsilon_0}{2}E^2)$ .

L'énergie totale s'exprime comme:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho e + \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \right) + \\ & \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \rho u_k \left( \frac{1}{2}u^2 + e + \frac{P}{\rho} \right) + \epsilon_0 (E^2 u_k - \sum_{i=1}^3 E_i u_i E_k) \right) = \sum_{k=1}^3 j_k E_k \quad (4.9) \end{aligned}$$

### 4.2.4 Système couplé EULER-MAXWELL

Le système s'écrit donc ( cf. [62])

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial (\rho u_k)}{\partial x_k} = 0 \\ & \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_i u_k + P \delta_{i,k} - E_i E_k + \frac{1}{2} |E|^2 \delta_{i,k}) = \\ & \quad -\mu_0 u_i (\sum_{k=1}^3 j_k E_k) + \mu_0 E_i (\sum_{k=1}^3 j_k u_k) \text{ for } i = 1, 2, 3 \\ & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho e + \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \right) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u_k \left( \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho e + P \right) + \right. \\ & \quad \left. \epsilon_0 (E^2 u_k - (\sum_{i=1}^3 E_i u_i) E_k) \right) = \sum_{k=1}^3 j_k E_k \quad (4.10) \\ & \frac{\partial E_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (E_i u_k - u_i E_k) = -\frac{1}{\epsilon_0} j_i \text{ for } i = 1, 2, 3 \\ & \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{u} \wedge \vec{E})_i + (\text{rot}(\vec{E}))_i = 0 \text{ for } i = 1, 2, 3 \\ & \sum_{k=1}^3 \frac{\partial E_k}{\partial x_k} = 0. \\ & \sum_{k=1}^3 E_k (\text{rot}(\vec{u}))_k - u_k (\text{rot}(\vec{E}))_k = 0 \end{aligned} \right.$$

Par utilisation de l'entropie, on est conduit au système suivant ( cf. [62])

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} = 0 \\ \frac{\partial(u_i)}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (P + \frac{1}{2} |E|^2) + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \sum_{k=1}^3 \frac{E_k}{\rho} \frac{\partial E_i}{\partial x_k} = \\ \mu_0 \sigma \frac{E_i}{\rho} (\sum_{k=1}^3 E_k u_k) - \mu_0 \sigma \frac{u_i}{\rho} |E|^2 \text{ for } i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial E_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 (\frac{\partial(E_i u_k)}{\partial x_k} - E_k \frac{\partial(u_i)}{\partial x_k}) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} E_i \text{ for } i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial s}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial s}{\partial x_k} = \frac{\sigma}{A(s)\rho^\gamma} |E|^2 \end{array} \right. \quad (4.11)$$

### 4.3 Propriétés Mathématiques

Ce système s'écrit en variables non conservatives

$$U = (\rho, u, v, w, E_x, E_y, E_z, s)^t \quad (4.12)$$

où  $(u, v, w)$ ,  $(E_x, E_y, E_z)$  sont respectivement le vecteur vitesse et le vecteur champ électrique. On peut alors écrire:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} + B(U) \frac{\partial U}{\partial y} + C(U) \frac{\partial U}{\partial z} + D(U)U = 0 \quad (4.13)$$

avec les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} & u & 0 & 0 & 0 & \frac{E_y}{\rho} & \frac{E_z}{\rho} & \frac{P_s}{\rho} \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 & -\frac{E_x}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & -\frac{E_x}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_y & -E_x & 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & E_z & 0 & -E_x & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

$$B = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & -\frac{E_y}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} & 0 & v & 0 & \frac{E_x}{\rho} & 0 & \frac{E_z}{\rho} & \frac{p_s}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & v & 0 & 0 & -\frac{E_y}{\rho} & 0 \\ 0 & -E_y & E_x & 0 & v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_z & -E_y & 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

$$C = \begin{pmatrix} w & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 & -\frac{E_z}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 & 0 & -\frac{E_z}{\rho} & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} & 0 & 0 & w & \frac{E_x}{\rho} & \frac{E_y}{\rho} & 0 & \frac{P_s}{\rho} \\ 0 & -E_z & 0 & E_x & w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_z & E_y & 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

et le vecteur source:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu_0 \sigma}{\rho} E^2 & 0 & 0 & \frac{\mu_0 \sigma}{\rho} (\vec{E} \vec{u}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu_0 \sigma}{\rho} E^2 & 0 & 0 & \frac{\mu_0 \sigma}{\rho} (\vec{E} \vec{u}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mu_0 \sigma}{\rho} E^2 & 0 & 0 & \frac{\mu_0 \sigma}{\rho} (\vec{E} \vec{u}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sigma}{\epsilon_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sigma}{\epsilon_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sigma}{\epsilon_0} & 0 & 0 \\ \frac{\sigma}{A(s)\rho^{\gamma+1}} |E|^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sigma}{\epsilon_0} & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

### 4.3.1 Cas 1D

Par soucis de simplicité, on a  $n_x = 1, n_y = 0, n_z = 0$

**Proposition 39** La matrice  $A$  a un ensemble complet de vecteurs propres  $r_i$  associés aux valeurs propres  $\lambda_i$  telles que

$$\begin{cases} \lambda_{\pm}^1 = u \pm \frac{E_x}{\sqrt{\rho}} \\ \lambda_2 = u \\ \lambda_{f,s}^3 = u \pm c_{f,s} \end{cases} \quad (4.18)$$

avec

$$c_{f,s}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{E^2}{\rho} + c^2 \pm \sqrt{\left( \frac{E_x^2}{\rho} - c^2 \right)^2 + 2 \left( \frac{E_x^2}{\rho} + c^2 \right) (E_y^2 + E_z^2) + (E_y^2 + E_z^2)^2} \right)$$

Démonstration: cf. [62]

On en déduit le théorème suivant

**Théoreme 20** Le système EULER-MAXWELL en 1D est inconditionnellement non strictement hyperbolique.

Démonstration: cf. [62]

### 4.3.2 Cas 3D

On définit :

$$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)^t \text{ as } \|\vec{n}\| = 1, M = An_x + Bn_y + Cn_z$$

et on pose  $\vec{u}\vec{n} = u_n$  ainsi que  $n_x = \tau, n_y = \xi, n_z = \eta$ .

Aussi en déduit on

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

avec

$$M_1 = \begin{pmatrix} u_n & \tau\rho & \xi\rho & \eta\rho \\ \tau\frac{c^2}{\rho} & u_n & 0 & 0 \\ \xi\frac{c^2}{\rho} & 0 & u_n & 0 \\ \eta\frac{c^2}{\rho} & 0 & 0 & u_n \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\xi E_y + \eta E_z}{\rho} & \frac{E_y}{\tau} & \frac{E_z}{\tau} & \frac{P_s}{\tau} \\ \xi \frac{E_x}{\rho} & -\frac{\tau E_x + \eta E_z}{\rho} & \xi \frac{E_z}{\rho} & \xi \frac{P_s}{\rho} \\ \eta \frac{E_x}{\rho} & \frac{E_y}{\eta} & -\frac{\tau E_x + \eta E_z}{\rho} & \frac{P_s}{\eta} \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\xi E_y - \eta E_z & \xi E_x & \eta E_x \\ 0 & \tau E_y & -\tau E_x - \eta E_z & \eta E_y \\ 0 & \tau E_z & \xi E_z & -\tau E_x - \xi E_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

et

$$M_4 = \begin{pmatrix} u_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_n \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

**Proposition 40** Il existe, pour la matrice  $M$ , un ensemble complet de vecteurs propres  $r_i$  associés aux valeurs propres  $\lambda_i$  telles que :

$$\begin{cases} \lambda_{\pm}^1 = u_n - \pm \frac{E_n}{\sqrt{\rho}} \\ \lambda_2 = u_n \\ \lambda_{c,s,\pm}^3 = u_n \pm c_{f,s} \end{cases} \quad (4.24)$$

avec

$$c_{f,s}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{E^2}{\rho} + c^2 \pm \sqrt{\left( \left( \frac{E^2}{\rho} + c^2 \right)^2 - 4c^2 \frac{E_n^2}{\rho} \right)} \right) \quad (4.25)$$

Démonstration: cf. [62]

On peut en déduire:

**Proposition 41** Les champs caractéristiques associés aux valeurs propres  $u_n, u_n \pm \frac{E_n}{\sqrt{\rho}}$  sont linéairement dégénérés et les autres vraiment non linéaires.

Démonstration: cf. [62]

### 4.3.3 Ondes de détente

**Proposition 42** *Le système admet des invariants de RIEMANN linéairement indépendants définis pour chaque valeur propre par:*

$$\lambda_2 = u_n, \Phi_{u_1}^{1,2,3,4,5,6,7} = (P, u_n, u_{\tau_1}, u_{\tau_2}, E_n, E_{\tau_1}, E_{\tau_2})^t$$

$$\lambda_2 = u_n, \Phi_{u_2}^{1,2,3,4,5,6,7} = (\rho, u_n, u_{\tau_1}, u_{\tau_2}, \xi E_z - \eta E_y, \tau E_y - \xi E_x, s)^t$$

$$\lambda_{\pm}^1 = u_n \pm \frac{E_n}{\sqrt{\rho}}, \Phi_{a_{\pm}}^{1,2,3,4,5,6,7} = (\rho, u_n, \frac{E_n}{\sqrt{\rho}}, E_{\tau}^2, u_{\tau_1} \pm \frac{E_{\tau_1}}{\sqrt{\rho}}, u_{\tau_2} \pm \frac{E_{\tau_2}}{\sqrt{\rho}}, s)^t$$

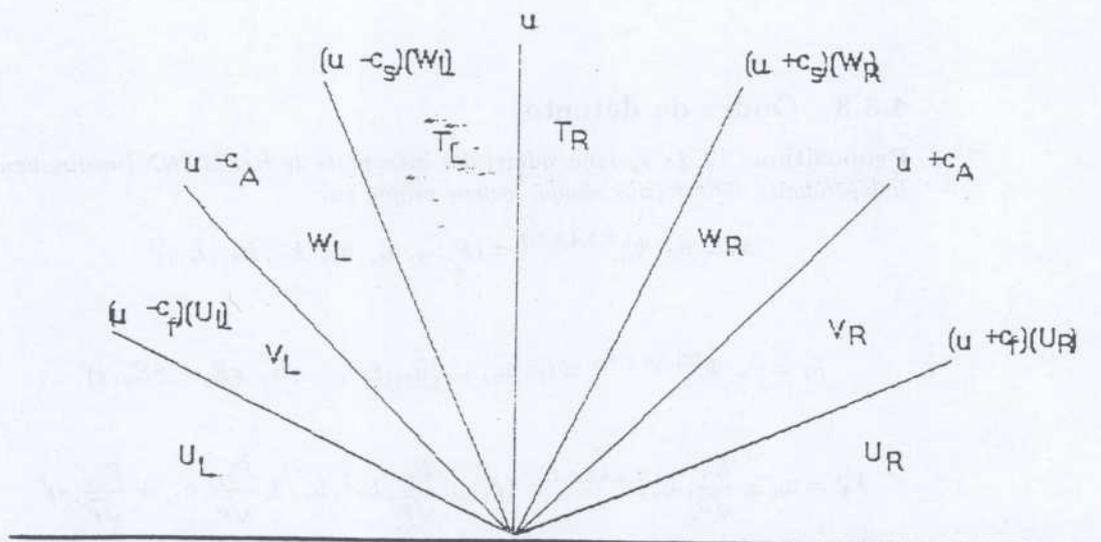
Démonstration: cf. [62]

### 4.3.4 Ondes de choc

Le système étant non conservatif, obtenir les relations de saut généralisées n'est pas chose aisée. Des travaux existent sur ces sujets ( cf [104], [105] ou [106] par exemple ). A partir de relations de sauts généralisées, des relations non linéaires peuvent être exhibées entre deux états mais sont trop complexes (à notre connaissance) à connaître et à exploiter . Aussi est -il hors de propos de pouvoir en déduire la solution du problème de RIEMANN. Cependant, nous pouvons exploiter le fait que pour les discontinuités de contact, les relations de saut sont dans ce cas bien connues.

### 4.3.5 Problème de RIEMANN et solveur linéarisé non linéaire

Soit à l'instant initial ,  $U_L$  l'état constant donné pour  $x$  négatif et  $U_R$  celui obtenu pour  $x$  positif.



A partir de la théorie hyperbolique, après calcul, le problème de RIEMANN consiste à trouver les états intermédiaires connectés aux états initiaux  $U_L$  et  $U_R$ . Comme les ondes de choc ne sont pas connues exactement, la solution du problème de RIEMANN n'est pas accessible par cette voie.

Aussi, pouvons nous définir seulement un solveur de RIEMANN approché pour les applications numériques: il est appelé solveur linéarisé non linéaire.

La principale idée consiste à noter que dans le cas des ondes linéairement dégénérées, on peut calculer exactement les relations de saut tandis que pour les ondes vraiment non linéaires, on peut calculer les relations à travers une relation de saut linéaire.

Ainsi pour ce solveur de RIEMANN, dans notre cas présenté sur la figure,  $V_L$  et  $V_R$  sont connectés à travers une relation linéaire ( la première avec la vitesse  $(u - c_f)(U_L)$  et la seconde avec la vitesse  $(u + c_f)(U_R)$  ). Comme les ondes à la vitesse  $u \pm c_A$  et  $u$  sont linéairement dégénérées, on utilise les invariants de RIEMANN exacts entre  $V_L$  et  $W_L$  et entre  $W_R$  et  $V_R$ . De la même manière, on relie  $W_L$  et  $T_L$  à travers une relation linéaire traitée avec l'état  $W_L$  et on relie  $W_R$  et  $T_R$  à travers une relation linéaire traitée avec l'état  $W_R$ . Pour terminer,  $T_L$  et  $T_R$  sont connectés avec une  $u$ - onde par les invariants de RIEMANN exacts. Aussi, en écrivant les différentes relations et par élimination de  $V_L, W_L, T_L, T_R, W_R, V_R$ , on obtient une solution si et seulement si  $\rho_L \neq 0$  et  $\rho_R \neq 0$  (cf [153] par exemple). On en déduit la proposition suivante.

**Proposition 43** *Le problème de RIEMANN n'a pu être résolu mais le problème linéarisé non linéaire est toujours défini et admet une solution (unique)*

si le vide n'est pas un des états initiaux.

## 4.4 Schéma de type GODOUNOV en multiD

### 4.4.1 D'un problème 3D au problème de RIEMANN 1D

Pour une présentation globale du problème, voir [74] ou [75]. Le système peut être écrit comme :

$$(S) \quad \partial_t U + A(U) \nabla U = 0 \quad (4.26)$$

avec

$$U = (\rho, u, v, w, E_x, E_y, E_z, s)^t$$

il est bien connu que les schémas volumes finis sont des méthodes performantes pour résoudre des problèmes tels que les problèmes hyperboliques non linéaires. La plus performante ( ou la plus célèbre ) est la méthode de GODOUNOV dont une présentation peut être trouvée dans [71] par exemple.

Si on dispose d'une formulation conservative où

$$\nabla F(U) = A(U) \nabla U$$

pour un flux  $F(U)$ , alors cette méthode peut être appliquée sur maillage structure ou pas. L'intégration de (S), pour le cas  $\partial_t W + \partial_x F(W) = 0$ , donne dans une cellule espace-temps  $\Omega_j \otimes [t^n, t^{n+1}]$ :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\Omega_j} \partial_t W d\omega dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\Omega_j} \nabla F(W) d\omega dt = 0 \quad (4.27)$$

Par utilisation du théorème de la divergence de GAUSS

$$\int_{\Omega_j} (W(\omega, t^{n+1}) - W(\omega, t^n)) d\omega + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega_j} F(W) n d\sigma dt = 0 \quad (4.28)$$

Posons à l'instant  $t^n$ , dans la maille spatiale  $\Omega_j$ , la quantité  $W_j^n$  représentant  $\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\Omega_j} W(\omega, t^n) :$

$$W_j^n = \frac{1}{|\Omega_j|} \int_{\Omega_j} W(\omega, t^n) d\omega \quad (4.29)$$

Soit donné  $W^0$  une condition initiale, on calcule  $W^n$  by (37) et on obtient comme schéma numérique à  $t^{n+1}$  dans  $\Omega_j$  avec comme termes explicites :

$$(W_j^{n+1} - W_j^n) |\Omega_j| + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega_j} \vec{F}(W) \vec{n} d\sigma dt = 0 \quad (4.30)$$

De même, pour une forme non conservative de (S) comme dans (35):

$$(U_j^{n+1} - U_j^n)|\Omega_j| + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega_j} \bar{A}\bar{U} \vec{n} d\sigma dt = 0 \quad (4.31)$$

Ainsi, pour avancer la solution numérique  $U$  et il est nécessaire de connaître la solution sur la frontière  $\partial\Omega_j$ .

En 1D, l'interface entre  $\Omega_j$  et  $\Omega_{j+1}$  est localisé en  $x_{j+1/2}$ . La solution numérique est la solution du problème de RIEMANN  $V_{j+1/2}^*(0, U_j, U_{j+1})$ . Dans chaque maille, il faut résoudre un Problème numérique de Riemann à l'interface entre une cellule et ces voisines.

La solution du problème de RIEMANN en multiD est inconnue ou trop difficile. Aussi, il faut associer un problème 1D le long de la normale pour chaque maille. Soit (S) défini par (35)

**Proposition 44** La solution  $V_n$  de  $(S_n)$  est la projection normale de  $V$ , solution du système (S) où

$$(S_n) \quad \partial_t V_n + N \partial_n V_n = 0$$

en notant

$$N = (PAP^{-1})n_x + (PBP^{-1})n_y + (PCP^{-1})n_z$$

avec

$$V_n = (\rho, u_n, u_{\tau_1}, u_{\tau_2}, E_n, E_{\tau_1}, E_{\tau_2}, s)^t$$

et

$$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)^t, \vec{\tau}_1 = \frac{1}{\sqrt{1-n_z^2}}(-n_y, n_x)^t, \vec{\tau}_2 = \frac{1}{\sqrt{1-n_z^2}}(-n_x n_z, n_y n_z, n_x^2 + n_y^2)^t$$

$$\bar{U}_n^t = (u_n = un_x + vn_y, u_{\tau_1} = \vec{u} \vec{\tau}_1, u_{\tau_2} = \vec{u} \vec{\tau}_2)^t$$

Démonstration: cf. [62]

On posera par la suite (PR) le problème de RIEMANN associé aux données initiales constants à gauche et à droite de l'interface  $k$ , où  $k \in \partial\Omega_j$  à laquelle est associé la normale  $n_k$ .

$$\begin{cases} \partial_t(V_n) + N \partial_n(V_n) = 0 \\ V_n(X, t = 0) = V_r \text{ if } X.n > 0 \\ V_n(X, t = 0) = V_l \text{ if } X.n < 0 \end{cases} \quad (4.32)$$

#### 4.4.2 Du problème de RIEMANN 1D au schéma numérique MultiD

Afin de revenir au schéma de GODOUNOV, on introduit les notations suivantes:

$V(i)$  l'ensemble des mailles voisines de la maille "i" (n'incluant pas la maille i)

$l_{ij}$  la longueur de l'interface  $l_{ij} = |\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j|$

$n_{ij}$  le vecteur normal unite de la maille i vers la maille j.

$V^*(\frac{x}{t}, V_l, V_r)$  la solution du problème de RIEMANN avec les états initiaux  $V_l, V_r$

le long de la ligne  $\frac{x}{t}$ .

Dans une formulation conservative,

$$\begin{aligned} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega_j} \vec{F}(W) \vec{n} d\sigma dt &\simeq \int_{t^n}^{t^{n+1}} \sum_{k \in V(j)} \vec{F}(V^*(0, V_j, V_k)) \vec{n}_{jk} l_{jk} \\ &\simeq \Delta t \sum_{k \in V(j)} \vec{F}(V^*(0, V_j, V_k)) \vec{n}_{jk} l_{jk} \end{aligned}$$

le schéma de GODOUNOV se réduit à

$$W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_j|} \sum_{k \in V(j)} \vec{F}(V^*(0, V_j, V_k)) \vec{n}_{jk} l_{jk} \quad (4.33)$$

Soit  $\mathcal{F}_{jk}(V^*, n_{jk})$  le flux normal à l'interface entre  $V_j$  et  $V_k$ :

$$\mathcal{F}_{jk}(V^*, n_{jk}) = \vec{F}(V^*(0, V_j, V_k)) \vec{n}_{jk} \quad (4.34)$$

$$W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_j|} \sum_{k \in V(j)} \mathcal{F}_{jk}(V^*, n_{jk}) l_{jk} \quad (4.35)$$

et pour les équations non conservatives:

$$W_j^{n+1} - W_j^n + \Delta t \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\Omega_j} (A(U) \frac{\partial U}{\partial x} + B(U) \frac{\partial U}{\partial y} + C(U) \frac{\partial U}{\partial z}) d\omega dt = 0 \quad (4.36)$$

L'approximation donne:

$$\begin{aligned} W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_j|} \sum_{k \in V(i)} \overline{A_{jk}} U^* n_x l_{jk} - \frac{\Delta t}{|\Omega_j|} \sum_{k \in V(i)} U^* \overline{B_{jk}} n_y l_{jk} - \frac{\Delta t}{|\Omega_j|} \sum_{k \in V(i)} \overline{C_{jk}} U^* n_z l_{jk} = \\ W_j^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_j|} \sum_{k \in V(i)} U^* \overline{M_{jk}} l_{jk} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Par exemple,  $\overline{A_{jk}}$  est une moyenne des solutions du problème de RIEMANN à l'interface entre  $\Omega_j$  et ses voisins  $V(j)$  :

$$\overline{K_j} = \frac{\sum_{k \in V(i)} K^*(0, V_i, V_j)}{\sum_{k \in V(i)} 1} \quad (4.38)$$

Pour un problème multiD, une formulation non conservative utilise un problème de RIEMANN 1D en prenant en compte le problème le long de la normale. Cette méthode a déjà été employée avec succès dans [60] pour des problèmes de Turbulence (voir aussi [60]).

Pour notre problème, on utilise une linéarisation des ondes rapides et lentes V.N.L. et pour les discontinuités de contact L.D, on résout exactement les relations de saut : ce solveur est appelé solveur de RIEMANN linéarisé non linéaire et a été employé dans [116] et aussi [153].

Ces méthodes supposent qu'il n'y ait pas de vide et que le solveur puisse être calculé dans ces cas, Il suppose toujours que la solution soit calculée à travers un problème de RIEMANN approprié et que le flux associé est pris sur la frontière de la maille .

il est important de noter que le coût de la solution du problème de RIEMANN est peu onéreux ( dans le même ordre d'idée, on peut penser au solveur de ROE - voir {P.L.ROE ou [127]- ) : en fait, pour le système global, on résout , en employant la méthode de SMOLLER - voir [60] ou [145] par exemple - , une équation scalaire non linéaire (  $f(x) = 0$  ) où  $f$  est une fonction croissant en employant une méthode de NEWTON (en fait, en deux itérations par maille et pas de temps est employée pour calculer la solution)•

## Chapitre 5

# Méthodes Implicites en 1D

### 5.1 Introduction

On considère en 1D des lois de conservation d type:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u)) = 0 \quad (5.1)$$

Ce type de problème a reçu les contributions d'un nombre important d'auteurs (on peut citer par exemple [150] et [151]). Ce type de méthode a développé les classes de schémas dits entropiques et conservatifs dont une lecture exhaustive peut être faite dans [70] et [71].

Ces schémas s'intègrent dans la classe des schémas à trois points où on pose  $\sigma = \frac{\Delta t}{\Delta x}$  avec pour  $\mu > 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{j+1/2} = G(u_{j+1}, u_j) \\ (Lu)_j = u_j + \mu\sigma(G_{j+1/2} - G_{j-1/2}) \\ (Ru)_j = u_j - (1 - \mu)\sigma(G_{j+1/2} - G_{j-1/2}) \end{array} \right. \quad (5.2)$$

A partir de ces notations, sous la condition de consistance,  $G(u, u) = f(u)$ ,  $\forall u$ , une classe de schémas à trois points peut être définie de la manière suivante:

$$u_j^{n+1} + \mu\sigma(G_{j+1/2}^{n+1} - G_{j-1/2}^{n+1}) = u_j^n - (1 - \mu)\sigma(G_{j+1/2}^n - G_{j-1/2}^n) \quad (5.3)$$

On retrouve bien sur dans le cas  $\mu = 0$  la classe de schéma explicite bien connu. Dans [82] ou [83], on trouve les conditions suffisantes permettant à un schéma

de respecter la condition T.V.D.

**Proposition 45** Soit la quantité  $TV(u)$  définie par

$$TV(u) = \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} |u_{j+1} - u_j| = \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} |\Delta_{j+1/2}u|,$$

où  $\Delta_{j+1/2}u = u_{j+1} - u_j$ . Alors une condition suffisante pour qu'un schéma qui s'écrit comme précédemment soit T.V.D est que

$$TV(Ru) \leq TV(u)$$

et

$$TV(Lv) \geq TV(U)$$

Démonstration: cf. [83]

Soit alors pour une équation scalaire

$$a_{j+1/2} = \begin{cases} (f(u_{j+1}) - f(u_j))/(\Delta_{j+1/2}u) & \text{si } \Delta_{j+1/2}u \neq 0 \\ f'(u_j) & \text{si } \Delta_{j+1/2}u = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

Le schéma ( 5.3 ) développé en 1D pour une équation scalaire est TVD si et seulement si  $\sigma a_{j+1/2} \leq \frac{1}{1-\mu}$ . La conclusion à en tirer est que pour une équation scalaire, le schéma purement implicite ( $\mu = 1$ ) est toujours T.V.D. (par contre, il existe une condition de type C.F.L. pour les schémas implicites tels que celui obtenu pour  $\mu = 1/2$  qui avait l'avantage d'être du second ordre en temps et en espace).

## 5.2 Linéarisation de ROE

Afin de travailler dans cette direction et de pouvoir effectivement traiter des problèmes implicites (donc linéarisé), les schémas de type ROE sont des candidats naturels à ce type d'étude.

Pour cela rappelons quelques éléments liés à la définition des matrices de ROE. Une matrice  $A$  associée à un flux  $F$  est dite matrice de ROE si,

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall U \forall V, F(U) - F(V) = A(U, V)(U - V) \\ \forall U A(U, U) = A(U) \text{ où } A(U) = \frac{\partial F}{\partial U} \\ A(UV) \text{ a des valeurs et des vecteurs} \\ \text{propres qui engendrent tout l'espace} \end{array} \right. \quad (5.5)$$

Si une telle matrice existe, une linéarisation de ROE peut être exhibée.

### 5.2.1 Cas du P-système

Dans ce cas, les variables conservatives s'écrivent:

$$U = (\rho, \rho u)^t \quad (5.6)$$

pour lesquelles le flux associé s'écrit:

$$F(U) = (\rho u, \rho u^2 + P)^t \quad (5.7)$$

où P est défini par une loi d'état telle que

$$P'(\rho) = c^2(\rho) > 0$$

**Proposition 46** Dans le cas du P-système, existe une matrice de ROE définie par un état W tel que

$$F(U_2) - F(U_1) = A(W)(U_2 - U_1)$$

avec

$$A(W) = \frac{\partial F}{\partial U}(W) \text{ et } W = (r, rw)^t$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} w = \frac{\sqrt{\rho_2}u_2 + \sqrt{\rho_1}u_1}{\sqrt{\rho_2} + \sqrt{\rho_1}} \\ r \text{ tel que } P'(r) = \frac{P(\rho_2) - P(\rho_1)}{\rho_2 - \rho_1} \end{array} \right. \quad (5.8)$$

Démonstration: cf. [58]

### 5.2.2 Cas de la dynamique des gaz

Dans ce cas, les variables conservatives s'écrivent:

$$U = (\rho, \rho u, \rho E)^t \quad (5.9)$$

pour lesquelles le flux associé s'écrit:

$$F(U) = (\rho u, \rho u^2 + P, (\rho E + P)u)^t \quad (5.10)$$

où P est défini par une loi d'état telle que

$$P = (\gamma - 1)\rho e = (\gamma - 1)(\rho E - 1/2\rho u^2) > 0$$

soit alors l'enthalpie H définie par :

$$\rho H = \rho E + P \quad (5.11)$$

**Proposition 47** Dans le cas de la dynamique des gaz, existe une matrice de ROE définie par un état  $W$  tel que

$$F(U_2) - F(U_1) = A(W)(U_2 - U_1)$$

avec

$$A(W) = \frac{\partial F}{\partial U}(W) \text{ et } W = (r, rw, r\mathcal{E})^t$$

tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} w = \frac{\sqrt{\rho_2}u_2 + \sqrt{\rho_1}u_1}{\sqrt{\rho_2} + \sqrt{\rho_1}} \\ \mathcal{H} = \frac{\sqrt{\rho_2}H_2 + \sqrt{\rho_1}H_1}{\sqrt{\rho_2} + \sqrt{\rho_1}} \\ \mathcal{E} = \frac{1}{\gamma}\mathcal{H} + \frac{\gamma-1}{2\gamma}u^2 \end{array} \right. \quad (5.12)$$

Démonstration: cf. [58] ou [130]

### 5.2.3 Schémas implicites associés à la linéarisation de ROE

Dans le cas où existe une linéarisation de ROE, le schéma (5.3) purement implicite s'écrit pour les systèmes:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_j^{n+1} + \sigma(G_{j+1/2}^{n+1} - G_{j-1/2}^{n+1}) = U_j^n \text{ ou encore} \\ U_j^{n+1} + \sigma(A(U_{j+1}^{n+1}, U_j^{n+1})(U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}) + A(U_j^{n+1}, U_{j-1}^{n+1})(U_j^{n+1} - U_{j-1}^{n+1})) \\ - \sigma(|A(U_{j+1}^{n+1}, U_j^{n+1})|(U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}) - |A(U_j^{n+1}, U_{j-1}^{n+1})|(U_j^{n+1} - U_{j-1}^{n+1})) = U_j^n \end{array} \right. \quad (5.13)$$

Ce schéma correspond à la discrétisation du système

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(U) - \Delta x \frac{\partial}{\partial x} (|A(U)| \frac{\partial U}{\partial x}) = 0 \quad (5.14)$$

Par définition soit  $M$  une matrice diagonalisable dans une base réelle telle que soit  $\Delta$  la matrice diagonale des valeurs propres et  $P$  la matrice de passage telle que

$$M = P\Delta P^{-1}$$

On définit la valeur absolue de la matrice  $M$  par

$$|M| = P|\Delta|P^{-1} \quad (5.15)$$

où  $|\Delta|$  est la matrice diagonale dont les termes sont les valeurs absolues des termes de la matrice diagonale  $\Delta$ . Cette définition est indépendante du changement de base. Dans les extensions des méthodes de linéarisation, ces méthodes

sont employées afin de s'affranchir de la condition sur le pas de temps et étendues à des systèmes hyperboliques ( ou mixte hyperbolique au 1<sup>er</sup> ordre- elliptique au 2<sup>ème</sup> ordre ) en notant que le terme diffusif rajouté dans le schéma est proportionnel au pas d'espace donc appelé à joué un rôle négligeable à convergence du maillage.

## 5.3 Etude de l' inversibilité du système obtenu

### 5.3.1 Cas de l'équation scalaire

A partir des notations définies en (5.4), le schéma peut s'écrire

$$u_j^{n+1} + \sigma(a_{j+1/2}^{n+1})(u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}) + a_{j-1/2}^{n+1}(u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) - \sigma(|a_{j+1/2}^{n+1}|)(u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}) - |a_{j-1/2}^{n+1}|(u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) = u_j^n$$

Posons alors pour tout scalaire  $x$ ,  $x^+ = \frac{1}{2}(|x| + x) \geq 0$  et  $x^- = \frac{1}{2}(|x| - x) \geq 0$ . On a toujours  $x = x^+ - x^-$ . Le schéma précédent s'écrit donc

$$-2\sigma(a^-)_{j+1/2}^{n+1}u_{j+1}^{n+1} + (1+2\sigma(a^-)_{j+1/2}^{n+1} + 2\sigma(a^+)_{j-1/2}^{n+1})u_j^{n+1} - 2\sigma(a^-)_{j-1/2}^{n+1}u_{j-1}^{n+1} = u_j^n \quad (5.16)$$

On reconnaît un schéma à trois points, dont le terme diagonal est toujours positif et dont la somme des termes extradiagonaux est négatives et plus petite en valeur absolue que le terme diagonal.

On en déduit aisément la proposition suivante, qui n'est que le principe du maximum.

**Proposition 48** *Le schéma précédent admet une solution ( unique ), pour tout pas de temps, qui vérifie en outre le principe du maximum c'est à dire*

$$\forall n, \forall j, \text{Inf}_j(u_j^n) \leq u_j^{n+1} \leq \text{Sup}_j u_j^n \quad (5.17)$$

### 5.3.2 Cas du P-système

Dans le cas d'un système, la démonstration n'est plus aussi aisée. Soient

$$M^+ = \frac{1}{2}(|M| + M)$$

et

$$M^- = \frac{1}{2}(|M| - M)$$

Si la matrice  $M$  est diagonalisable, les deux matrices ainsi définies ont des valeurs propres positives ou nulles car diagonalisables dans les mêmes bases que  $M$  et  $|M|$ .

On peut écrire le système, en étendant les notations précédentes et le schéma s'écrit :

$$-2\sigma A^-(U_{j+1}^{n+1}, U_j^{n+1})U_{j+1}^{n+1} - 2\sigma A^+(U_j^{n+1}, U_{j-1}^{n+1})U_{j-1}^{n+1} + (I + 2\sigma A^-(U_{j+1}^{n+1}, U_j^{n+1}) + 2\sigma A^+(U_j^{n+1}, U_{j-1}^{n+1}))U_j^{n+1} = U_j^n \quad (5.18)$$

soit encore en posant  $A(V_j, V_{j-1}) = A_{j-1/2}$  et  $A(V_{j+1}, V_j) = A_{j+1/2}$

$$-2\sigma A_{j+1/2}^{-n+1}U_{j+1}^{n+1} + (I + 2\sigma A_{j+1/2}^{-n+1} + 2\sigma A_{j-1/2}^{+n+1})U_j^{n+1} - 2\sigma A_{j-1/2}^{+n+1}U_{j-1}^{n+1} = U_j^n \quad (5.19)$$

Si les matrices, à l'instant  $n+1$ ,  $A_{j-1/2}$  et  $A_{j+1/2}$  étaient diagonalisables dans la même base, on pourrait reprendre le raisonnement précédent mais comme nous sommes dans le cas non linéaire, rien n'assure cette hypothèse. Aussi le raisonnement prend-il en compte des arguments différents.

Posons dans le cas du P-système pour deux états donnés  $U_1$  et  $U_2$  de vitesse respective  $u_1$  et  $u_2$ , l'état moyen défini par

$$u = \frac{\sqrt{\rho_1}u_1 + \sqrt{\rho_2}u_2}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}}$$

et soit

$$\bar{u} = \frac{\sqrt{\rho_1}u_1 - \sqrt{\rho_2}u_2}{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}$$

Soit aussi  $c$  la vitesse du son de l'état moyen défini par  $P'(\rho) = \frac{P(\rho_2) - P(\rho_1)}{\rho_2 - \rho_1}$  avec  $c = \sqrt{P'(\rho)}$

**Proposition 49** Soit  $e_1 = (1, 0)^t$ . Alors  $(\rho_2 - \rho_1)e_1^t A^\pm(U_2, U_1)(U_2 - U_1) \geq 0$

Démonstration: cf. [58]

**Proposition 50** La condition  $|u - \bar{u}| \leq 2c$  équivaut à

$$|u_2 - u_1|^2 \leq (P(\rho_2) - P(\rho_1))\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)$$

. Cette condition est vérifiée si les deux états sont reliés par une 1-onde ou une 2-onde.

Démonstration: cf. [58]

Soit  $\mathcal{E} = \{(V_j)_{j \in \mathbb{Z}} / \forall j \text{ les états } (V_j, V_{j+1})\}$

peuvent être connectés par un 1-choc et une 2-onde de détente ou par une 1-détente et un 2-choc] (5.20)

On peut alors énoncer le théorème suivant

**Théorème 21** Le schéma précédent est inversible pour tout pas de temps si la solution est dans l'ensemble  $\mathcal{E}$ . Dans ce cas, la densité vérifie le principe du maximum c'est à dire :

$$\forall n, \forall j, \text{Inf}_j(\rho_j^n) \leq \rho_j^{n+1} \leq \text{Sup}_j \rho_j^n \quad (5.21)$$

### 5.3.3 Cas de la dynamique des gaz

On peut écrire aussi le système comme dans le cas précédent:

$$-2\sigma A_{j+1/2}^{-n+1} U_{j+1}^{n+1} + (I + 2\sigma A_{j+1/2}^{-n+1} + 2\sigma A_{j-1/2}^{+n+1}) U_j^{n+1} - 2\sigma A_{j-1/2}^{+n+1} U_{j-1}^{n+1} = U_j^n \quad (5.22)$$

On définit dans le cas de la dynamique des gaz pour deux états donnés  $U_1$  et  $U_2$  de vitesse respective  $u_1$  et  $u_2$ , l'état moyen défini par

$$u = \frac{\sqrt{\rho_1} u_1 + \sqrt{\rho_2} u_2}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}}$$

et

$$H = \frac{\sqrt{\rho_1} H_1 + \sqrt{\rho_2} H_2}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}}$$

soit

$$\bar{u} = \frac{\sqrt{\rho_1} u_1 - \sqrt{\rho_2} u_2}{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}$$

et

$$\bar{H} = \frac{\sqrt{\rho_1} H_1 - \sqrt{\rho_2} H_2}{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}$$

**Proposition 51** La condition  $|u - \bar{u}| \leq 2c$  équivaut à

$$|u_2 - u_1|^2 \leq (P(\rho_2) - P(\rho_1)) \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)$$

comme dans le cas du P-système

Démonstration: cf. [58]

Par contre, il n'est pas aisé d'en déduire des relations équivalentes à celles énoncées pour le P-système.

Aussi dans cette étude, nous sommes nous contentés de vérifier que les tests numériques permettaient de confirmer que le schéma était inversible pour tout C.F.L. (ou tout pas de temps) •

## Chapitre 6

# Etude par équations intégrales de l'équation des ondes instationnaires

### 6.1 Equations Intégrales et représentation de la solution de l'Equation des Ondes entre deux plans parallèles

Soit le problème de propagation des ondes entre deux plans parallèles .

$$\mathcal{P} \left\{ \begin{array}{l} \square u \equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) u = f \\ u(0, x) = u_t(0, x) = 0 \text{ pour } x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(t, x) = 0 \text{ pour } x \in \partial\Omega \end{array} \right. \quad (6.1)$$

où:  $\Omega$  est le domaine  $\mathbb{R}^2 \times ]-a, a[$

$\nu$  le vecteur unitaire normal entrant dans  $\Omega$ , soit:  $\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial_3}$  sur le plan  $x_3 = -a$

et  $\frac{\partial}{\partial \nu} = -\frac{\partial}{\partial_3}$  sur le plan  $x_3 = a$

On notera aussi  $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$  et  $u_\nu = \frac{\partial u}{\partial \nu}$

L'onde incidente  $u^I$  est l'onde créée dans tout l'espace par la source  $f$  (qui est au repos à l'instant initial  $t = 0$ ) s'il n'y a pas d'obstacle en  $x_3 = -a$  et  $x_3 = a$ .

On peut donc noter en posant  $u^s = u - u^I$ , le problème  $\mathcal{P}^s$  associé à  $\mathcal{P}$ .

$$\mathcal{P}^s \begin{cases} \square u^s = 0 \\ u^s(0, x) = \dot{u}^s(0, x) = 0 \text{ pour } x \in \Omega \\ \frac{\partial u^s}{\partial \nu}(t, x) = -\frac{\partial u^I}{\partial \nu} \text{ pour } x \in R^+ \times \partial\Omega \end{cases} \quad (6.2)$$

Cette dernière équation suppose  $\partial_\nu u^I$  bien défini sur  $R^+ \times \partial\Omega$ , ce qui est le cas si le support de  $f$  n'intersecte pas les deux plans.

De plus, si l'onde incidente provient uniquement, soit de la partie  $x_3 > a$ , soit de la partie  $x_3 < -a$ , le principe de réflexion totale vérifié par la condition (6.1) entraîne que  $u \equiv 0$  dans  $\Omega$ .

On montrera dans la suite que les équations intégrales utilisées pour résoudre le problème  $\mathcal{P}$  satisfont bien cette exigence. Il est donc naturel de supposer que

$$\text{Supp}(f) \subset R^+ \times \Omega \quad (6.3)$$

D'autre part, les conditions initiales (6.1) et (6.2) font que les prolongements par 0 de  $u$  et de  $u^s$  aux temps négatifs vérifient encore respectivement (6.1) et (6.2). On pourra donc étudier les problèmes  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}^s$  soit dans  $R^+ \times \Omega$  soit dans  $R \times \Omega$  en identifiant les fonctions avec les fonctions prolongées.

Dans toute la suite, nous raisonnerons avec une vitesse du son  $c = 1$ . A un changement d'échelle près, on peut toujours se ramener à ce cas.

On peut donner une représentation (dite représentation de KIRCHOFF) pour la solution  $u^s$  vérifiant (6.2)

$$u^s = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left( \partial_\nu \left( \frac{1}{r} \right) u^s(t-r, y) - \frac{1}{r} \partial_\nu(r) \dot{u}^s(t-r, y) \right) dy - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{r} \partial_\nu u^s(t-r, y) dy \quad (6.4)$$

Cette formule est valable pour tout  $t$  pour  $x \in \Omega$  en ayant

$$y \in \partial\Omega = [x_3 = \pm a]$$

et

$$r = |x - y|$$

On peut trouver, par exemple, cette formule dans [148].

Remarque: (6.4) assure la continuité de  $u^I$  ainsi que celle de ses dérivées à travers  $\partial\Omega$ .

De plus,  $u^I$  vérifie  $\square u^I = 0$  dans  $R \times \overline{\Omega^c}$ .

On peut donc en déduire la formule:

$$0 = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left( \partial_\nu \left( \frac{1}{r} \right) u_r^I - \frac{1}{r} \partial_\nu(r) \dot{u}_r^I \right) dy - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left( \frac{1}{r} \partial_\nu u_r^I \right) dy \quad (6.5)$$

pour  $(t, x) \in R \times \Omega$ , en notant  $u_r = u(t-r, y)$ .

La solution  $u$  peut donc s'écrire sous forme intégrale et :

$$u(t, x) = u^I(t, x) + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left( \partial_\nu \left( \frac{1}{r} \right) u_r - \frac{1}{r} \partial_\nu(r) u_r \right) - \frac{1}{r} (\partial_\nu u)_r dy \quad (6.6)$$

d'où en tenant compte de (6.1), le dernier terme dans l'intégrale disparaît, et donc :

Pour  $t \in R, x \in \Omega$

$$u(t, x) = u^I(t, x) + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left( \partial_\nu \left( \frac{1}{r} \right) u_r - \frac{1}{r} \partial_\nu(r) u_r \right) dy \quad (6.7)$$

Cette formule de représentation permet de calculer  $u$  dans  $R \times \Omega$  si l'on connaît sa trace sur  $R \times \partial\Omega$ . L'intégrale de second membre de (6.7) est un potentiel retardé de double couche. Sa trace est bien connue aussi et l'on a l'équation suivante :

$$\forall x \in \partial\Omega$$

$$\frac{1}{2} u(t, x) = u^I(t, x) + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left( \partial_\nu \left( \frac{1}{r} \right) u_r - \frac{1}{r} \partial_\nu(r) u_r \right) dy \quad (6.8)$$

Ici  $\partial\Omega$  est composé de deux plans et (6.8) se découple aussi en 2.

Posons :

$$p(t, x') = u(t, x', -a) \quad x' \in R^2$$

$$q(t, x') = u(t, x', a) \quad x' \in R^2$$

On en déduit donc de (6.8)

$$\frac{1}{2} p(t, x) = p^I(t, x) + \frac{a}{2\pi} \int_{R^2} \left( q(t-r, y) \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^2} \dot{q}(t-r, y) \right) dy$$

$$\frac{1}{2} q(t, x) = q^I(t, x) + \frac{a}{2\pi} \int_{R^2} \left( p(t-r, y) \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^2} \dot{p}(t-r, y) \right) dy \quad (6.9)$$

lorsque :

$$t \in R, x \in R^2 \text{ et } r = \sqrt{4a^2 + |x-y|^2} = \sqrt{4a^2 + (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

Nous étudions, dans la suite, les équations (6.9) et leurs approximations.

On peut remarquer que, si  $r \geq 2a$  et les fonctions étant nulles pour  $t < 0$ , le système est en réalité explicite :

Pour  $0 \leq t < 2a$

$$p(t, x) = 2p^I(t, x)$$

et

$$q(t, x) = 2q^I(t, x)$$

Pour  $2a \leq t < 4a$ ,

Dans ce cas, pour  $0 < t - r < 2a$  et (6.9) donne  $p(t, x)$  en fonction de  $p^I(t, x)$  et d'une intégrale ne dépendant que de  $q^I(t, x)$  aux instants  $0 \leq s < 2a$ .

On peut de même itérer le processus.

En fait, les équations ne font que traduire la propriété de propagation d'onde avec une vitesse de 1 et d'une réflexion aux deux bords de  $\Omega$ . Posons:

$$\mathcal{T}u(t, x) = \frac{a}{2\pi} \int_{R^2} (u(t-r, y) \frac{1}{r^3} + \dot{u}(t-r, y) \frac{1}{r^2}) dy \quad (6.10)$$

pour  $t \in R$  et  $x \in R^2$  •

## 6.2 Etude de l'opérateur $\mathcal{T}$ pour un obstacle formé de deux plans parallèles

Le but de ce chapitre est de mettre en évidence le caractère convolutif en espace-temps de l'opérateur  $\mathcal{T}$  puis à l'aide d'une transformation de LAPLACE, établir quelques estimations d'erreur.

### 6.2.1 Différentes expressions de l'opérateur $\mathcal{T}$

Dans toute la suite nous poserons  $\alpha = 2a$ .

Nous allons être amenés à faire quelques calculs formels valables pour des fonctions régulières. Nous étudierons alors leur extension à des espaces fonctionnels plus larges.

a) Posons:

$$\mathcal{T}_1 u(t, x) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_{R^2} u(t - \sqrt{\alpha^2 + \rho^2}, y) \frac{dy}{(\alpha^2 + \rho^2)^{3/2}} \quad (6.11)$$

$$\mathcal{T}_2 u(t, x) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_{R^2} \dot{u}(t - \sqrt{\alpha^2 + \rho^2}, y) \frac{dy}{\alpha^2 + \rho^2} \quad (6.12)$$

pour  $t \in R, x \in R^2, \rho = |x - y|$  et  $u$  fonction régulière pour  $t > 0$ , nulle pour  $t < 0$ .

Si on intègre la première équation en coordonnées polaires centrées en  $x$ , en ayant posé  $y = x + \rho e^{i\theta}$ :

$$\mathcal{T}_1 u(t, x) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\rho d\rho}{(\alpha^2 + \rho^2)^{3/2}} \left( \int_0^{2\pi} u(t - \sqrt{\alpha^2 + \rho^2}, x + \rho e^{i\theta}) d\theta \right) \quad (6.13)$$

soit encore en écrivant  $s = \sqrt{\alpha^2 + \rho^2}$ , on a :

$$\mathcal{T}_1 u(t, x) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{ds}{s^2} \left( \int_0^{2\pi} u(t-s, x + \sqrt{s^2 - \alpha^2} e^{i\theta}) d\theta \right) \quad (6.14)$$

Définissons par  $A_1(s)$  l'opérateur agissant sur les fonctions à variables définies dans  $R^2$  :

$$[A_1(s)v](t, x) = \frac{1}{s^2} \int_0^{2\pi} v(x + \sqrt{s^2 - \alpha^2} e^{i\theta}) d\theta \quad (6.15)$$

On peut voir  $[A_1(s)v]$  comme le produit de convolution de  $v$  par une distribution de masse  $\frac{1}{s^2}$  apportée sur le cercle centré en l'origine de rayon  $\sqrt{s^2 - \alpha^2}$ .

Posons :

$$A_1(s) \in \mathcal{D}'(R^2)$$

définie par :

$$A_1(s) : w \rightarrow \langle A_1(s), w \rangle = \frac{1}{s^2} \int_0^{2\pi} w(\sqrt{s^2 - \alpha^2} e^{i\theta}) d\theta$$

alors :

$$[A_1(s).v](x) = (A_1(s) * v)(x)$$

Il est évident que si  $s \rightarrow \alpha$ ,  $A_1(s)$  tend vers  $\frac{2\pi}{\alpha^2} \delta(0)$ , d'où :

$$[A_1(\alpha).v](x) = \frac{2\pi}{\alpha^2} v(x)$$

On peut écrire de même :

$$\mathcal{T}_2 u(t, x) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_{\alpha}^{+\infty} A_2(s) u(t-s, \cdot)(x) ds \quad (6.16)$$

en ayant posé :

$$[A_2(s)v](x) = \frac{1}{s} \int_0^{2\pi} v(x + \sqrt{s^2 - \alpha^2} e^{i\theta}) d\theta \quad (6.17)$$

pour  $s > \alpha$  avec

$$[A_2(\alpha).v](x) = \frac{2\pi}{\alpha^2} v(x)$$

On peut donc écrire :

$$\mathcal{T}_1 v(t, x) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_{\alpha}^{+\infty} [A_1(s)v(t-s, \cdot)](x) ds \quad (6.18)$$

$$\mathcal{T}_2 u(t, x) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_{\alpha}^{+\infty} [A_2(s) \dot{u}(t-s, \cdot)](x) ds \quad (6.19)$$

(6.9) s'écrit donc dans ce cas là:

$$\frac{1}{2} p(t, x) = p^I(t, x) + \mathcal{T}_1 q(t, x) + \mathcal{T}_2 q(t, x)$$

$$\frac{1}{2} q(t, x) = q^I(t, x) + \mathcal{T}_1 p(t, x) + \mathcal{T}_2 p(t, x)$$

b) Il peut paraître intéressant de regarder directement l'opérateur  $\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$ . Pour cela, on effectue une intégration par partie sur  $\mathcal{T}_2$

$$\mathcal{T}_2 u(t, x) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{ds}{s^2} \left( \int_0^{2\pi} \dot{u}(t-s, x + \sqrt{s^2 - \alpha^2} e^{i\theta}) d\theta \right) \quad (6.20)$$

Si  $\vec{n}_0 \vec{\nabla} u$  représente la dérivée normale de  $u$  sur un cercle de centre  $x$ , on a:

$$\mathcal{T}_2 u(t, x) = -\frac{\alpha}{4\pi} \int_{\alpha}^{+\infty} \dot{v}(s, x) \frac{ds}{s} + \frac{\alpha}{4\pi} \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{s}{\sqrt{s^2 - \alpha^2}} \int_0^{2\pi} \vec{n}_0 \vec{\nabla} u(t-s, x + \sqrt{s^2 - \alpha^2} e^{i\theta}) d\theta$$

soit

$$\mathcal{T}_2 u(t, x) = \frac{1}{2} u(t-\alpha, x) - \mathcal{T}_1 u(t, x) + \frac{\alpha}{4\pi} \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{s^2 - \alpha^2}} \int_0^{2\pi} \vec{n}_0 \vec{\nabla} u(t-s, x + \sqrt{s^2 - \alpha^2} e^{i\theta}) d\theta$$

On en déduit donc en posant

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 \quad (6.21)$$

que

$$\mathcal{T} u(t, x) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_{\alpha}^{+\infty} ([A_1(s) u(t-s, \cdot)](x) + [A_2(s) \dot{u}(t-s, \cdot)](x)) ds \quad (6.22)$$

avec  $A_1$  et  $A_2$  donnés par (6.15) et (6.17), ou encore:

$$\mathcal{T} u(t, x) = \frac{u(t-\alpha, x)}{2} + \frac{\alpha}{4\pi} \int_{\alpha}^{+\infty} [B(s) u(t-s, \cdot)](x) ds \quad (6.23)$$

en posant

$$[B(s)v](x) = \frac{1}{\sqrt{s^2 - \alpha^2}} \int_0^{2\pi} \vec{n}_0 \vec{\nabla} v(x + \sqrt{s^2 - \alpha^2} e^{i\theta}) d\theta$$

(6.22) fait intervenir la dérivée temporelle de  $u$  tandis que (6.23) fait appel à la dérivée spatiale de  $u$  •

### 6.2.2 Etude de l'opérateur $\mathcal{T}$ et extension

Pour étudier l'opérateur  $\mathcal{T}$ , on peut estimer les opérateurs de convolution spatiale  $A_1(s), A_2(s), B(s)$  définis par (6.15), (6.17) et (6.23).

Ces opérateurs sont tous des convolutions par des distributions à support compact, d'où applicables à toute distribution  $v \in \mathcal{D}'(R^2)$ .

Pour étudier l'intégration temporelle qui suit les convolutions, on va utiliser les Transformées de FOURIER.

On a:

$$\tilde{\mathcal{A}}_1(s, k) = \langle \tilde{\mathcal{A}}_1(s), e^{-ik \cdot} \rangle = \frac{1}{s^2} \int_0^{2\pi} e^{-i\sqrt{s^2 - \alpha^2}(k_1 \cos \theta + k_2 \sin \theta)} d\theta$$

où  $k = (k_1, k_2)$  et  $|k| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$  d'où

$$\tilde{\mathcal{A}}_1(s, k) = \frac{1}{s^2} \int_0^{+\infty} e^{-i|k|\sqrt{s^2 - \alpha^2} d\theta}$$

En définissant les fonctions de BESSEL par

$$\text{Pour } z \in C, J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2p}$$

Cette série est absolument convergente  $\forall z \in C$ . Dans tout disque compact non contenant 0 de  $t \in C, z \in C$ , (cf [144]) on obtient le développement:

$$e^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) t^n \quad (6.24)$$

En posant dans le développement  $t = -ie^{i\theta}$ , on obtient:

$$\tilde{\mathcal{A}}_1(s, k) = \frac{2\pi}{s^2} J_0(|k|\sqrt{s^2 - \alpha^2}) \quad (6.25)$$

pour  $s \geq \alpha, k \in R^2$ .

On en déduit que:

$$J_0(|k|\sqrt{s^2 - \alpha^2}) \leq \frac{C(T)}{(s^2 - \alpha^2)^{1/4}} (1 + |k|^2)^{-1/4} \quad (6.26)$$

$$\forall k \in R^2 \text{ et } a \leq s \leq T$$

On a ainsi comme première estimation:

$$\| \mathcal{T}_1 u(t, \cdot) \|_{H^\sigma(R^2)}^2 \leq \frac{\alpha^2 C(T)}{4} \int_\alpha^t \frac{ds}{s^4 (s^2 - \alpha^2)^{1/2}} \| u(t-s, \cdot) \|_{H^{\sigma-1/2}(R^2)}^2 \quad (6.27)$$

pour  $\alpha \leq t \leq T$ , d'où en intégrant en temps :

$$\| \mathcal{T}_1 u \|_{L^2(\alpha, T; H^\sigma(\mathbb{R}^2))} \leq C_1(a, T) \| u \|_{L^2(0, T-\alpha, H^{\sigma-1/2}(\mathbb{R}^2))} \quad (6.28)$$

De même :

$$\| \mathcal{T}_2 u \|_{L^2(a, T; H^\sigma(\mathbb{R}^2))} \leq C_2(a, T) \| u \|_{L^2(0, T-a, H^{\sigma-1/2}(\mathbb{R}^2))} \quad (6.29)$$

On en déduit :

**Théorème 22**  $\widehat{\mathcal{T}}$  peut être prolongé en un opérateur linéaire continue sur l'espace  $L^2(0, \infty; L^2(\mathbb{R}^2))$  à valeurs dans  $L^2(\alpha, \infty; L^2(\mathbb{R}^2))$

Démonstration: cf. [54]

**Théorème 23** Pour  $T > 0$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\exists C > 0$  tel que :

$$\int_a^{T+a} \| \mathcal{T} \Phi(t, \cdot) \|_{H^\sigma(\mathbb{R}^2)}^2 dt \leq C \| \Phi \|_{H^\sigma(0, T; L^2(\mathbb{R}^2))}^2$$

Démonstration: cf. [54]

*Remarque* Au lieu d'échanger l'ordre des dérivations, on pourrait tout aussi bien garder les mêmes D' où :

$$\mathcal{T} \in \mathcal{L}(H_0^1(0, T; L^2(\mathbb{R}^2)); H_0^1(0, T; L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^2))) \quad (6.30)$$

où  $H_0^1(0, T)$  désigne les fonctions de  $H^1(0, T)$  nulles en 0 •

### 6.2.3 Solution du système défini par les équations intégrales pour une géométrie bornée par deux plans parallèles

On veut traiter le système d'équations intégrales donnant la trace de l'onde totale  $u$  sur les deux plans frontière du domaine de propagation  $\Omega$ , en fonction de l'onde incidente  $u^I$ .

En utilisant l'opérateur  $\mathcal{T}$ , on peut écrire :

$$p - 2\mathcal{T}q = 2p^I \quad (6.31)$$

$$q - 2\mathcal{T}p = 2q^I \quad (6.32)$$

ou encore en utilisant les Transformés de Fourier et tenant compte de (2.27) :

$$\hat{p} - e^{-aZ} \hat{q} = 2\hat{p}^I \quad (6.33)$$

$$\hat{q} - e^{-aZ} \hat{p} = 2\hat{q}^I \quad (6.34)$$

système pour lequel la solution est donnée par :

$$\hat{p}(\omega, k) = 2 \frac{e^{aZ} \hat{p}^I + \hat{q}^I}{e^{aZ} - e^{-aZ}} \quad (6.35)$$

$$\hat{q}(\omega, k) = 2 \frac{e^{aZ} \hat{q}^I + \hat{p}^I}{e^{aZ} - e^{-aZ}}$$

$$\|u\|_{\omega_I}^2 = \int_0^{+\infty} e^{-2\omega_I t} \int_{R^2} |u(t, x)|^2 dx dt \quad (6.36)$$

La formule de Parseval donne :

$$\|p\|_{\omega_I} \leq C(a, \omega_I) (\|p^I\|_{\omega_I} + \|q^I\|_{\omega_I}) \quad (6.37)$$

$$\|q\|_{\omega_I} \leq C(a, \omega_I) (\|p^I\|_{\omega_I} + \|q^I\|_{\omega_I}) \quad (6.38)$$

On peut donc passer à la norme  $L^2(0, T; L^2(R^2))$  en utilisant les mêmes arguments que dans les remarques du Théorème 1 et on en déduit le résultat :

**Théorème 24** *Le système d'équations intégrales (6.1) possède une solution unique :  $\forall p^I, q^I \in L^2(0, T; L^2(R^2))$ . Cette solution vérifie l'estimation suivante :*

$$\|p\|_{L^2(0, T; L^2(R^2))} \leq C(a, t) (\|p^I\|_{L^2(0, T; L^2(R^2))} + \|q^I\|_{L^2(0, T; L^2(R^2))}) \quad (6.39)$$

et

$$\|q\|_{L^2(0, T; L^2(R^2))} \leq C(a, t) (\|p^I\|_{L^2(0, T; L^2(R^2))} + \|q^I\|_{L^2(0, T; L^2(R^2))}) \quad (6.40)$$

la constante  $C(a, T)$  étant définie par

$$C(a, T) = 2 \inf_{\omega_I > 0} \frac{e^{\omega_I(a+T)}}{e^{a\omega_I} - e^{-a\omega_I}} = 2 \left(1 + \frac{T}{2a}\right) \left(1 + \frac{2a}{T}\right) \frac{T}{2a} \geq \frac{T+2a}{a} e^{\bullet} \quad (6.41)$$

Démonstration: cf. [54]

#### 6.2.4 Analyse d'une Discrétisation Spatiale pour une géométrie bornée par deux plans parallèles

Reprenant le système (6.1), on suppose que chaque fonction  $(p, q)$  est approchée par une fonction  $(p^h, q^h)$  constante par morceaux en espace :

$$p^h(t, x) = p^h(t, x_j) = p_j^h(t) \quad \forall x \in T_j \quad (6.42)$$

où les points sont définis par

$$x_j = [(j_1 + 1/2)h, (j_2 + 1/2)h], j = (j_1, j_2) \in Z^2$$

$$T_j = [|x_1 - x_j^1| < h/2, |x_2 - x_j^2| < h/2] = [j_1 h < x_1 < (j_1 + 1)h, j_2 h < x_2 < (j_2 + 1)h]$$

on cherche donc à évaluer l'approximation de  $(p, q)$  par  $p^h, q^h$  solution des équations approchées :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} p_j^h(t) - \frac{a}{4\pi} \sum_l \int_{T_l} (q_l^h(t - r_j) \frac{1}{r_j^3} + \dot{q}_l^h(t - r_j) \frac{1}{r_j^2}) dy &= p_j^{I,h}(t) \\ \frac{1}{2} q_j^h(t) - \frac{a}{4\pi} \sum_l \int_{T_l} (p_l^h(t - r_j) \frac{1}{r_j^3} + \dot{p}_l^h(t - r_j) \frac{1}{r_j^2}) dy &= q_j^{I,h}(t) \end{aligned} \quad (6.43)$$

où  $j \in Z^2$  et  $r_j = \sqrt{4a^2 + |x_j - y|^2}$ ,  $y$  étant un point d'intégration.

Notons que (6.43) dépend du choix du point  $x_j$  dans chaque  $T_j$  : strictement parlant, il n'y a pas qu'un seul système d'équations approchées de (1.1) pour des fonctions constantes par morceaux. On supposera pour l'instant les points  $x_j$  choisis et les fonctions  $p^h$  et  $q^h$  vérifiant le système (6.43).

Ce système (cf. [122]) l'ont discrétisé en temps pour étudier une solution approchée du système initial (6.1).

Le système précédent donne :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} p^h - \pi^h \mathcal{T} q^h = p^{I,h} \\ \frac{1}{2} q^h - \pi^h \mathcal{T} p^h = q^{I,h} \end{cases} \quad (6.44)$$

où  $\pi^h$  est l'interpolation qui, à chaque fonction définie sur  $T_j$  donne la fonction égale à sa valeur en  $x_j$ .

On notera ainsi l'intérêt du théorème 24 qui permet de donner un sens précis à (6.44) quand  $(p^h, q^h)$  sont suffisamment réguliers en temps car alors  $\mathcal{T} q^h$  et  $\mathcal{T} p^h$  deviennent réguliers en espace, ce qui permet de définir  $\pi^h$ .

Comme (6.1), (6.43) est en fait explicite : entre 0 et  $2a$ ,  $p^h$  et  $q^h$  prennent les valeurs de  $p^{I,h}$  et  $q^{I,h}$  respectivement, puis entre  $2a$  et  $4a$ , ils se calculent explicitement en fonction de leur valeurs entre 0 et  $2a$ , etc, ...

Le problème est de comparer cette solution à celle du système exact (6.1). On en déduit :

$$\begin{cases} (\mathcal{I} - 4(\pi^h \mathcal{T})^2) p^h = 2(p^{I,h} + 2\pi^h \mathcal{T} q^{I,h}) \\ (\mathcal{I} - 4(\pi^h \mathcal{T})^2) q^h = 2(q^{I,h} + 2\pi^h \mathcal{T} p^{I,h}) \end{cases} \quad (6.45)$$

et comparons ces solutions à la solution exacte  $(p, q)$  :

$$\begin{cases} (\mathcal{I} - 4(\mathcal{T})^2) p = 2(p^I + 2\mathcal{T} q^I) \\ (\mathcal{I} - 4(\mathcal{T})^2) q = 2(q^I + 2\mathcal{T} p^I) \end{cases} \quad (6.46)$$

d'où

$$(\mathcal{T}^2 - (\pi^h \mathcal{T})^2)(p) = \mathcal{T}(\mathcal{I} - \pi^h)\mathcal{T}(p) + (\mathcal{I} - \pi^h)\mathcal{T}(\pi^h \mathcal{T})(p) \quad (6.47)$$

ceci  $\forall j \in Z^2$ ,  $\pi^h$  est continu de  $H^\sigma$  dans  $L^2(\sigma > 1)$  dans chaque  $T_j \subset R^2$ .  
D'après le Théorème 24, on peut supposer donc:

$$p \in H_0^{2+\epsilon}(0, T; L^2(R^2)) \text{ pour } \epsilon > 0 \quad (6.48)$$

On peut en déduire:

$$\mathcal{T}p \in H_0^{1+\epsilon/2}(0, T; H^{1+\epsilon/2}(R^2))$$

d'où

$$\pi^h \mathcal{T}p \in H_0^{1+\epsilon/2}(0, T; L^2(R^2))$$

et donc

$$\mathcal{T}\pi^h \mathcal{T}p \in L^2(0, T; H^{1+\epsilon/2}(R^2))$$

D'après la théorie de l'interpolation sur les espaces de SOBOLEV, on en déduit:

$$\| \mathcal{T}^2 - (\pi^h \mathcal{T})^2 \|(p) \|_{L^2(0, T; L^2(R^2))} \leq Ch^{\epsilon/2} \| p \|_{H^{2+\epsilon}(0, T; L^2(R^2))} \quad (6.49)$$

Ainsi le second membre du premier terme de (6.47) tend vers 0 si h tend vers 0

Soit  $V_h$  le sous espace de  $L^2(R^2)$  formé des fonctions constantes sur chaque  $T_j$ .  
Pour que l'opérateur  $(\pi^h \mathcal{T})^2$  soit défini, il faut se restreindre à un sous espace strict de  $L^2(0, T; V_h)$  mais non conservé par  $(\pi^h \mathcal{T})^2$ ; on ne peut donc majorer simplement:

$$\| (\mathcal{I} - 4(\pi^h \mathcal{T})^2)^{-1} \|$$

On peut aussi remarquer que le premier membre de (6.47) s'écrit sous la forme:

$$(\mathcal{I} - 4(\mathcal{T})^2)(p^h - p) + 4(\mathcal{T}^2 - (\pi^h \mathcal{T})^2)(p)$$

On est donc amené à:

$$(\mathcal{I} - 4(\mathcal{T})^2)(p^h - p) = l(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} l(h) = 0$$

Si on connaît une estimation a priori sur  $p^h$  analogue à (6.49):

$$p^h \in H_0^{2+\epsilon}(0, T; L^2(R^2)) \quad (6.50)$$

comme l'opérateur  $(\mathcal{I} - 4(\mathcal{T})^2)$  est coercif, on en déduit immédiatement la convergence  $p^h$  vers p dans  $L^2(0, T; L^2(R^2))$  quand h tend vers 0.

Etudions le cas d'un maillage régulier où l'on retrouve le caractère convolutif

de  $\pi^h \mathcal{T}$ .

Soit  $f$  une fonction continue, intégrable de  $R^2$ . Etudions la transformée de Fourier de  $\pi^h f$ .

$$\widehat{\pi^h f}(k) = \int e^{-ikx} (\pi^h f)(x) dx = \sum_j f(x_j) \int_{T_j} e^{-ikx} dx$$

$$\widehat{\pi^h \mathcal{T} q^h}(\omega, k) = \frac{a\lambda(k)}{2\pi} \sum_l e^{ikx_l} \hat{q}^h(\omega, x_l) \mu_{l,j}(\omega, k)$$

où :

$$\mu_{l,j}(\omega, k) = \sum_j e^{-ik(x_j - x_l)} \int_{T_l} e^{i\omega r_j} \left( \frac{1}{r_j^3} - \frac{i\omega}{r_j^2} \right) dy$$

Cette fonction est indépendante de  $l$  ( invariance par translation ); d' où :

$$\mu_j^h(\omega, k) = \sum_j e^{-ikx_j} \int_{T_l} e^{i\omega r} \left( \frac{1}{r^3} - \frac{i\omega}{r^2} \right) dy$$

avec  $r = \sqrt{4a^2 + |y|^2}$  d' où :

$$\widehat{\pi^h \mathcal{T} q^h}(\omega, k) = \frac{1}{2} \mu^h(\omega, k) \hat{q}^h(\omega, k) \quad (6.51)$$

On est donc ramené dans la même situation que (6.33) où maintenant  $\mu^h(\omega, k)$  remplace  $e^{-aZ}$  •

### 6.3 Etude du problème pour un bord constitué de deux plans orthogonaux infinis

Le plan adopté va être très semblable à celui développé au paragraphe précédent

Soit le problème de propagation des ondes entre deux plans orthogonaux. Considérons donc deux plans définis dans un système d' axes par  $x_2 = 0$  pour le plan  $P^1$  et par  $x_1 = 0$  pour le plan  $P^2$ . On peut donner une représentation ( dite représentation de KIRCHOFF) pour la solution  $u$  : La solution  $u$  peut donc s' écrire sous forme intégrale .

Cette formule de représentation permet de calculer  $u$  dans  $R \times \Omega$  si l' on connaît sa trace sur  $R \times \partial\Omega$ . L' intégrale de second membre de (6.8) est un potentiel retardé dedouble couche .Sa trace est bien connue aussi et l' on a l' équation suivante :

$$\forall x \in \partial\Omega$$

$$\frac{1}{2} u(t, x) = u^I(t, x) + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left( \partial_\nu \left( \frac{1}{r} \right) u_r - \frac{1}{r} \partial_\nu(r) u_r \right) dy \quad (6.52)$$

Ici  $\partial\Omega$  est composé de deux plans et (6.9) se découple aussi en 2. Posons:

$$\begin{aligned} p(t, x_1, x_3) &= u(t, x_1, 0, x_3) \\ \forall (x_1, x_3) &\in R^+ \times R \\ q(t, x_2, x_3) &= u(t, 0, x_2, x_3) \\ \forall (x_2, x_3) &\in R^+ \times R \end{aligned}$$

On en déduit donc de (6.9)

$$\frac{1}{2}p(t, x, z) = u^I(t, x, 0, z) - \frac{x}{4\pi} \int_{R^2} (q(t-r, y, Z) \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^2} \dot{q}(t-r, y, Z)) dy dZ$$

$$\frac{1}{2}q(t, x, z) = q^I(t, 0, x, z) - \frac{x}{4\pi} \int_{R^2} (p(t-r, y, Z) \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^2} \dot{p}(t-r, y, Z)) dy dZ \quad (6.53)$$

lorsque:

$$t \in R, (x, z) \in R^2 \text{ et } r = \sqrt{x^2 + y^2 + |z - Z|^2}$$

On peut étendre les formules précédentes à  $x < 0$  si on pose

$$q(t, x, z) = 0 \quad \forall x \in R^-, t \in R, z \in R$$

et

$$p(t, x, z) = 0 \quad \forall x \in R^-, t \in R, z \in R$$

Posons:

$$\mathcal{T}_1 q(t, x, z) = -\frac{x}{2\pi} \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} q(t - \sqrt{x^2 + y^2 + (z - Z)^2}, y, Z) \frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2 + (z - Z)^2})^{3/2}} dZ \quad (6.54)$$

$$\mathcal{T}_2 p(t, x, z) = -\frac{x}{2\pi} \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{p}(t - \sqrt{x^2 + y^2 + (z - Z)^2}, y, Z) \frac{1}{x^2 + y^2 + (z - Z)^2} dZ \quad (6.55)$$

pour  $t \in R$  et  $(x, z) \in R^2$

On définit alors

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$$

### 6.3.1 Différentes expressions de l'opérateur $\mathcal{T}$

Si on intègre la première équation en coordonnées polaires centrées en  $x$ , en ayant posé  $Z = z + \rho \sin \theta, y = \rho \cos \theta$ :

$$\mathcal{T}_1 p(t, x, z) = -\frac{x}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_x^{+\infty} p(t-s, \sqrt{s^2-x^2} \cos \theta, z + \sqrt{s^2-x^2} \sin \theta \frac{ds}{s^2} \right) d\theta \quad (6.56)$$

Définissons par  $A_1(s)$  l'opérateur agissant sur les fonctions à variables définies dans  $R^2$ :

$$[A_1(s)v](\cdot, x, z) = -\frac{x}{2\pi s^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} v(\sqrt{s^2-x^2} \cos \theta, z + \sqrt{s^2-x^2} \sin \theta) d\theta \quad (6.57)$$

et

$$[A_2(s)v](\cdot, x, z) = -\frac{x}{2\pi s} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} v(\sqrt{s^2-x^2} \cos \theta, z + \sqrt{s^2-x^2} \sin \theta) d\theta \quad (6.58)$$

On remarquera que par rapport à l'étude développée au paragraphe précédent, ce phénomène est lié aux données géométriques qui n'ont lieu que dans des demi-plans.

On peut écrire de même:

$$\mathcal{T}_2 u(t, x, z) = -\frac{x}{2\pi} \int_x^{+\infty} A_2(s) \dot{u}(t-s, \cdot)(x, z) ds \quad (6.59)$$

On peut donc écrire:

$$\mathcal{T}_1 v(t, x, z) = \frac{x}{4\pi} \int_x^{+\infty} A_1(s) v(t-s, \cdot)(x, z) ds \quad (6.60)$$

(6.1) s'écrit donc dans ce cas là:

$$\frac{1}{2} p(t, x, z) = p^I(t, x, z) + \mathcal{T}_1 q(t, x, z) + \mathcal{T}_2 q(t, x, z)$$

$$\frac{1}{2} q(t, x, z) = q^I(t, x, z) + \mathcal{T}_1 p(t, x, z) + \mathcal{T}_2 p(t, x, z)$$

**Théoreme 25** Pour toute fonction  $q \in C^1(R \times R^2)$  à support dans  $[t < 0]$ , la fonction  $\mathcal{T}q$  définie dans (6.52) est continue, nulle si  $t \leq x$  et peut être mise sous la forme

$$\mathcal{T}q(t, x, z) = \int_x^t ([A_1(s)q](t-s, \cdot, \cdot) + [A_2(s)\dot{q}](t-s, \cdot, \cdot)) ds$$

ou

$$\mathcal{T}q(t, x, z) = \frac{1}{2}q(t-x, 0, z) + \frac{x}{2\pi} \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{s^2 - x^2}} B(s)q(t-s, \dots)(x, z) ds \quad (6.61)$$

avec comme définition de  $A_1(s), A_2(s), B(s)$  celles données par (6.57), (6.58), (6.61).

Démonstration: cf. [54]

### 6.3.2 Expression en variables de Fourier

Pour étudier l'intégration temporelle qui suit les convolutions, on va utiliser les Transformées de FOURIER dans l'espace  $R \times R^2$  et on posera:

$$\hat{\phi}(\omega, k) = \int_0^{+\infty} dt \int_{R^2} e^{i(\omega t - kx)} \phi(t, x) dx \quad (6.62)$$

où  $\phi \in \mathcal{S}_+(R \times R^2)$  Pour traiter ce problème, nous nous intéressons non plus au problème des deux demi plans orthogonaux mais à celui de deux plans infinis orthogonaux.

On a donc

$$\mathcal{T}_1 q(t, x, z) = -\frac{x}{2\pi} \iint \frac{1}{r^3} q(t-r, X, Z) dX dZ$$

avec  $r = \sqrt{x^2 + X^2 + (z-Z)^2}$  d'où

$$\widehat{\mathcal{T}_1 q}(\omega, k) = \frac{1}{2\pi} \iiint \int \int \frac{\sqrt{s^2 - X^2}}{s^2} \cos \theta e^{i(\omega t - k_2 Z)} e^{-i\sqrt{s^2 - X^2}(k_1 \cos \theta + k_2 \sin \theta)} q(t-s, X, Z) ds d\theta dX dZ dt$$

pour  $s \geq |x|$ ,  $\theta \in ]0, 2\pi[$ ,  $(X, Z) \in R^2$ ,  $t \in R$   
soit encore en posant  $\tau = t - s$

$$\widehat{\mathcal{T}_1 q}(\omega, k) = -\frac{1}{2\pi} \iint \int e^{i(\omega \tau - k_2 Z)} q(\tau, X, Z) d\tau dX dZ \int_0^{2\pi} \left( \int_{|x|}^{+\infty} \frac{\sqrt{s^2 - X^2}}{s^2} e^{i\omega s} \cos \theta e^{-i\sqrt{s^2 - X^2}(k_1 \cos \theta + k_2 \sin \theta)} ds \right) d\theta \quad (6.63)$$

De la même manière, on montrerait que

$$\widehat{\mathcal{T}_2 q}(\omega, k) = -\frac{1}{2\pi} \iint \int e^{i(\omega \tau - k_2 Z)} \dot{q}(\tau, X, Z) d\tau dX dZ \int_0^{2\pi} \left( \int_{|x|}^{+\infty} \frac{\sqrt{s^2 - X^2}}{s} e^{i\omega s} \cos \theta e^{-i\sqrt{s^2 - X^2}(k_1 \cos \theta + k_2 \sin \theta)} ds \right) d\theta \quad (6.64)$$

On en déduit donc que

$$\widehat{\mathcal{T}q}(\omega, k) = -i|k| \frac{\cos \phi}{\sqrt{|k|^2 - \omega^2}} \int \int \int e^{i(\omega\tau - k_2 Z)} e^{-X\sqrt{|k|^2 - \omega^2}} q(\tau, X, Z) d\tau dX dZ \quad (6.65)$$

soit:

$$\widehat{\mathcal{T}q}(\omega, k) = -i \frac{k_1}{\sqrt{|k|^2 - \omega^2}} \hat{q}(\omega, -i\sqrt{|k|^2 - \omega^2}, k_2) \quad (6.66)$$

### 6.3.3 Les Equations Semi discrétisées $Q_0$

Reprenant le système (1.1), on suppose que les plans sont recouverts de rectangles par un réseau. Nous appellerons ces équations les équations semi - discrétisées  $Q_0$ . Soit donc  $(T_0)$  un maillage régulier de  $R^2$  de taille  $h$ . Chaque fonction  $(p, q)$  est approchée par une fonction  $(p^h, q^h)$  constante par morceaux en espace:

$$p^h(t, x) = p^h(t, x_j) = p_j^h(t) \quad \forall x \in T_j \quad (6.67)$$

On cherche donc à évaluer l'approximation de  $(p, q)$  par  $p^h, q^h$  solution des équations approchées:

$$\begin{aligned} p_j^h(t) - \frac{x_j}{2\pi} \sum_{L \in \mathcal{I}} \int_{T_j} (q_L^h(t - r_j) \frac{1}{r_j^3} + \dot{q}_L^h(t - r_j) \frac{1}{r_j^2}) dy &= 2p_j^I(t) \\ q_j^h(t) - \frac{x_j}{2\pi} \sum_{L \in \mathcal{I}} \int_{T_j} (p_L^h(t - r_j) \frac{1}{r_j^3} + \dot{p}_L^h(t - r_j) \frac{1}{r_j^2}) dy &= q_j^I(t) \end{aligned} \quad (6.68)$$

où  $r_j = \sqrt{x_j^2 + X + |Z - z_j|^2}$ , où  $(X, Z)$  est un point courant de  $T_L$ .  
Le système précédent donne:

$$\begin{cases} p^h - \mathcal{T}^h q^h = 2p^{I,h} \\ q^h - \mathcal{T}^h p^h = 2q^{I,h} \end{cases} \quad (6.69)$$

ou encore en découplant les équations et en posant  $\phi^h = p^h + q^h$  et  $\psi^h = p^h - q^h$

$$\begin{cases} \phi^h - \mathcal{T}^h \phi^h = 2\phi^{I,h} \\ \psi^h + \mathcal{T}^h \psi^h = 2\psi^{I,h} \end{cases} \quad (6.70)$$

Chacune des équations est en fait un système d'équations intégro - différentielles sur les fonctions d'une seule variable  $(\phi_j(t))$  et  $(\psi_j(t))$ .

Comme dans le cas continue, on peut introduire les opérateurs  $A_1(s)$  et  $A_2(s)$  s'appliquant sur les fonctions ici  $q^h(t - s, \cdot)$  et donnant

$$A_1(s)q^h(t - s, \cdot)(x_j) = -\frac{x_j}{2\pi s^2} \sum_L \int_{\theta_1}^{\theta_2} q_L^h(t - s) d\theta$$

où  $\theta_1$  et  $\theta_2$  représentent les angles limites de l'intersection du cercle de centre  $(0, Z_J)$  et de rayon  $\sqrt{s^2 - X_J^2}$  avec l'élément  $T_L$ . La somme porte sur les  $L$  tels que cette intersection soit non vide.

Posons alors  $c_{J,L} = \theta_2 - \theta_1$  dans le cas d'une intersection non vide et  $c_{J,L} = 0$  dans les autres cas. On obtient alors:

$$A_1(s)q^h(t-s, \cdot)(x_J) = -\frac{x_J}{2\pi s^2} \sum_L c_{J,L}(s)q_L^h(t-s)$$

De même,

$$A_2(s)q^h(t-s, \cdot)(x_J) = -\frac{x_J}{2\pi s} \sum_L c_{J,L}(s)q_L^h(t-s)$$

d'où

$$(\mathcal{T}^h q^h)_J(t) = -\frac{x_J}{2\pi} \sum_L \int_{x_J}^t c_{J,L}(s) \left( \frac{q_L^h(t-s)}{s^2} + \frac{q_L^h(t-s)}{s} \right) ds$$

Comme par (6.56), la somme ne comportant qu'un nombre fini de termes non nuls, la série est bien définie.

Une intégration par partie donne une seconde formule pour  $(\mathcal{T}^h q^h)$

$$(\mathcal{T}^h q^h)_J(t)(x_j, z_j) = \frac{1}{2\pi} q_L(t-x_J) - \frac{x_J}{2\pi} \sum_L \int_{x_J}^t \frac{c_{J,L}(s)}{s} q_L^h(t-s) ds$$

### 6.3.4 Calcul de la Transformée de Fourier de $\mathcal{T}^h q^h$

On se donne ici le maillage régulier défini par

$$T_J = [x = (x_1, x_2) / \|x - (X_J, Z_J)\| = \text{Max}(|x_1 - j_1 h|, |x_2 - j_2 h|) \leq h/2]$$

Par la suite, on identifiera l'espace  $L_h^2$  à l'espace hilbertien  $l^2(Z^2)$  des suites de nombres complexes de carré sommable.

Par la formule de Parseval, on a l'égalité suivante

$$\int_{K_h} |\hat{v}^h(k)|^2 dk = \frac{4\pi^2}{h^2} \sum_J |v_J|^2$$

On en déduit que la transformée de Fourier inverse de  $\mathcal{F}^h$  est égale à

$$(\overline{\mathcal{F}^h v^h})_J = \frac{h^2}{4\pi^2} \int_{K_h} \hat{v}^h(k) e^{ikx_J} dk = \int_{K_h} \hat{v}^h(k) e^{ikx_J} d'k$$

où  $d'k = \frac{h^2}{4\pi^2} dk$

Calculons

$$(\mathcal{T}^h v^h)_J = \int e^{i\omega t} (\mathcal{T}^h v^h)_J(t) dt = -\frac{x_J}{2\pi} \sum_L \int_{T_L} \left( \frac{q_L^h(t-r_J)}{r_J^3} + \frac{q_L^h(t-r_J)}{r_J^2} \right) dx dz$$

où  $r_J = \sqrt{x^2 + X_J^2 + |z - Z_J|^2}$

Toutes les quantités étant de somme finie, on peut intervertir les signes  $\sum$  et  $\int$  sans difficulté. On en déduit

$$\begin{aligned} (\widehat{\mathcal{T}^h q^h})_J(t) dt &= -\frac{x_J}{2\pi} \sum_L \int_{T_L} \int e^{i\omega r_J} \left( \frac{1}{r_J^3} - \frac{i\omega}{r_J^2} \right) dx dz \left( \int e^{i\omega \tau} q_L(\tau) d\tau \right) = \\ &= -\frac{x_J}{2\pi} \sum_L \widehat{q}_L(\omega) \int_{T_L} \int e^{i\omega r_J} \left( \frac{1}{r_J^3} - \frac{i\omega}{r_J^2} \right) dx dz \end{aligned}$$

avec  $r_J = \sqrt{x^2 + X_J^2 + |z - Z_J|^2}$  ce qui peut encore s'écrire en posant

$$b_{J,L} = -\frac{x_J}{2\pi} \int_{T_L} e^{i\omega r_J} \left( \frac{1}{r_J^3} - \frac{i\omega}{r_J^2} \right) dx dz$$

Si on note  $J = (j_1, j_2)$  et  $L = (l_1, l_2)$ , on en déduit finalement que :

$$b_{J,L} = b_{j_1, j_2, l_1, l_2} = b_{j_1, j_2 - l_2, l_1, 0}$$

Or

$$b_{j_1, j_2, l_1, 0} = -\frac{x_{j_1}}{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{x_{l_1} - h/2}^{x_{l_1} + h/2} \frac{e^{i\omega \sqrt{x^2 + x_{j_1}^2 + z^2}}}{x^2 + x_{j_1}^2 + z^2} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + x_{j_1}^2 + z^2}} - i\omega \right) dx dz$$

soit

$$b_{j_1, j_2, l_1, 0} = \frac{x_{j_1}}{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{x_{l_1} - h/2}^{x_{l_1} + h/2} \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{e^{i\omega \sqrt{x^2 + x_{j_1}^2 + z^2}}}{\sqrt{x^2 + x_{j_1}^2 + z^2}} \right) dx dz \bullet$$

## 6.4 Etude de l'opérateur $\mathcal{T}$ dans le cas général

La solution de la loi de KIRCHOFF s'écrit :

$$u(t, x) = 2u^I(t, x) + \frac{1}{2\pi} \int_S \left( \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{1}{r} \right) u_r(t, y) - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \nu} \dot{u}_r(t, y) \right) dy$$

L'opérateur  $\mathcal{T}$  peut être défini par :

$$\mathcal{T}u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \left( \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{1}{r} \right) u_r(t, y) - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \nu} \dot{u}_r(t, y) \right) dy$$

soit par Transformée de Laplace-Fourier :

$$\widehat{\mathcal{T}}u(\omega, k) = \int_R \int_S e^{i(\omega t - kx)} \mathcal{T}u(t, x) dx dt$$

soit encore

$$\widehat{\mathcal{T}}u(\omega, k) = \int_R \int_S e^{i(\omega t - kx)} \frac{1}{2\pi} \int_S \left( \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{1}{r} \right) u_r(t, y) - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \nu} \dot{u}_r(t, y) \right) dy$$

soit en posant  $\tau = t - r$  et  $z = x - y$ ,

$$\widehat{\mathcal{T}}u(\omega, k) = \frac{1}{2\pi} \int_R \int_S \int_S e^{i(\omega\tau - kz)} e^{i\omega\|z\|} e^{-iky} \left( \frac{\partial}{\partial\nu} \left( \frac{1}{r} \right) u(\tau, y) - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial\nu} \dot{u}(\tau, y) \right) dy dz d\tau$$

Par intégration par partie:

$$\widehat{\mathcal{T}}u(\omega, k) = \frac{1}{2\pi} \int_R \int_S e^{i(\omega\tau - kz)} u(\tau, y) \left( \int_S e^{i\omega\|z\|} e^{-ik(x-y)} \left( \frac{\partial}{\partial\nu} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial\nu} i\omega \right) dx dy d\tau \right)$$

Posons alors:

$$\phi(y) = \frac{1}{2\pi} \int_S e^{i\omega\|x-y\|} e^{-ik(x-y)} \left( \frac{i\omega}{\|x-y\|} \frac{\partial}{\partial\nu} (\|x-y\|) - \frac{1}{\|x-y\|^2} \frac{\partial}{\partial\nu} (\|x-y\|) \right) dx$$

soit

$$\phi(y) = \frac{1}{2\pi} \int_S e^{-ik(x-y)} \left( \frac{1}{\|x-y\|} \frac{\partial}{\partial\nu} (e^{i\omega\|x-y\|}) + e^{i\omega\|x-y\|} \frac{\partial}{\partial\nu} \left( \frac{1}{\|x-y\|} \right) \right) dx$$

d'où

$$\phi(y) = \frac{1}{2\pi} \int_S e^{-ik(x-y)} \frac{\partial}{\partial\nu_x} \left( \frac{e^{i\omega\|x-y\|}}{\|x-y\|} \right) dx$$

**Théoreme 26** Dans le cas général, on a donc:

$$\widehat{\mathcal{T}}u(\omega, k) = \int_R \int_S e^{i(\omega\tau - kz)} \phi(y) u(\tau, y) dy d\tau \quad (6.71)$$

avec

$$\phi(y) = \frac{1}{2\pi} \int_S e^{-ik(x-y)} \frac{\partial}{\partial\nu} \left( \frac{e^{i\omega\|x-y\|}}{\|x-y\|} \right) dx \quad (6.72)$$

## 6.5 Etude de l'opérateur $\mathcal{T}$ dans le cas de la sphère

Choisissons la sphère de centre 0 et de rayon R. Posons  $r = \|x - y\|$ . Dans ce cas, il est facile de montrer que

$$\frac{\partial}{\partial\nu_x} \left( \frac{e^{i\omega r}}{r} \right) = \frac{1}{2R} \frac{e^{i\omega r}}{r} (i\omega r - 1)$$

Choisissons un repère tel que  $\vec{k} = \lambda \vec{K}$  où  $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  est un repère orthonormé avec  $\lambda > 0$ .

En coordonnées sphériques, on définit  $\vec{x} = R(\cos\phi \sin\theta \vec{I} + \sin\phi \sin\theta \vec{J} + \cos\theta \vec{K})$  et  $\vec{y} = R(\cos\alpha \sin\beta \vec{I} + \sin\alpha \sin\beta \vec{J} + \cos\beta \vec{K})$

On définit  $\cos\gamma = \cos\beta \cos\theta + \sin\beta \sin\theta \cos(\phi - \alpha)$  d'où

$$\|x - y\|^2 = 2R^2(1 - \cos \gamma)$$

On a alors d'après le chapitre précédent

$$\phi(\vec{y}) = \frac{1}{2\pi} \int_S e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \frac{e^{i\omega \|\vec{x} - \vec{y}\|}}{2R \|\vec{x} - \vec{y}\|} (1 - i\omega \|\vec{x} - \vec{y}\|) dx$$

On définit

$$\psi(y, \omega, k) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{e^{i\omega R \sqrt{2(1 - \cos \gamma)}}}{4\pi \sqrt{2(1 - \cos \gamma)}} e^{-i\lambda(\cos \theta - \cos \beta)} \sin \theta d\theta d\phi$$

On en déduit

$$\phi(y) = \psi(y, \omega, k) - i\omega \frac{\partial \psi}{\partial \omega}(y, \omega, k)$$

D'après les tables de [124]

$$\frac{e^{i\omega R \sqrt{2(1 - \cos \gamma)}}}{\sqrt{2(1 - \cos \gamma)}} = i \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)^2 J_{n+1/2}(\omega R) H_{n+1/2}^{(1)}(\omega R) P_n(\cos \gamma)$$

avec

$$P_n(\cos \gamma) = \sum_{m=0}^{+\infty} \epsilon_m \frac{(m-n)!}{(m+n)!} P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \beta) \cos[m(\phi - \alpha)]$$

d'où

$$\psi(y, \omega, k) = i \frac{\pi}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)^2 J_{n+1/2}(\omega R) H_{n+1/2}^{(1)}(\omega R) \int_0^\pi e^{-i\lambda(\cos \theta - \cos \beta)} P_n(\cos \theta) P_n(\cos \beta) \sin \theta d\theta$$

Soit

$$I_n = \int_0^\pi e^{-i\lambda \cos \theta} P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \int_{-1}^1 e^{-i\lambda t} P_n(t) dt$$

et comme

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n$$

alors

$$I_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{i\lambda}{2}\right)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma(n+1) \frac{J_{n+1/2}(\lambda)}{(\lambda/2)^{n+1/2}} = i^n \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} (J_{n+1/2}(\lambda))$$

d'où

$$\psi(y, \omega, k) = i \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)^2 i^n J_{n+1/2}(\omega R) H_{n+1/2}^{(1)}(\omega R) J_{n+1/2}(\lambda) \frac{e^{i\lambda \cos \beta}}{\sqrt{\lambda}} P_n(\cos \beta)$$

soit encore en posant :

$$K_{n+1/2}(z) = J_{n+1/2}(z) H_{n+1/2}^{(1)}(z) - z [J_{n+1/2}(z) H_{n+1/2}^{(1)}(z)]'$$

$$\phi(y, \omega, k) = i \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)^2 i^n K_{n+1/2}(\omega R) J_{n+1/2}(\lambda) \frac{e^{i\lambda \cos \beta}}{\sqrt{\lambda}} P_n(\cos \beta) \quad (6.73)$$

## 6.6 Etude d'une formulation variationnelle associée à un Potentiel retardé de simple couche

### 6.6.1 Première formulation

A la place de la formulation de KIRCHOFF, nous allons chercher une représentation de l'onde diffractée par un potentiel retardé de simple couche

$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\phi(t - \|x - y\|, y)}{\|x - y\|} d\sigma(y) \quad \forall t > 0, \forall x \in \Gamma \quad (6.74)$$

ce qui revient à associer au problème extérieur un problème intérieur de même donnée frontière  $g$  puis à prendre pour  $\phi$  le saut de  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  traversant  $\Gamma$  de  $\Omega$  à  $\Omega^c$ . La densité inconnue  $\phi$  sera solution de l'équation intégrale

$$g(t, x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\phi(t - \|x - y\|, y)}{\|x - y\|} d\sigma(y) \quad \forall t > 0, \forall x \in \Gamma \quad (6.75)$$

On peut définir l'opérateur

$$\mathcal{S}\phi(t, x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\phi(t - \|x - y\|, y)}{\|x - y\|} d\sigma(y) \quad \forall t > 0, \forall x \in \Gamma \quad (6.76)$$

auquel est associé la forme bilinéaire:

$$b_1(p, q)(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{\dot{p}(t - \|x - y\|, y) p(t, x)}{\|x - y\|} d\sigma(y) d\sigma(x) \quad (6.77)$$

puis

$$B_1(p, q)(t) = \int_0^t b_1(p, q)(s) ds \quad (6.78)$$

On peut alors considérer le problème suivant:

$$\mathcal{P}_1 \left\{ \begin{array}{l} \forall q \text{ tel que } \forall t > 0, q(t, \cdot) \in H^{-1/2}(\Gamma) \\ B_1(p, q)(t) = \int_0^t \int_{\Gamma} \dot{u}(s, x) q(s, x) d\sigma(x) ds \end{array} \right. \quad (6.79)$$

**Théoreme 27** *Le Problème  $\mathcal{P}_1$  admet une solution unique à chaque instant  $t > 0$ .*

Démonstration: cf. [54]

L'inconvénient de cette formulation variationnelle est de faire appel à la valeur de la dérivée. Aussi proposons nous une seconde formulation.

### 6.6.2 Seconde formulation

Soit  $u$  la solution du problème

$$\begin{cases} \square u = 0 \\ u(0, x) = \dot{u}(0, x) = 0 \\ u(t, x) = g_1(t, x) \forall x \in \Gamma, \forall t \in [0, T] \end{cases} \quad (6.80)$$

et  $v$  la solution du problème

$$\begin{cases} \square v = 0 \\ v(T, x) = \dot{v}(T, x) = 0 \\ v(t, x) = g_2(t, x) \forall x \in \Gamma, \forall t \in [0, T] \end{cases} \quad (6.81)$$

Posons alors  $p(t, x) = [\frac{\partial u}{\partial \nu}](t, x)$  et  $q(t, x) = [\frac{\partial v}{\partial \nu}](t, x)$ .

Il est donc évident que

$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{p(t - \|x - y\|, y)}{\|x - y\|} d\sigma(y) \quad (6.82)$$

et que

$$v(t, x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{q(t + \|x - y\|, y)}{\|x - y\|} d\sigma(y) \quad (6.83)$$

Il suffit pour cela de considérer  $w(t, x) = v(T - t, x)$  et ainsi le problème associé à  $w$ .

Démontrons qu' alors:

$$\int_0^T \int_{\Gamma} u(t, x) q(t, x) dt d\sigma(x) = \int_0^T \int_{\Gamma} v(t, x) p(t, x) dt d\sigma(x)$$

En effet soit

$$\begin{aligned} I &= \int_0^T \int_{\Gamma} (u(t, x) q(t, x) - v(t, x) p(t, x)) dt d\sigma(x) \\ &= \int_0^T \int_{R^3} (u(t, x) \Delta v(t, x) - v(t, x) \Delta u(t, x)) dt dx \\ &= \int_0^T \int_{R^3} (u(t, x) \ddot{v}(t, x) - v(t, x) \ddot{u}(t, x)) dt dx \end{aligned}$$

En utilisant

$$u\ddot{v} - v\ddot{u} = \frac{\partial}{\partial t} (u\dot{v} - v\dot{u})$$

on en déduit

$$I = \int_{R^3} [(u\dot{v} - v\dot{u})(T, x) - (u\dot{v} - v\dot{u})(0, x)] dx$$

soit d'après les données initiales  $I = 0$

d'où

$$\int_0^T \int_{\Gamma} u(t, x) q(t, x) dt d\sigma(x) = \int_0^T \int_{\Gamma} v(t, x) p(t, x) dt d\sigma(x)$$

soit encore

$$\int_0^T \int_{\Gamma} u(t, x) q(t, x) dt d\sigma(x) = \int_0^T \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{p(t, x) q(t + \|x - y\|, y)}{\|x - y\|} d\sigma(y) d\sigma(x) dt$$

Posons alors  $r(t, x) = q(T - t, x)$  ou encore  $q(t, x) = r(T - t, x)$ , on en déduit:

$$\int_0^T \int_{\Gamma} u(t, x) r(T - t, x) dt d\sigma(x) = \int_0^T \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{p(t, x) r(T - t - \|x - y\|, y)}{\|x - y\|} d\sigma(y) d\sigma(x) dt$$

Ce calcul formel peut être étendu sous la seule condition que

$$\forall t \in [0, T], r(t, \cdot) \in H^{-1/2}(\Gamma)$$

Soit alors

$$B_2(p, q)(t) = \int_0^t \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{p(s, x) q(t - s - \|x - y\|, y)}{\|x - y\|} d\sigma(y) d\sigma(x) ds \quad (6.84)$$

On peut alors considérer le problème suivant:

$$\mathcal{P}_2 \begin{cases} \forall q \text{ tel que } \forall t > 0, q(t, \cdot) \in H^{-1/2}(\Gamma) \\ B_2(p, q)(t) = \int_0^t \int_{\Gamma} u(s, x) q(t - s, x) d\sigma(x) ds \end{cases} \quad (6.85)$$

**Théorème 28** *Le Problème  $\mathcal{P}_2$  admet une solution unique à chaque instant  $t > 0$ .*

Démonstration: cf. [54]

### 6.6.3 Troisième formulation

Pour cela, nous allons utiliser une propriété de la Transformation de Laplace à savoir :

$$\int_0^{+\infty} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) d\xi = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{f(t)g(s)}{t+s} ds dt$$

si les deux intégrales ont un sens. Soit

$$\int_0^{+\infty} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) d\xi = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \left( \int_0^t f(s) g(t-s) ds \right) dt$$

On introduit donc la troisième forme bilinéaire

$$B_3(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{s} B_2(p, q)(s) ds \quad (6.86)$$

La bilinéarité est conservée et il est immédiat que

$$B_3(p, p) = \int_{R^3} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\dot{u}(t, x) \dot{u}(s, x)}{t+s} + \int_{R^3} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\nabla u(t, x) \nabla u(s, x)}{t+s}$$

On en déduit aisément

$$B_3(p, p) \geq \int_{R^3} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\dot{u}(t, x) \dot{u}(s, x)}{t+s} + \int_{R^3} \int_0^{+\infty} \int_{R^3} |\nabla \hat{u}(\xi, x)|^2 dx d\xi$$

soit encore

$$B_3(p, p) \geq C \int_0^{+\infty} \int_{\Gamma} |\hat{p}(\xi, x)|^2 d\xi dx = C \int_{\Gamma} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{p(t, x) p(s, x)}{t+s} dt ds dx$$

formule qui a un sens dès que  $p(t, \cdot) \in L^2(\Gamma)$  d'où par extension à  $H^{-1/2}(\Gamma)$ .  
On peut alors définir le problème suivant:

$$\mathcal{P}_3 \left\{ \begin{array}{l} \forall q \text{ tel que } \forall t > 0, q(t, \cdot) \in H^{-1/2}(\Gamma) \\ B_3(p, q) = \int_0^{+\infty} \int_{\Gamma} \frac{u(s, x) q(t, x)}{t+s} ds dt d\sigma(x) \end{array} \right. \quad (6.87)$$

On en déduit le théorème:

**Théorème 29** *Le problème  $\mathcal{P}_3$  admet une solution unique.*

Démonstration: Elle repose sur le théorème ci dessous.

#### 6.6.4 Annexe: Estimations $L^\infty$

Soit

$$\mathcal{C}([0, T]) \text{ l'ensemble des fonctions continues sur } [0, T] \quad (6.88)$$

où  $T$  est un réel positif

Soit si  $M$  est un réel positif

$$A_M = [f \in \mathcal{C}([0, T]) / \sup_{(x, y) \in [0, T] \times [0, T], x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq M] \quad (6.89)$$

**Théoreme 30** Il existe une constante  $C(T)$  telle que  $\forall f \in A_M$

$$\sup_t |f * f(t)| \geq C(T) \sup_t |f(t)|^2 \quad (6.90)$$

Démonstration: cf. [54]

## 6.7 Cas général et étude de la discrétisation

Soit le problème de propagation des ondes:

$$\mathcal{P} \begin{cases} \square u \equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) u = f \\ u(0, x) = u_0(x) \text{ pour } x \in \Omega \\ u_t(0, x) = u_1(x) \text{ pour } x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(t, x) = 0 \text{ pour } x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (6.91)$$

où:  $c$  est la vitesse du son du fluide,  $f$  la source externe et  $u_0, u_1$  les conditions initiales dans le milieu fluide. On supposera qu'elles ont pour support respectif  $\Omega_+ \times R_+$  et  $\Omega_+$ .

$\nu$  le vecteur unitaire normal sortant de  $\Gamma$ , orienté de  $\Omega_-$  vers  $\Omega_+$ .

On notera aussi  $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$  et  $u_\nu = \frac{\partial u}{\partial \nu}$

L'onde incidente  $u^I$  est l'onde créée dans tout l'espace par la source  $f$  (qui est au repos à l'instant initial  $t = 0$ ) s'il n'y a pas d'obstacle sur  $\Gamma$ .

On peut donc noter en posant  $u^s = u - u^I$ , le problème  $\mathcal{P}^s$  associé à  $\mathcal{P}$ .

$$\mathcal{P}^s \begin{cases} \square u^s = 0 \\ u^s(0, x) = \dot{u}^s(0, x) \text{ pour } x \in \Omega \\ \frac{\partial u^s}{\partial \nu}(t, x) = -\frac{\partial u^I}{\partial \nu} \text{ pour } x \in R^+ \times \partial\Omega \end{cases} \quad (6.92)$$

Cette dernière équation suppose  $\partial_\nu u^I$  bien défini sur  $R^+ \otimes \partial\Omega$ .

On peut donner une représentation (dite représentation de KIRCHOFF) pour la solution  $u^s$  vérifiant (6.90)

$$u^s = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left( \partial_\nu \left( \frac{1}{r} \right) u^s(t-r, y) - \frac{1}{r} \partial_\nu(r) \dot{u}^s(t-r, y) \right) dy - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{r} \partial_\nu u^s(t-r, y) dy \quad (6.93)$$

Cette formule est valable pour tout  $t$  pour  $x \in \Omega$ , en ayant posé,  $r = x - y$ ,  $x \in \Omega_+$ ,  $y \in \Gamma = \partial\Omega$ . On peut trouver, par exemple, cette formule dans [148].

A partir de ces relations, on a donc:

$$u(t, x) = u^I(t, x) + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left( \partial_\nu \left( \frac{1}{r} \right) u_r - \frac{1}{r} \partial_\nu(r) u_r - \frac{1}{r} (\partial_\nu u)_r \right) dy \quad (6.94)$$

Par propriété de l'onde incidente, le dernier terme dans l'intégrale disparaît, et donc: Pour  $t \in R$ ,  $x \in \Omega$

$$u(t, x) = u^I(t, x) + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left( \partial_\nu \left( \frac{1}{r} \right) u_r - \frac{1}{r} \partial_\nu(r) u_r \right) dy \quad (6.95)$$

Cette formule de représentation permet de calculer  $u$  dans  $R_0 \times \Omega$  si l'on connaît sa trace sur  $R \times \partial\Omega$ . L'intégrale de second membre de (6.xx) est un potentiel retardé de double couche. Sa trace, notée  $\phi$  est bien connue aussi et l'on a l'équation suivante:

$$\forall x \in \partial\Omega \quad \frac{1}{2} \phi(t, x) - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left( \left( \partial_\nu \left( \frac{1}{r} \right) \phi_r - \frac{1}{r} \partial_\nu(r) \dot{\phi}_r \right) dy \right) = u^I(t, x) \quad (6.96)$$

### 6.7.1 Relation énergétique

Notons  $A\phi$  la partie gauche de (6.96) vérifiant

$$A\phi = -v_- \quad (6.97)$$

avec

$$v(x, t) = M\phi(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left( \left( \partial_\nu \left( \frac{1}{r} \right) \phi_r - \frac{1}{r} \partial_\nu(r) \dot{\phi}_r \right) dy \right) \quad (6.98)$$

et

$$v_+(x, t) - v_-(x, t) = \phi(x, t) \quad (6.99)$$

Soit alors

$$E_\pm(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\pm} [|\nabla v(x, t)|^2 + |\dot{v}(x, t)|^2] dx \quad (6.100)$$

où  $v$  est le potentiel retardé défini par l'équation (6.97).

On peut montrer aisément que

$$\frac{\partial E_\pm}{\partial t} = \mp \int_\Gamma \frac{\partial v_\pm}{\partial \nu} \dot{v}_\pm d\sigma$$

où

$$E_-(t) = - \int_0^t \int_\Gamma A\dot{\phi}(x, s) D\phi(x, s) d\sigma(x) ds$$

$$E_+(t) = - \int_0^t \int_{\Gamma} (A\dot{\phi}(x, s) + \dot{\phi}(x, s)D\phi(x, s))d\sigma(x)ds$$

On en déduit par intégration par partie

$$\int_0^t E_-(s)ds = \int_0^t \int_{\Gamma} (A\phi(x, s))[(t-s)D\dot{\phi}(x, s) - D\phi(x, s)]d\sigma(x)ds$$

A partir de ces notations, on en déduit le problème à résoudre :

$$\text{Trouver } \phi \text{ tel que } \int_0^t \int_{\Gamma} A\phi\psi d\sigma(x)ds = \int_0^t \int_{\Gamma} U^I \psi d\sigma(x)ds \quad \forall \psi \in V \quad (6.101)$$

où  $V$  est un espace assez gros pour contenir les fonctions

$$\psi_t(x, s) = (t-s)D\dot{\phi}(x, s) - D\phi(x, s), 0 < s < t$$

### 6.7.2 Discrétisation

A partir d'une discrétisation de la frontière  $\Gamma$  en  $N$  éléments  $(T_i)_{1 \leq i \leq N}$  et un découpage régulier du pas de temps  $t_m = m\Delta t$ ,  $m = 0, 1, \dots$ , on définit une approximation en supposant que l'espace  $V$  est approximé par les fonctions constantes par morceaux, cet espace est noté  $V_h$ . Une base est constituée par les fonctions caractéristiques  $\alpha_j(t)\beta^k(x)$  où  $\alpha_j$  (respectivement  $\beta^k$ ) est la fonction caractéristique de l'intervalle  $(t_j, t_{j+1})$  (respectivement  $T_k$ ).

L'approximation de type GALERKIN de cette méthode s'écrit :

$$\int_{t_m}^{t_{m+1}} \int_{\Gamma} A\phi_h \alpha_m(s)\beta^l(x)d\sigma(x)ds = \int_{t_m}^{t_{m+1}} \int_{\Gamma} U^I \alpha_m(s)\beta^l d\sigma(x)ds \quad \forall m > 0, 1 \leq l \leq N$$

On peut montrer que cette méthode ( cf. ) se ramène au calcul des vecteurs  $F^j = (f_k^j)_{1 \leq k \leq N}$  qui représente la valeur de  $\phi_h$  sur l'élément  $\Gamma_k$  au temps  $t_j$ . Cette méthode est un processus incrémental en temps où si on pose

$$L_l^m = \sum_{\substack{j \geq 0 \\ 1 \leq k \leq N}} f_k^j \left[ \frac{1}{2} \int_{t_m}^{t_{m+1}} \alpha_j(t)\alpha_m(t)dt \int_{\Gamma} \beta^k(x)\beta^l(x)d\sigma(x) - \right.$$

$$\left. \frac{1}{4\pi} \int_{t_m}^{t_{m+1}} \alpha_m(t)dt \int_{\Gamma} \beta^2 \int_{\Gamma} \beta^k(y) \left( (\partial_\nu \left( \frac{1}{r} \right) \alpha_{j_r} - \frac{1}{r} \partial_\nu(r) \alpha_{j_r} ) d\sigma(y) d\sigma(x) dt \right] \right.$$

ce qui s'écrit matriciellement

$$L_l^m = \sum_{\substack{j \geq 0 \\ 1 \leq k \leq N}} (I^{m-j} F^j)_l \quad (6.102)$$

avec les matrices d'influence données par

$$I_{lk}^{m-j} = \frac{1}{2} \Delta t \sigma(T_l) \delta_{lk} \delta_{mj} - \frac{1}{4\pi} \int_0^{\delta t} dt \int_{T_l} d\sigma(x) \int_{T_k} \left( (\partial_\nu \left( \frac{1}{r} \right) \alpha_{0r} - \frac{1}{r} \partial_\nu(r) \alpha_{0r}) d\sigma(y) \right) \quad (6.103)$$

où  $\sigma(T_l)$  désigne l'aire de  $T_l$ .

Ce calcul assez complexe (cf. [38]) utilise des dérivées de fonctions discontinues et doit être analytique. Sous réserve d'une condition de type C.F.L., alors la matrice  $I^0$  est diagonale et le processus s'écrit

$$F^m = \sum_{j=0}^{m-j} B^{m-j} F^j + G^m \quad (6.104)$$

où

$$B^{m-j} = -(I^0)^{-1} I^{m-j} \quad (6.105)$$

et

$$G^m = (I^0)^{-1} G_0^m \quad (6.106)$$

avec

$$G_0^m = \int_{t_m}^{t_{m+1}} \int_{\Gamma} U^I \alpha_m \beta^0 d\sigma ds$$

Cette méthode a été implémentée en 3D et permet de conserver le caractère convolutif en temps. (cf. [38]) •

## Chapitre 7

# Etude de problèmes hyperboliques dégénérés et Application à la Physique des Plasmas

### 7.1 Introduction

Dans cette partie, les démonstrations ne seront pas données afin de réduire quelque peu la longueur du document. Cette étude est consacrée aux Problèmes Hyperboliques Dégénérés qui sont apparus pour la première fois dans le cadre d'études pour la Mécanique des Fluides. Si, en effet, on s'intéresse aux lois d'évolution de Fluides Isentropiques, ces derniers sont régis par les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0. \\ \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u} + P) = 0. \end{array} \right. \quad (7.1)$$

A cette équation, il convient d'ajouter l'équation d'état isentropique

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\rho^\gamma}{\rho_0^\gamma} \quad (7.2)$$

Il est bien connu que ce modèle (appelé P-système) admet deux vitesses de propagation toujours distinctes  $u+c$  et  $u-c$  qui caractérisent les informations

permettant de construire la solution à l'instant  $t$  en fonction des données initiales.

Dans cette égalité, la vitesse du son  $c$  est définie par :

$$c^2 = P'(\rho) \quad (7.3)$$

Il peut paraître judicieux et cela a même été développé dans des codes industriels (comme N3S) pour traiter ce système de traiter à chaque instant le problème précédent par "splitting" les deux problèmes :

- le premier associé à l'acoustique linéaire
- le second associé à la convection

Il est bien évident que le système lié à l'acoustique (linéaire) est connu. Dans le cadre mono dimensionnel, par exemple,

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0. \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (7.4)$$

Ce système admet deux vitesses de propagation distinctes  $+c$  et  $-c$  et donc permet aisément de connaître la solution en fonction des données initiales. Reste donc la connaissance du système (en 1D):

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0. \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (7.5)$$

Ce système relève de la nature des problèmes hyperboliques non linéaires dégénérés. Il se trouve que différents problèmes relevant de l'hyperbolique non linéaire dégénéré peuvent être rencontrés. Tous ces problèmes sont issus des lois de conservation.

## 7.2 Exemples

### 7.2.1 Mécanique des Fluides sans pression

On considère dans ce cadre les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement en supposant que la Pression joue un rôle négligeable ou (cf §1) que dans une opération de "splitting", la pression est résolue dans une autre étape. Cette approche est étudiée par de nombreux auteurs (citons par exemple [10],[15]). Le cas où la pression est un terme important relève des Equations d' Euler, thème qui a fait l'objet de nombreuses contributions dont

une synthèse peut être trouvée dans [72]. Cette méthode conduit donc à découpler densité et pression sans faire intervenir de loi d'état. On est donc conduit à étudier le système qui sera noté par la suite ( S1). Soient  $x$  la coordonnée spatiale et  $t$  la coordonnée temporelle .

Définissons par  $\rho$  la densité du fluide et par  $u$  sa vitesse .

Le système S1 à résoudre s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0. \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} = 0. \end{array} \right. \quad (7.6)$$

Ce problème servira de modèle à l'étude des Problèmes Hyperboliques Dégénérés et entrera dans le cadre de tous les systèmes suivants.

### 7.2.2 Evolution d'une population ionique sans électrons

On considère désormais une population électronique qui subit les effets de courants Electrique et Magnétique. Un tel plasma est régi par les lois de MAXWELL et dans une approche Mécanique des Milieux Continus ( si on souhaite dans un premier temps supposer que l'écoulement est suffisamment dense pour ne pas être modélisé par l'équation de BOLTZMANN ) par la loi fondamentale de la Mécanique.

On définit par

$\vec{E}$  le champ électrique,  $\vec{B}$  le champ magnétique,  $\vec{v}$  le champ de vitesse,  $n$  la densité du fluide,  $\vec{x}$  la coordonnée spatiale et  $t$  la coordonnée temporelle .

Les équations régissant le mouvement forment le système S2 qui s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1./c^2) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \text{rot} \vec{B} = -\mu_0 n e \vec{v} \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot} \vec{E} = 0. \\ \text{div}(\vec{B}) = 0. \\ \text{div}(\epsilon_0 \vec{E}) = en \\ \frac{\partial(n \vec{v})}{\partial t} + \vec{\nabla}(n \vec{v} \otimes \vec{v}) = (\frac{e}{M})n(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \end{array} \right. \quad (7.7)$$

où  $\epsilon_0$  désigne la permittivité relative électrique du milieu

$\mu_0$  désigne la permittivité relative magnétique du milieu et

$c$  désigne la vitesse de la lumière .

Ces quantités sont reliées par la relation célèbre :

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1. \quad (7.8)$$

Rappel :

On rappelle que dans les unités M.K.S.A. les valeurs respectives sont  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C/m V}$ ,  $\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6} \text{ T m /A}$  et  $c$  vaut  $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ .

Ce problème ainsi exprimé n'est pas présenté en terme de lois de conservation. Il est par ailleurs bien connu que les équations de MAXWELL contiennent la loi de conservation de la masse. En effet, la première équation de (7.7) dont on prend la divergence et la quatrième équation de (7.7) dont on prend la dérivée temporelle conduisent à l'équation :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(n \vec{u}) = 0. \quad (7.9)$$

Pour ce faire, il faut utiliser l'égalité  $\text{div}(\text{rot} \vec{B}) = 0$ .

Afin d'étudier ce système, on se restreindra dans cette étude au cas où le champ magnétique est identiquement nul. Ceci a une conséquence importante : dans le cas où champs électrique et magnétique cohabitent, on sait que le système des équations de MAXWELL est invariant par changement de repère relativiste et non galiléen.

Cela pose le problème de l'invariance du système formé par le couplage des équations de MAXWELL et de la loi fondamentale de la Mécanique qui peut donc conduire à devoir se poser la question de la validité de ces équations et du remplacement éventuel des lois de la Mécanique classique par la loi de BOLTZMANN. Lorsque on se limite à la prise en compte du champ électrique, il est aisé de vérifier que le système est alors invariant par changement de repère galiléen. En outre la troisième équation de (7.7) conduit si  $\vec{B} = \vec{0}$  à l'existence d'un potentiel  $\phi$  tel que

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi \quad (7.10)$$

Cela conduit à un système simplifié qui a comme inconnues le potentiel, la densité ionique, la vitesse des ions qui s'exprime ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} = -\frac{e}{\epsilon_0} n \vec{u} \\ \text{div}(\epsilon_0 \vec{\nabla} \phi) = en \\ \frac{\partial (n \vec{u})}{\partial t} + \vec{\nabla} (n \vec{u} \otimes \vec{u}) = \frac{e}{M} n \vec{\nabla} \phi \end{array} \right. \quad (7.11)$$

Ce nouveau système est plus simple à résoudre car contenant un nombre réduit d'inconnues.

### 7.3 Evolution d'un plasma formé d'ions et d'électrons

On considère désormais un plasma qui subit les effets de courants Electrique et Magnétique. Un tel plasma est régi par les lois de MAXWELL et dans une approche Mécanique des Milieux Continus. Si on souhaite dans un premier temps supposer que l'écoulement est suffisamment dense pour ne pas être modélisé par l'équation de BOLTZMANN, la loi fondamentale de la Mécanique est utilisée . On définit par  $\vec{E}$  le champ électrique,  $\vec{B}$  le champ magnétique,  $\vec{u}_e$  le champ de vitesse des électrons,  $\vec{u}_i$  le champ de vitesse des ions,  $\rho_e$  la masse volumique des électrons,  $\rho_i$  la masse volumique des ions,  $n_e$  la densité des électrons,  $n_i$  la densité des ions,  $\vec{x}$  la coordonnée spatiale et  $t$  la coordonnée temporelle.

Soient alors:

$m$  la masse élémentaire de l'électron ,

$M$  la masse élémentaire de l'ion ,

$e$  la charge élémentaire .

Rappel : On rappelle que  $m$  vaut  $9.11 \cdot 10^{-31}$  kg ,  $M$  vaut  $1.67 \cdot 10^{-27}$  kg et  $e$  vaut  $1.61 \cdot 10^{-19}$  C.

Il est évident que l'on a les relations suivantes:

$$\rho_e = mn_e \text{ et } \rho_i = Mn_i \quad (7.12)$$

Les équations régissant le mouvement s'écrivent donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - c^2 \text{rot}(\vec{B}) = \frac{e}{\epsilon_0} (n_e \vec{u}_e - n_i \vec{u}_i) \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{E}) = 0. \\ \text{div}(\vec{B}) = 0. \\ \text{div}(\epsilon_0 \vec{E}) = e(n_i - n_e) \\ \frac{\partial(n_e \vec{u}_e)}{\partial t} + \vec{\nabla}(n_e \vec{u}_e \otimes \vec{u}_e) = -\left(\frac{e}{m}\right)n_e(\vec{E} + \vec{u}_e \wedge \vec{B}) \\ \frac{\partial(n_i \vec{u}_i)}{\partial t} + \vec{\nabla}(n_i \vec{u}_i \otimes \vec{u}_i) = \left(\frac{e}{M}\right)n_i(\vec{E} + \vec{u}_i \wedge \vec{B}) \end{array} \right. \quad (7.13)$$

Ce système conduit si on définit par  $\rho$  la masse volumique du fluide et par  $\vec{u}$  la vitesse moyenne

$$\rho = \rho_e + \rho_i$$

et

$$\rho \vec{u} = \rho_e \vec{u}_e + \rho_i \vec{u}_i$$

soit

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \vec{\nabla}(mn_e \vec{u}_e \otimes \vec{u}_e) + \vec{\nabla}(Mn_i \vec{u}_i \otimes \vec{u}_i) = e(n_i - n_e) \vec{E} + e(n_i \vec{u}_i - n_e \vec{u}_e) \wedge \vec{B} \quad (7.14)$$

Dans ce type d'approche, on suppose donc qu'il n'y a pas d'interaction mécanique et que les termes liés à la pression sont négligeables. De plus, il est évident que si pour des raisons de rapport de masse, on suppose que les électrons restent immobiles, ceci représente une solution du problème qui vérifie un système assez proche du système S2.

Dans ce système S3, on peut donc chercher

- le champ électrique,
- le champ magnétique,
- la densité des ions,
- la vitesse des ions,

en considérant que la densité des électrons est stationnaire et la vitesse des électrons est nulle en temps et espace.

Si on suppose de plus que le champ magnétique est nul, le système S3 est invariant par changement de repère galiléen. En outre la troisième équation de (7.13) conduit si  $\vec{B} = \vec{0}$  à l'existence d'un potentiel  $\phi$  tel que

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad (7.15)$$

Cela conduit à un système simplifié qui a comme inconnues le potentiel, la densité ions, la vitesse des ions qui s'exprime ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{\nabla}\phi}{\partial t} = -\frac{e}{\epsilon_0} n_i \vec{u}_i \\ \text{div}(\epsilon_0 \vec{\nabla}\phi) = e(n_i - n_e) \\ \frac{\partial(\rho \vec{u}_i)}{\partial t} + \vec{\nabla}(Mn_i \vec{u}_i \otimes \vec{u}_i) = e(n_i - n_e) \vec{E} \end{array} \right. \quad (7.16)$$

Ce nouveau système (S4) est plus simple à résoudre car il contient un nombre réduit d'inconnues. Dans le cas monodimensionnel, on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{e}{\varepsilon_0} n_i u_i \\ \frac{\partial(\varepsilon_0 E)}{\partial x} = e(n_i - n_e) \\ \frac{\partial(M n_i u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(M n_i u_i^2)}{\partial x} = e(n_i - n_e) E \end{array} \right. \quad (7.17)$$

En effet les électrons étant immobiles, la vitesse des électrons est nulle, ce cas conduit au système conservatif suivant (S5)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{e}{\varepsilon_0} n_i u_i \\ \frac{\partial(\varepsilon_0 E)}{\partial x} = e(n_i - n_e) \\ \frac{\partial(n_i u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(n_i u_i^2 - \frac{\varepsilon_0}{2M} E^2)}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (7.18)$$

#### 7.4 Etude de problèmes hyperboliques non linéaires dégénérés en mono dimensionnel

On considère un système de la forme:

$$\frac{\partial(U)}{\partial t} + A(U) \frac{\partial(U)}{\partial x} = 0. \quad (7.19)$$

Pour les Problèmes Hyperboliques, la matrice  $A(U)$  a ses valeurs propres toutes réelles et toutes distinctes  $\lambda_i(U)$ . Les vecteurs propres associés  $r_i(U)$  engendrent tout l'espace. Une classification est opérée entre les valeurs propres vraiment non linéaires qui vérifient

$$\vec{r}_i(U) \vec{\nabla}_U (\lambda_i(U)) \neq 0 \quad (7.20)$$

et celles linéairement dégénérées telles que

$$\vec{r}_i(U) \vec{\nabla}_U (\lambda_i(U)) = 0. \quad (7.21)$$

De la même manière, l'étude des invariants de Riemann peut être conduite. Ces derniers sont définis comme étant les scalaires  $\varphi(U)$  tels que

$$\vec{r}_i(U) \vec{\nabla}_U (\varphi) = 0. \quad (7.22)$$

Il est aussi utile d'étudier les courbes de choc définies par les relations de RAN-KINE -HUGONIOT dans le cadre conservatif. Dans le cas non conservatif, la théorie plus embryonnaire fait appel aux chemins entropiques qui ne sont pas toujours aisés à mettre en évidence. Le passage par les chemins visqueux va nous permettre de lever cette difficulté.

Considérons dans le cas le plus simple un système 2x2 tel que, pour  $u_1$  et  $u_2$  inconnues du problème:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(U)}{\partial t} + A(U) \frac{\partial(U)}{\partial x} = 0. \\ \text{avec } U = (u_1, u_2)^t \\ \text{et } A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (7.23)$$

Ce système n'est pas diagonalisable et admet une valeur propre double  $\lambda$  supposée constante. Utilisons le changement de variable défini par :  $y = x - \lambda t$  et  $t = t$ , et soient :

$$u_1(x, 0) = u_1^0(x) \text{ et } u_2(x, 0) = u_2^0(x) \quad (7.24)$$

En résolvant tout d'abord la deuxième équation puis la première,

$$u_2(x, t) = u_2^0(x - \lambda t) \quad (7.25)$$

et donc

$$u_1(x, t) = u_1^0(x - \lambda t) - t(u_2^0)'(x - \lambda t) \quad (7.26)$$

Il est aisé donc de trouver que un exemple où  $u_2$  est une fonction tandis que  $u_1$  est une solution mesure. Pour cela, on peut considérer comme données initiales un problème de Riemann où

$$u_1^0 = \begin{cases} u_1^L & \text{si } x < 0 \\ u_1^R & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (7.27)$$

$$u_2^0 = \begin{cases} u_2^L & \text{si } x < 0 \\ u_2^R & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (7.28)$$

**Proposition 52** Dans le cas d'un système 2x2 hyperbolique dégénéré, la solution du problème est une solution mesure.

Démonstration:

Il suffit de reprendre le calcul précédent appliqué aux données initiales d'un problème de Riemann. Dans ce cas la solution obtenue vaut

$$u_2(x, t) = u_2^L + (u_2^R - u_2^L)Y(x - \lambda t) \quad (7.29)$$

et donc

$$u_1(x, t) = u_1^L + (u_1^R - u_1^L)Y(x - \lambda t) + t(u_2^L - u_2^R)\delta(x - \lambda t). \quad (7.30)$$

où  $Y$  désigne la fonction de Heaviside •

## 7.5 Etude du problème sans pression

### 7.5.1 Position du problème de Riemann

Ce chapitre va être consacré au problème conduisant au système S1 défini précédemment dont les inconnues sont la masse volumique et la vitesse. Définissons par  $\rho$  la masse volumique du fluide et par  $u$  sa vitesse.

Le système S1 à résoudre s'écrit:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0. \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (7.31)$$

**Proposition 53** *Le système (S1) admet une valeur propre double, la vitesse, associée à un unique vecteur propre. Ce champ est linéairement dégénéré. En outre les entropies du système sont de la forme :*

$$\frac{\partial(\rho f_1(u) + f_2(u))}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u f_1(u) + F_2(u))}{\partial x} = 0. \text{ où } (F_2)'(u) = f_2(u) \quad (7.32)$$

Démonstration: il est aisé de vérifier que les quantités proposées sont des entropies. par la recherche systématique de toutes les entropies, on obtient que ce sont les seules ( cf [55]).

Le système dans les zones régulières se ramène au système

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0. \\ \frac{\partial(u)}{\partial t} + u \frac{\partial(u)}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Il est alors évident que  $u$  est valeur propre double et que le système n'est pas diagonalisable. Le vecteur propre dans ce système s'écrit:  $\vec{r} = (1, 0)^t$ . Dans ce cas,  $\vec{r} \cdot \vec{\nabla}(u) = 0$ . Pour la calcul des entropies, un simple calcul permet de vérifier l'équation proposée •

On s'intéressera dans ce chapitre à un type particulier de données, celles issues du problème de Riemann

$$\rho = \begin{cases} \rho^L & \text{si } x < 0 \\ \rho^R & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (7.33)$$

$$u = \begin{cases} u^L & \text{si } x < 0 \\ u^R & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (7.34)$$

Il va être aisé de construire la solution pour  $u^L < u^R$  mais on verra que le cas inverse conduit à certaines difficultés à lever.

**Proposition 54** Dans le cas où  $u^L < u^R$ , la solution du problème vaut :

$$\rho = \begin{cases} \rho^L & \text{si } x < u^L t \\ \rho^R & \text{si } x > u^R t \\ 0. & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (7.35)$$

$$u = \begin{cases} u^L & \text{si } x < u^L t \\ u^R & \text{si } x > u^R t \\ x/t & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (7.36)$$

**Proposition 55** La solution du système (7.31) est aussi solution du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0. \\ \frac{\partial u}{\partial t} + 1/2 \frac{\partial(u^2)}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (7.37)$$

C'est la solution Lagrangienne.

Si on revient au problème de Riemann, on ne peut appliquer cette méthode au cas  $u^L > u^R$ . Les chemins visqueux vont permettre de lever cette difficulté.

### 7.5.2 Étude du problème visqueux

Dans cette section, on s'intéresse toujours au système (S1) associé aux données particulières. Dans la section précédente, si  $u^L < u^R$ , la solution Lagrangienne permet de résoudre le problème et vérifie en même temps les relations de choc.

Le cas  $u^L = u^R = v_0$  est trivial. La solution est

$$u(x, t) = u(x, 0) = v_0 \text{ et donc } \rho(x, t) = \rho(x - v_0 t, 0) \quad (7.38)$$

Reste donc à traiter le cas  $u^L > u^R$ . Pour cela, on va s'appuyer sur la théorie des chemins visqueux qui a déjà été employée avec succès dans le cadre d'

écoulements diphasiques ( cf. [138] ). Si on se réfère aux lois physiques de conservation, le système visqueux s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0. \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \end{array} \right. \quad (7.39)$$

La théorie des " travelling waves " consiste à chercher des solutions en  $(x, t)$  dépendant de la seule variable  $y = x - \sigma t$ .

**Théorème 31** Dans le cas où  $u^L > u^R$ , la solution du problème visqueux s'écrit :

$$u = \begin{cases} u^L - (u^L - u^M) \exp((C_L y)/\nu) & \text{si } x < u^M t \\ u^R - (u^R - u^M) \exp((C_R y)/\nu) & \text{si } x > u^M t \\ 0 & \text{si } x = u^M t \end{cases} \quad (7.40)$$

$$\rho = \begin{cases} C_L/(u - u^M) & \text{si } x < u^M t \\ C_R/(u - u^M) & \text{si } x > u^M t \\ kt\delta(x - u^M t) & \text{si } x = u^M t \end{cases} \quad (7.41)$$

Cette solution correspond aux données initiales suivantes:

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u^L(1 - \exp((C_L x)/\nu)) & \text{si } x < 0 \\ u^R(1 - \exp((C_R x)/\nu)) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (7.42)$$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x) = \begin{cases} C_L/u_0(x) & \text{si } x < 0 \\ C_R/u_0(x) & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (7.43)$$

$$\text{avec } u^M = \frac{\sqrt{\rho^R} u^R + \sqrt{\rho^L} u^L}{\sqrt{\rho^R} + \sqrt{\rho^L}}, \quad C_L = \frac{\rho^L \sqrt{\rho^R} (u^L - u^R)}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}} > 0, \quad C_R = \frac{\rho^R \sqrt{\rho^L} (u^R - u^L)}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}} < 0 \quad (7.44)$$

$$k = \sqrt{\rho^L \rho^R} (u^L - u^R) > 0 \text{ et } y = x - u^M t \quad (7.45)$$

On peut aussi étudier le système visqueux pour  $u^L < u^R$ .

**Théoreme 32** Dans le cas où  $u^L < u^R$ , la solution du problème visqueux s'écrit :

$$u = \begin{cases} u^L & \text{si } x < u^L t \\ u^R & \text{si } x > u^R t \\ x/t & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (7.46)$$

$$\rho = \begin{cases} \rho^L & \text{si } x < u^L t \\ \rho^R & \text{si } x > u^R t \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (7.47)$$

Cette solution est associée aux données initiales suivantes :

$$u = \begin{cases} u^L & \text{si } x < 0 \\ u^R & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (7.48)$$

$$\rho = \begin{cases} \rho^L & \text{si } x < 0 \\ \rho^R & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (7.49)$$

### 7.5.3 Solution limite du problème de Riemann

Dans cette partie, on considère le système S1 non visqueux mais interprété comme limite du système visqueux précédemment étudié.

Il est à noter que pour un autre type de viscosité, rien ne dit que même si le système S1 est aussi limite du système envisagé, la solution limite soit identique. On reviendra sur ce point à la fin du chapitre. En fonction des résultats obtenus dans le dernier chapitre, la solution va être calculée.

**Théoreme 33** Dans le cas où  $u^L > u^R$ , la solution du problème limite du problème visqueux s'écrit :

$$u = \begin{cases} u^L & \text{si } x < u^M t \\ u^R & \text{si } x > u^M t \\ u^M & \text{si } x = u^M t \end{cases} \quad (7.50)$$

$$\rho = \begin{cases} \rho^L & \text{si } x < u^M t \\ \rho^R & \text{si } x > u^M t \\ kt\delta(x - u^M t) & \text{si } x = u^M t \end{cases} \quad (7.51)$$

associée aux données initiales :

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u^L & \text{si } x < 0 \\ u^R & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (7.52)$$

$$\rho(x, 0) = \rho(x) = \begin{cases} \rho^L & \text{si } x < 0 \\ \rho^R & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (7.53)$$

$$\text{avec } u^M = \frac{\sqrt{\rho^R}u^R + \sqrt{\rho^L}u^L}{\sqrt{\rho^R} + \sqrt{\rho^L}}, \quad k = \sqrt{\rho^R\rho^L}(u^L - u^R) \text{ et } y = x - u^M t \quad (7.54)$$

**Théorème 34** Dans le cas où  $u^L \leq u^R$ , la solution du problème limite du problème visqueux s'écrit :

$$u = \begin{cases} u^L & \text{si } x < u^L t \\ u^R & \text{si } x > u^R t \\ x/t & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (7.55)$$

$$\rho = \begin{cases} \rho^L & \text{si } x < u^L t \\ \rho^R & \text{si } x > u^R t \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (7.56)$$

Remarque 1:

Dans le cas avec choc, on considère par exemple l'entropie  $\rho u^2$ . Le flux associé est  $\rho u^3$ . Dans le repère local du choc, on a:  $[\rho v^3] = \sqrt{\rho^L\rho^R}(u^R - u^L) < 0$ . L'entropie obtenue est donc décroissante à travers le choc.

Dans le cas avec choc, on considère maintenant l'entropie  $2u$  dont le flux vaut  $u^2$ . Dans le repère local du choc, on a:

$$[v^2] = (\rho^L - \rho^R)(u^R - u^L)^2 / (\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R})^2, \text{ dont le signe est inconnu.}$$

On retrouve que les seules entropies physiques sont celles pondérées par la masse volumique.

Remarque 2:

Toujours pour le problème des chocs et des "ondes" visqueuses, on aurait pu considérer l'équation de Burgers mais dans ce cas le terme visqueux aurait pris la forme  $\nu/\rho...$  ce qui n'est pas licite lorsque la densité est une solution mesurée.

Remarque 3:

Il est bien évident que le système de Burgers visqueux couplé à l'équation de masse ne conduirait pas à la même solution. Soit le système:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0. \\ \frac{\partial(u)}{\partial t} + (1/2)\frac{\partial(u^2)}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \end{cases} \quad (7.57)$$

Ce système ne relève pas des lois de conservation physiques et conduirait à des solutions bien définies au sens mathématique mais non au sens de l' "Ingénieur Mécanicien".

#### 7.5.4 Solution du problème pour des données initiales particulières

S'il n'est pas aisé de définir des données initiales quelconques distinctes de celles du type du Problème de Riemann, il est possible d'envisager une donnée un peu plus complexe qui nous sera utile pour l'étude de populations électroniques. On considère toujours le système S1 avec les données suivantes appelées DC (données créneau) :

$$u = \begin{cases} u_0 & \text{si } -M < x < 0 \\ -u_0 & \text{si } 0 < x < M \\ 0. & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (7.58)$$

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } -M < x < M \\ 0. & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (7.59)$$

$$\text{où } M \text{ est un paramètre positif} \quad (7.60)$$

**Théorème 35** Dans le cas où  $u_0$  est négatif, la solution du problème associé aux conditions limites DC s'écrit :

$$u = \begin{cases} u_0 & \text{si } -M + u_0 t < x < u_0 t \\ -u_0 & \text{si } -u_0 t < x < M - u_0 t \\ x/t & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (7.61)$$

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } -M + u_0 t < x < u_0 t \\ \rho_0 & \text{si } -u_0 t < x < M - u_0 t \\ 0. & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (7.62)$$

Dans le cas où  $u_0$  est positif, la solution du problème associé aux conditions limites DC s'écrit :

Pour  $t < M/u_0$

$$u = \begin{cases} u_0 & \text{si } -M + u_0 t < x < 0 \\ -u_0 & \text{si } 0 < x < M - u_0 t \\ 0. & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (7.63)$$

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } -M + u_0 t < x < 0. \\ \rho_0 & \text{si } 0. < x < M - u_0 t \\ kt\delta(x) & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (7.64)$$

Pour  $t > M/u_0$  :

$$u = 0. \quad (7.65)$$

$$\rho = \begin{cases} 0. & \text{si } x \text{ est différent de zéro} \\ kt\delta(x) & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (7.66)$$

$$\text{avec } k = 2\rho_0 u_0 \quad (7.67)$$

## 7.6 Etude du problème mono fluide en présence de champ électrique

### 7.6.1 Introduction

On s'intéresse aux effets du champ électrique sur une population ionique dans un cadre mono dimensionnel. Le chapitre précédent peut être vu comme le cas où les effets électriques sont nuls. Que se passe-t-il de particulier? Essentiellement la prise en compte des équations de Maxwell. Pour présenter cette approche, nous nous sommes inspirés de [13]. La première difficulté concerne l'invariance par changement de repère galiléen. Afin de conserver cette propriété, les effets de champ magnétique sont supposés nuls (ou négligeables). Cela a comme conséquence de considérer le champ électrique comme dérivant d'un potentiel. Or en 1D, cela peut toujours se faire, cependant se posera la question d'un problème bien posé en fonction des conditions limites (ou initiales) soit sur le champ électrique soit sur le potentiel. Le système s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial t} = -\left(\frac{e}{\epsilon_0}\right)nu \\ \frac{\partial(\epsilon_0 E)}{\partial x} = en \\ \frac{\partial(nu)}{\partial t} + \frac{\partial(nu^2)}{\partial x} = \frac{e}{M}nE \end{cases} \quad (7.68)$$

Ce système relève des Problèmes Hyperboliques Non Linéaires Dégénérés. En effet :

**Proposition 56** *Le système proposé admet une forme conservative. Il est de nature hyperbolique et admet une valeur propre triple  $u$ . L'espace vectoriel en-*

généralisé par les vecteurs propres est de dimension 1 et ce dernier est linéairement dégénéré.

Démonstration :

Il est bien connu que les lois de Maxwell redonnent la loi de conservation de la masse. En utilisant la loi de Poisson, l'équation de quantité de mouvement devient conservative. En effet, d'après la seconde équation de (7.68), il est aisé de noter que

$$-\frac{e}{M}nE = \frac{e}{M}E\frac{\varepsilon_0}{c}\frac{\partial E}{\partial x} \text{ soit } \frac{\varepsilon_0}{2M}\frac{\partial E^2}{\partial x}.$$

Par combinaison des deux lois de Maxwell, on obtient une équation de transport sur le champ électrique qui devient conservative par combinaison avec l'équation de masse.

On obtient ainsi le système suivant dans les zones régulières:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(U)}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0. \\ \text{avec } U = (n, nu, nE)^t \\ \text{et } F(U) = (nu, nu^2 - \frac{\varepsilon_0}{2M}E^2, nuE)^t \end{array} \right. \quad (7.69)$$

Ce système mis sous forme conservative peut, dans les zones régulières, s'écrire de manière plus simple sur les variables  $(n, u, E)$ . On obtient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial t} + A(V)\frac{\partial V}{\partial x} = 0. \\ \text{avec } V = (n, u, E)^t \\ \text{et } A = \begin{pmatrix} u & n & 0 \\ 0 & u & (\varepsilon_0/Mn)E \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (7.70)$$

La matrice A, non diagonalisable, admet comme valeur propre triple u. Le seul vecteur propre associé est :

$r(V) = (1, 0, 0)^t$  qui est orthogonal au gradient de V. Le système est donc dégénéré •

De plus, les relations de choc à travers une discontinuité se propageant à la vitesse  $\sigma$ , pour le système conservatif obtenu en (7.69), donnent, en posant  $v = u - \sigma$  :

$$\begin{cases} [nv] = 0 \\ [nv^2] - \left(\frac{\epsilon_0}{2M}\right) [E^2] = 0 \\ [nvE] = 0 \end{cases} \quad (7.71)$$

On a donc  $nv = K$  et donc, si  $K$  est différent de zéro,  $[E]$  est nul et on en déduit que  $[nv^2]$  est nul, comme dans le système sans pression étudié précédemment, et qu'il ne peut y avoir de discontinuité si  $K$  est différent de zéro. Pour  $K$  nul, ne subsiste que  $[E^2] = 0$ . On constate que les contraintes imposées sur les chocs sont très proches de celles du chapitre précédent et de la même manière les chemins visqueux vont permettre de lever les ambiguïtés.

### 7.6.2 Solution Lagrangienne pour le problème de Riemann

Les seuls chocs possibles sont donc le vide d'un côté et la vitesse de l'autre côté égale à la vitesse de la discontinuité. Dans le cas  $u^L < u^R$ , il est possible de relier l'état gauche à l'état droit en passant par le vide. On obtient ainsi la solution proposée •

**Proposition 57** La solution du système (7.68) dans le cas où  $u^L < u^R$  est aussi solution du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nu)}{\partial x} = 0. \\ \frac{\partial u}{\partial t} + 1/2 \frac{\partial(u^2)}{\partial x} = \frac{e}{M} E \\ \frac{\partial E}{\partial t} + u \frac{\partial(E)}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (7.72)$$

C'est la solution Lagrangienne.

**Théoreme 36** Dans le cas où  $u^L \leq u^R$ , la solution de (7.68) du problème de Riemann s'écrit :

$$u = \begin{cases} u^L + \frac{\epsilon^2}{M\epsilon_0} n^L t \frac{x - tu^L}{1 + n^L \frac{\epsilon^2}{2M\epsilon_0} t^2} & \text{si } x < u^L t \\ u^R + \frac{\epsilon^2}{M\epsilon_0} n^R t \frac{x - tu^R}{1 + n^R \frac{\epsilon^2}{2M\epsilon_0} t^2} & \text{si } x > u^R t \\ x/t & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (7.73)$$

$$n = \begin{cases} \frac{n^L}{1 + n^L \frac{e^2}{2M\epsilon_0} t^2} & \text{si } x < u^L t \\ \frac{n^R}{1 + n^R \frac{e^2}{2M\epsilon_0} t^2} & \text{si } x > u^R t \\ 0. & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (7.74)$$

$$E = \begin{cases} \frac{e}{\epsilon_0} n^L \frac{x - tu^L}{1 + n^L \frac{e^2}{2M\epsilon_0} t^2} & \text{si } x < u^L t \\ \frac{e}{\epsilon_0} n^R \frac{x - tu^R}{1 + n^R \frac{e^2}{2M\epsilon_0} t^2} & \text{si } x > u^R t \\ 0. & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (7.75)$$

### 7.6.3 Etude du problème visqueux associé et problème limite

On a vu les difficultés engendrées par les chocs sur ce système. Pour cela, on considère les effets visqueux qui peuvent apparaître dans l'équation de quantité de mouvement sachant que les lois de Maxwell ne sont pas sujettes à des effets de perturbation. Dans ce cas, le système envisagé s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nu)}{\partial x} = 0. \\ \frac{\partial(nu)}{\partial t} + \frac{\partial(nu^2 - (\epsilon_0/2M)E^2)}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \\ \frac{\partial(nE)}{\partial t} + \frac{\partial(nuE)}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (7.76)$$

Ce système va être associé à des conditions initiales de type Riemann qui ont été déjà employées pour l'étude de Mécanique des Fluides sans Pression.

Il sera utilisé comme données :

$$n = \begin{cases} n^L & \text{si } x < 0 \\ n^R & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (7.77)$$

$$u = \begin{cases} u^L & \text{si } x < 0 \\ u^R & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (7.78)$$

D'après l'équation de POISSON, les données initiales sur le champ électrique doivent être compatibles avec les données sur la densité. Comme dans le cadre précédent, on distinguera deux cas associés à la position de  $u^L$  par rapport à  $u^R$ .

De plus associé au problème visqueux, une équation d'énergie apparaît .

**Proposition 58** *L'énergie du système visqueux, en supposant la solution régulière, vérifie l'équation d'évolution suivante :*

$$\frac{1}{2} \frac{\partial(nu^2 + (\frac{\epsilon_0}{M})E^2)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(nu^3)}{\partial x} - \nu u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (7.79)$$

**Proposition 59** *Le système d'évolution à une seule population vérifie une loi d'évolution portant sur la densité et la vitesse qui s'écrit :*

$$\frac{\partial^2(nu)}{\partial t^2} + (3/2) \frac{\partial^2(nu^2)}{\partial x \partial t} + (1/2) \frac{\partial^2(nu^3)}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})}{\partial x} = 0. \quad (7.80)$$

Il est aisé d'obtenir un système de deux équations d'évolution portant uniquement sur la densité  $n$  et la vitesse  $u$  .

**Proposition 60** *La densité  $n$  et le champ de vitesse  $u$  vérifient le système visqueux suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nu)}{\partial x} = 0. \\ \frac{\partial^2(nu)}{\partial t^2} + (3/2) \frac{\partial^2(nu^2)}{\partial x \partial t} + (1/2) \frac{\partial^2(nu^3)}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})}{\partial x} = 0. \end{array} \right. \quad (7.81)$$

**Proposition 61** *Si on pose  $n_{-\infty}, u_{-\infty}$  les états en  $-\infty$  et  $n_{+\infty}, u_{+\infty}$  les états en  $+\infty$ , dans le cas du système visqueux défini par (7.76), les solutions "travelling waves" sur la densité  $n$  et la vitesse  $u$  reliant les états constants à l'infini sans gradient sont de la forme :*

$$u = \begin{cases} u_{-\infty} - (u_{-\infty} - \sigma) \exp((C_L y)/\nu) & \text{si } x < \sigma t \\ u_{+\infty} - (u_{+\infty} - \sigma) \exp((C_R y)/\nu) & \text{si } x > \sigma t \\ \sigma & \text{si } x = \sigma t \end{cases} \quad (7.82)$$

$$\rho = \begin{cases} C_L/(u - \sigma) & \text{si } x < \sigma t \\ C_R/(u - \sigma) & \text{si } x > \sigma t \\ kt\delta(x - \sigma t) & \text{si } x = \sigma t \end{cases} \quad (7.83)$$

Cette solution correspond aux données initiales suivantes :

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u_{-\infty}(1 - \exp((C_L x)/\nu)) & \text{si } x < 0 \\ u_{+\infty}(1 - \exp((C_R x)/\nu)) & \text{si } x > 0 \\ \sigma & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (7.84)$$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x) = \begin{cases} C_L/u_0(x) & \text{si } x < 0 \\ C_R/u_0(x) & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (7.85)$$

$$\text{avec } \sigma = \frac{\sqrt{\rho_{-\infty}}u_{-\infty} + \sqrt{\rho_{+\infty}}u_{+\infty}}{\sqrt{\rho_{-\infty}} + \sqrt{\rho_{+\infty}}} \quad (7.86)$$

$$\text{et } C_L = \frac{\rho_{-\infty}\sqrt{\rho_{-\infty}}(u_{-\infty} - u_{+\infty})}{\sqrt{\rho_{-\infty}} + \sqrt{\rho_{+\infty}}} > 0, \quad C_R = \frac{\rho_{+\infty}\sqrt{\rho_{-\infty}}(u_{+\infty} - u_{-\infty})}{\sqrt{\rho_{-\infty}} + \sqrt{\rho_{+\infty}}} < 0 \quad (7.87)$$

$$\text{ainsi que } k = \sqrt{\rho_{-\infty}\rho_{-\infty}}(u_{-\infty} - u_{+\infty}) > 0 \text{ et } y = x - \sigma t \quad (7.88)$$

**Proposition 62** Si on pose  $n_{-\infty}, u_{-\infty}$  les états en  $-\infty$  et  $n_{+\infty}, u_{+\infty}$  les états en  $+\infty$ , dans le cas limite du système visqueux défini par (7.76), les solutions "travelling waves" sur la densité  $n$  et la vitesse  $u$  sont de la forme :

$$u = \begin{cases} u_{-\infty} & \text{si } x < \sigma t \\ u_{+\infty} & \text{si } x > \sigma t \\ \sigma & \text{si } x = \sigma t \end{cases} \quad (7.89)$$

$$\rho = \begin{cases} \rho_{-\infty} & \text{si } x < \sigma t \\ \rho_{+\infty} & \text{si } x > \sigma t \\ kt\delta(x - \sigma t) & \text{si } x = \sigma t \end{cases} \quad (7.90)$$

Cette solution correspond aux données initiales suivantes :

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u_{-\infty} & \text{si } x < 0 \\ u_{+\infty} & \text{si } x > 0 \\ \sigma & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (7.91)$$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x) = \begin{cases} \rho_{-\infty} & \text{si } x < 0 \\ \rho_{+\infty} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (7.92)$$

$$\text{avec } \sigma = \frac{\sqrt{\rho_{-\infty}}u_{-\infty} + \sqrt{\rho_{+\infty}}u_{+\infty}}{\sqrt{\rho_{-\infty}} + \sqrt{\rho_{+\infty}}} \quad (7.93)$$

$$\text{et } C_L = \frac{\rho_{-\infty} \sqrt{\rho_{-\infty}} (u_{-\infty} - u_{+\infty})}{\sqrt{\rho_{-\infty}} + \sqrt{\rho_{+\infty}}} > 0, \quad C_R = \frac{\rho_{+\infty} \sqrt{\rho_{-\infty}} (u_{+\infty} - u_{-\infty})}{\sqrt{\rho_{-\infty}} + \sqrt{\rho_{+\infty}}} < 0 \quad (7.94)$$

$$\text{ainsi que } k = \sqrt{\rho_{-\infty} \rho_{-\infty}} (u_{-\infty} - u_{+\infty}) > 0 \text{ et } y = x - \sigma t \quad (7.95)$$

**Théoreme 37** Dans le cas où  $u^L > u^R$ , la solution du problème non visqueux s'écrit :

$$E = \begin{cases} \frac{e}{\varepsilon_0} n^L \frac{x - u^L t}{1 + K n^L t^2} & \text{si } x < \sigma(t) \\ \frac{e}{\varepsilon_0} n^R \frac{x - u^R t}{1 + K n^R t^2} & \text{si } x > \sigma(t) \end{cases} \quad (7.96)$$

$$u = \begin{cases} u^L + 2K n^L t \frac{x - u^L t}{1 + K n^L t^2} & \text{si } x < \sigma(t) \\ u^R + 2K n^R t \frac{x - u^R t}{1 + K n^R t^2} & \text{si } x > \sigma(t) \end{cases} \quad (7.97)$$

$$n = \begin{cases} \frac{n^L}{1 + K n^L t^2} & \text{si } x < \sigma(t) \\ \frac{n^R}{1 + K n^R t^2} & \text{si } x > \sigma(t) \\ \left( \frac{n^L (t u^L - \sigma(t))}{1 + K n^L t^2} - \frac{n^R (t u^R - \sigma(t))}{1 + K n^R t^2} \right) \delta(x - \sigma(t)) & \text{si } x = \sigma(t) \end{cases} \quad (7.98)$$

$$\text{avec } K = \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} \text{ et } \sigma(t) = t\phi(t) \text{ tel que} \quad (7.99)$$

$$\phi(t) = \frac{\sqrt{n^L} u^L \sqrt{1 + K n^R t^2} + \sqrt{n^R} u^R \sqrt{1 + K n^L t^2}}{\sqrt{n^L} \sqrt{1 + K n^R t^2} + \sqrt{n^R} \sqrt{1 + K n^L t^2}} \quad (7.100)$$

$$f_R(t) = \sqrt{n^R} \frac{\sigma(t) - u^R t}{1 + K n^R t^2} \quad (7.101)$$

**Proposition 63** Dans le cas où  $n^L = n^R = n_0$ , la ligne de discontinuité est définie par :

$$\sigma(t) = t \frac{u^L + u^R}{2} \quad (7.102)$$

**Proposition 64** Dans le cas où par exemple  $n^L = 0$ , la ligne de discontinuité est définie par :

$$\sigma(t) = u^R t \quad (7.103)$$

Remarque :

Par simple calcul, en  $t = 0$  on obtient comme ligne de discontinuité exactement celle obtenue dans le paragraphe 7.5.2 où

$$\sigma(t) = t \frac{\sqrt{n^L} u^L + \sqrt{n^R} u^R}{\sqrt{n^L} + \sqrt{n^R}}$$

De même, si le temps tend vers l'infini, on obtient alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t) = t \frac{u^L + u^R}{2}$$

qui correspond aussi à un problème sans pression, l'équation de Burgers!!!!

#### 7.6.4 Solution du problème pour des données initiales particulières

S'il n'est pas aisé de définir des données initiales quelconques distinctes de celles du type du Problème de Riemann, il est possible d'envisager une donnée un peu plus complexe qui nous sera utile pour l'étude de populations électroniques. On considère toujours le système S2 avec les données suivantes appelées DC (données créneau) :

$$u = \begin{cases} u_0 & \text{si } -L < x < 0 \\ -u_0 & \text{si } 0 < x < L \\ 0. & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (7.104)$$

$$n = \begin{cases} n_0 & \text{si } -L < x < L \\ 0. & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (7.105)$$

$$\text{où } M \text{ est un paramètre positif} \quad (7.106)$$

**Théorème 38** Dans le cas où  $u_0$  est négatif, la solution du problème associé

aux conditions limites DC s'écrit :

$$u = \begin{cases} u_0 - \frac{\varepsilon_0}{M} n_0 L t & \text{si } x < u_0 t - L(1 + n_0 \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} t^2) \\ u_0 + \frac{e^2}{M\varepsilon_0} n_0 t \frac{x - u_0 t}{1 + n_0 \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} t^2} & \text{si } u_0 t - L(1 + n_0 \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} t^2) < x < u_0 t \\ x/t & \text{si } u_0 t < x < -u_0 t \\ -u_0 + \frac{e^2}{M\varepsilon_0} n_0 t \frac{x + u_0 t}{1 + n_0 \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} t^2} & \text{si } -u_0(t) < x < -u_0 t + L(1 + n_0 \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} t^2) \\ -u_0 + \frac{\varepsilon_0}{M} n_0 M t & \text{si } x > -u_0 t + L(1 + n_0 \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} t^2) \end{cases} \quad (7.107)$$

$$n = \begin{cases} \frac{n_0}{1 + n_0 \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} t^2} & \text{si } u_0 t - L(1 + n_0 \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} t^2) < x < u_0 t \\ \frac{n_0}{1 + n_0 \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} t^2} & \text{si } -u_0(t) < x < -u_0 t + L(1 + n_0 \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} t^2) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (7.108)$$

$$E = \begin{cases} -\frac{\varepsilon_0}{e} n_0 L & \text{si } x < u_0 t - L(1 + n_0 \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} t^2) \\ \frac{e}{\varepsilon_0} n_0 \frac{x - u_0 t}{1 + n_0 \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} t^2} & \text{si } u_0 t - L(1 + n_0 \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} t^2) < x < u_0 t \\ 0 & \text{si } u_0 t < x < -u_0 t \\ \frac{e}{\varepsilon_0} n_0 \frac{x + u_0 t}{1 + n_0 \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} t^2} & \text{si } -u_0(t) < x < -u_0 t + L(1 + n_0 \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} t^2) \\ \frac{\varepsilon_0}{e} n_0 L & \text{si } x > -u_0 t + L(1 + n_0 \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} t^2) \end{cases} \quad (7.109)$$

Dans le cas où  $u_0$  est positif, la solution du problème associé aux conditions limites DC s'écrit :

$$u = \begin{cases} u_0 - \frac{\varepsilon_0}{m} n_0 L t & \text{si } x < u_0 t - L(1 + n_0 \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} t^2) \\ u_0 + \frac{e^2}{M\varepsilon_0} n_0 t \frac{x - u_0 t}{1 + n_0 \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} t^2} & \text{si } -L(1 + n_0 \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} t^2) + u_0 t < x < 0 \\ u_0 + \frac{e^2}{M\varepsilon_0} n_0 t \frac{x + u_0 t}{1 + n_0 \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} t^2} & \text{si } 0 < x < L(1 + n_0 \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} t^2) - u_0 t \\ -u_0 + \frac{\varepsilon_0}{M} n_0 L t & \text{si } x > -u_0 t + L(1 + n_0 \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} t^2) \end{cases} \quad (7.110)$$

$$n = \begin{cases} \frac{n_0}{1 + n_0 \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} t^2} & \text{si } L(1 + \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} n_0 t^2) + u_0 t < x < 0 \\ \frac{n_0}{1 + n_0 \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} t^2} & \text{si } 0 < x < L(1 + \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} n_0 t^2) - u_0 t \\ k(t)\delta(x) & \text{si } x = 0. \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (7.111)$$

$$E = \begin{cases} -\frac{\varepsilon_0}{M} n_0 L & \text{si } x < u_0 t - L(1 + \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} n_0 t^2) \\ -\frac{\varepsilon_0}{M} n_0 \frac{x - u_0 t}{1 + n_0 \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} t^2} & \text{si } -L(1 + \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} n_0 t^2) + u_0 t < x < 0 \\ \frac{\varepsilon_0}{M} n_0 \frac{x + u_0 t}{1 + n_0 \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} t^2} & \text{si } 0 < x < L(1 + \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} n_0 t^2) - u_0 t \\ \frac{\varepsilon_0}{M} n_0 L & \text{si } x > -u_0 t + L(1 + \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} n_0 t^2) \end{cases} \quad (7.112)$$

$$\text{avec } k = \frac{2n_0 u_0 t}{1 + n_0 \frac{e^2}{2M\varepsilon_0} t^2} \quad (7.113)$$

## 7.7 Etude du problème bifluide en présence de champ électrique

### 7.7.1 Introduction

On s'intéresse aux effets du champ électrique sur une population électronique formée d'électrons en présence d'ions dans un cadre monodimensionnel. La présentation suit l'étude menée dans [78].

Le chapitre précédent peut être vu comme le cas où la masse des ions est nulle. Que se passe-t-il de particulier? Essentiellement la prise en compte dans les équations de Maxwell de la population ionique supposée immobile. La première difficulté concerne l'invariance par changement de repère galiléen. Afin de conserver cette propriété, les effets de champ magnétique sont supposés nuls (ou négligeables). Cela a comme conséquence de considérer le champ électrique comme dérivant d'un potentiel. Or en 1D, cela peut toujours se faire, cependant se posera la question d'un problème bien posé en fonction des conditions limites (ou initiales) soit sur le champ électrique soit sur le potentiel. Le système s'écrit en définissant par  $n$ ,  $u$  la densité et la vitesse des électrons et par  $n_i$  la densité ionique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E}{\partial t} = \left(\frac{e}{\epsilon_0}\right)nu \\ \frac{\partial(\epsilon_0 E)}{\partial x} = e[n_i(x) - n] \\ \frac{\partial(nu)}{\partial t} + \frac{\partial(nu^2)}{\partial x} = -\frac{e}{m}nE \end{array} \right. \quad (7.114)$$

où

$$n(x, 0) = n_i(x)$$

afin de respecter initialement l'équilibre. Ce système relève des Problèmes Hyperboliques Non Linéaires Dégénérés. En effet :

**Proposition 65** *Le système est de nature hyperbolique et admet une valeur propre double  $u$  et une simple. Toutes les valeurs propres sont linéairement dégénérées. L'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres est de dimension 2.*

### 7.7.2 Solution Lagrangienne

**Proposition 66** La solution proposée est aussi la solution Lagrangienne ainsi que la solution du système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nu)}{\partial x} = 0. \\ \frac{\partial u}{\partial t} + 1/2 \frac{\partial(u^2)}{\partial x} = -\frac{e}{m} E \\ \frac{\partial E}{\partial t} + u \frac{\partial(E)}{\partial x} = \frac{e}{\epsilon_0} un_i(x). \\ n(x, 0) = n_i(x) \end{array} \right. \quad (7.115)$$

**Théoreme 39** La solution du problème de Riemann s'écrit :

$$u = \begin{cases} (u^L + (u^R - u^L)Y(z)) \cos(\omega^L t) - \frac{e\lambda}{m\omega^L} \sin(\omega^L t) & \text{si } x < 0 \\ (u^L + (u^R - u^L)Y(z)) \cos(\omega^R t) - \frac{e\lambda}{m\omega^R} \sin(\omega^R t) & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (7.116)$$

$$n = \begin{cases} n^L & \text{si } x < 0 \\ n^R & \text{si } x > 0 \\ 0. & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (7.117)$$

$$E = \begin{cases} \lambda + \frac{m}{e} \omega^L u^L \sin(\omega^L t) & \text{si } x < u^L t \\ \lambda + \frac{m}{e} \omega^R u^R \sin(\omega^R t) & \text{si } x > u^R t \\ 0. & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (7.118)$$

$$x = \begin{cases} y + \frac{\epsilon_0 \lambda}{en^L} + \frac{u^L + (u^R - u^L)Y(y)}{\omega^L} \sin(\omega^L t) - \frac{\epsilon_0 \lambda}{en^L} \cos(\omega^L t) & \text{pour } x < 0 \\ z + \frac{\epsilon_0 \lambda}{en^R} + \frac{u^L + (u^R - u^L)Y(z)}{\omega^R} \sin(\omega^R t) - \frac{\epsilon_0 \lambda}{en^R} \cos(\omega^R t) & \text{pour } x > 0 \end{cases} \quad (7.119)$$

## 7.8 Etude du problème bifluide se ramenant au monofluide

### 7.8.1 Présentation et Solution Lagrangienne

Cette étude a été inspirée par P.A.RAVIART à partir des travaux menés par J.GOSSET ([79],[80], [81]).

Elle consiste à s'intéresser au mouvement d'ions en présence d'électrons en considérant que ces derniers sont immobiles. Le cas étudié consiste à définir le problème initial suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = 0 \quad \text{si } 0 < x < L \\ \Phi = 0 \quad \text{pour } x = L > 0 \\ \Phi = \Phi_0 \quad \text{pour } x = 0 \\ n_0(x) = \begin{cases} n_0 & \text{si } l < x < L \\ 0 & \text{si } 0 < x < l \end{cases} \end{array} \right. \quad \text{où } L \text{ et } l \text{ sont des paramètres positifs tels que } l < L \quad (7.120)$$

Démonstration:

La première étape consiste à faire en sorte que les données initiales soient compatibles avec les conditions limites associées.

Pour cela, J.GOSSET remarque qu'il faut imposer la nullité du potentiel et du champ électrique au même point (qui sera appelé par la suite  $x_s(0)$ ).

L'étude demande donc de définir un point tel que pour les points inférieurs à  $x_s$  la densité des électrons soit nulle et pour les points supérieurs à  $x_s$  la densité soit égale à  $n_0$ , c'est à dire celle des électrons ce qui permet alors de définir le champ électrique.

Nous allons suivre la méthodologie développée par J.GOSSET en 1D.

Initialement, on peut écrire que

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x E(x, t = 0) = \frac{e}{\epsilon_0} n_0(x) \\ \partial_x \Phi(x, t = 0) = -E(x, t = 0) \end{array} \right. \quad (7.121)$$

Cela conduit à

$$\left\{ \begin{array}{l} E(x, 0) = \lambda_0 + \frac{e}{\epsilon_0} \int_0^x n_0(y) dy \\ \Phi(x, 0) = \Phi_0 - \lambda_0 x - \frac{e}{\epsilon_0} \int_0^x dy \left( \int_0^y n_0(z) dz \right) \end{array} \right. \quad (7.122)$$

ou encore

$$\left\{ \begin{array}{l} E(x, 0) = \lambda_0 + \frac{e}{\epsilon_0} \int_0^x n_0(y) dy \\ \Phi(x, 0) = \Phi_0 - \lambda_0 x - \frac{e}{\epsilon_0} \int_0^x (x-y) n_0(y) dy \end{array} \right. \quad (7.123)$$

La recherche de  $x_s(0)$  s'écrit donc

$$\begin{cases} \Phi_0 = \lambda_0 x_s(0) - \frac{e}{\epsilon_0} \int_0^{x_s(0)} (x_s(0) - z) n_0(z) dz \\ 0 = \lambda_0 + \frac{e}{\epsilon_0} \int_0^{x_s(0)} n_0(y) dy \end{cases} \quad (7.124)$$

soit encore

$$\Phi_0 + \frac{e}{\epsilon_0} \int_0^{x_s(0)} z n_0(z) dz = 0$$

Dans le premier cas, si on recherche  $x_s(0) > l$ , on doit avoir

$$\Phi_0 + \frac{e}{\epsilon_0} \int_0^l z n_0(z) dz + \frac{e}{\epsilon_0} \int_l^{x_s(0)} z n_0(z) dz = 0$$

d'où

$$(x_s(0))^2 = l^2 - 2 \frac{\Phi_0 \epsilon_0}{n_0 e}$$

ce qui conduit à une solution (unique) que dans le cas où  $\Phi_0$  est négatif qui s'écrit :

$$x_s(0) = l \sqrt{1 - 2 \frac{\Phi_0 \epsilon_0}{n_0 e l^2}} \quad (7.125)$$

Par contre, si on cherche  $x_s(0) < l$ , la seule solution est obtenue pour  $\Phi_0 = 0$ . Le seul cas donc possible est le premier pour lequel  $\lambda_0$  est obtenu avec

$$\lambda_0 = -\frac{e}{\epsilon_0} \int_0^{x_s(0)} n_0(z) dz = -\frac{e}{\epsilon_0} n_0(x_s(0) - l) < 0 \quad (7.126)$$

Remarque : Si

$$\frac{\Phi_0 \epsilon_0}{n_0 l^2 e} \ll 1,$$

il est aisé d'observer que :

$$x_s(0) \simeq l - \frac{\Phi_0 \epsilon_0}{n_0 e l}$$

$$\lambda_0 \simeq \frac{\Phi_0}{l} \quad (7.127)$$

Dans ce cas, on obtient donc :

$$\text{Pour } x < l \begin{cases} n(x, 0) = 0 \\ E(x, 0) = \lambda_0 = -\frac{e}{\epsilon_0} n_0(x_s(0) - l) \\ \Phi(x, 0) = \Phi_0 + \frac{e}{\epsilon_0} n_0(x_s(0) - l)x \end{cases} \quad (7.128)$$

$$\text{et pour } l < x < x_s(0) \left\{ \begin{array}{l} n(x, 0) = n_0 \\ E(x, 0) = \lambda_0 + \frac{e}{\epsilon_0} \int_l^x n_0 dz = \frac{e}{\epsilon_0} n_0 (x - x_s(0)) \\ \Phi(x, 0) = \Phi(l, 0) - \frac{e}{2\epsilon_0} n_0 ((x - x_s(0))^2 - (l - x_s(0))^2) = \\ \Phi_0 + \frac{e}{2\epsilon_0} n_0 ((x_s(0))^2 - l^2) - \frac{en_0}{2\epsilon_0} (x - x_s(0))^2 = \\ - \frac{e}{2\epsilon_0} n_0 (x - x_s(0))^2 \end{array} \right. \quad (7.129)$$

$$\text{Pour } x_s(0) < x \left\{ \begin{array}{l} n(x, 0) = n_0 \\ E(x, 0) = 0 \\ \Phi(x, 0) = 0 \end{array} \right. \quad (7.130)$$

alors

**Théorème 40** Soit  $x_s(0)$  défini par

$$x_s(0) = l \sqrt{1 - 2 \frac{\Phi_0 \epsilon_0}{n_0 e l^2}} \simeq l - \frac{\Phi_0 \epsilon_0}{n_0 e l}$$

et  $t_0$  par

$$t_0^2 = \frac{2M\epsilon_0 \alpha(2 - \alpha) + \alpha\sqrt{\alpha^2 + 4\alpha}}{e^2 n_0} \quad \text{où } \alpha = \frac{l}{x_s(0) - l}$$

la solution du problème s'exprime ainsi:

Pour  $t < t_0$

soit

$$z(t) = x_s(0) + (1 + \frac{e^2}{2M\epsilon_0} n_0 t^2) ((l - x_s(0)) + (x_s(0) - l) \sqrt{1 + \frac{e^2}{2M\epsilon_0} n_0 t^2})$$

alors

$$\text{Pour } 0 < x < z(t) \left\{ \begin{array}{l} n(x, t) = 0 \\ E(x, t) = E_0 \\ u(x, t) = \frac{e}{M} t E_0 \\ \Phi(x, t) = \Phi_0 - x E_0 \end{array} \right. \quad (7.131)$$

$$\text{Pour } z(t) < x < x_s(0) \left\{ \begin{array}{l} n(x, t) = \frac{n_0}{1 + \frac{e^2 n_0 t^2}{2M\epsilon_0}} + \frac{e}{\epsilon_0} n_0 ((x_s(0) - l) \sqrt{\frac{\frac{e^2}{2M\epsilon_0} n_0 t^2}{1 + \frac{e^2}{2M\epsilon_0} n_0 t^2}} \delta(x - z(t))) \\ E(x, t) = \frac{e}{\epsilon_0} \frac{n_0}{1 + \frac{e^2 n_0 t^2}{2M\epsilon_0}} (x - x_s(0)) \\ u(x, t) = \frac{e^2 n_0 t}{M\epsilon_0} \frac{x - x_s(0)}{1 + \frac{e^2 n_0 t^2}{2M\epsilon_0}} \\ \Phi(x, t) = -\frac{e}{2\epsilon_0} \frac{n_0}{1 + \frac{e^2 n_0 t^2}{2M\epsilon_0}} (x - x_s(0))^2 \end{array} \right. \quad (7.132)$$

$$\text{Pour } x > x_s(0) \left\{ \begin{array}{l} n(x, t) = n_0 \\ E(x, t) = 0 \\ u(x, t) = 0 \\ \Phi(x, t) = 0 \end{array} \right. \quad (7.133)$$

où  $E_0$  est défini par

$$E_0 = -\frac{e}{\epsilon_0} n_0 (x_s(0) - l) \simeq \frac{\Phi_0}{l} \quad (7.134)$$

Pour  $t \geq t_0$

$$\text{Pour } 0 < x < x_s(t) \left\{ \begin{array}{l} n(x, t) = \frac{-\frac{2\epsilon_0}{e} \Phi_0}{(a + (t - t_0) \sqrt{-\frac{e\Phi_0}{M}})^2} \\ E(x, t) = -\frac{2\Phi_0}{(a + (t - t_0) \sqrt{-\frac{e\Phi_0}{M}})^2} (x - x_s(t)) \\ u(x, t) = x_s'(t) + \frac{2\sqrt{-\frac{e\Phi_0}{M}}}{a + (t - t_0) \sqrt{-\frac{e\Phi_0}{M}}} (x - x_s(t)) \\ \Phi(x, t) = \Phi_0 + \frac{\Phi_0}{(a + (t - t_0) \sqrt{-\frac{e\Phi_0}{M}})^2} ((x - x_s(t))^2 - (x_s(t))^2) \end{array} \right. \quad (7.135)$$

$$\text{Pour } x > x_s(t) \begin{cases} n(x, t) = n_0 \\ E(x, t) = 0 \\ u(x, t) = 0 \\ \Phi(x, t) = 0 \end{cases} \quad (7.136)$$

et

$$x_s(t) = x_s(0) + (t - t_0) \sqrt{-\frac{e}{M} \Phi_0} \quad (7.137)$$

avec

$$a = \sqrt{-\frac{2\epsilon_0 \Phi_0}{en_0} \sqrt{1 + \frac{e^2}{2M\epsilon_0} n_0 t_0^2}} \quad (7.138)$$

### 7.8.2 Interprétation

Le problème posé est associé à une vision Lagrangienne de la propagation des ions. On peut voir ce problème à travers deux interprétations.

La première consiste à définir des données initiales telles que à l' instant  $t$ , on ait la solution présentée

La seconde cherche à voir le problème à travers le flux de masse ( c' est à dire le flux  $n u$  injecté à la frontière  $x_s(t)$ )

Pour le premier cas, il suffit de reprendre la démarche Lagrangienne dans laquelle on définit les caractéristiques. Le problème revient à trouver  $X(t; y, 0)$  telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} E(y, 0) = E(X(t; y, 0), t) \\ u(X(t; y, 0)) = u(y, 0) + \frac{e}{M} t E(y, 0) \\ X(t; y, 0) = y + t u(y, 0) + \frac{e}{2M} t^2 E(y, 0) \\ \text{avec } \frac{\partial X(t; y, 0)}{\partial y} = J \\ \frac{\partial E(y, 0)}{\partial y} = \frac{e}{\epsilon_0} n(y, 0) \\ n(X(t; y, 0)) = \frac{n(y, 0)}{J} \end{array} \right. \quad (7.139)$$

On en déduit alors que

$$\left\{ \begin{array}{l} y = x - t(u(x, t) - \frac{e}{M} E(x, t)) - \frac{e}{2M} t^2 E(x, t) = \\ x - t u(x, t) + t^2 \frac{e}{M} E(x, t) \\ E(y, 0) = E(x, t) \\ u(y, 0) = u(x, t) - \frac{e}{M} t E(x, t) \\ \text{avec } \frac{\partial X(t; y, 0)}{\partial y} = J \\ \frac{\partial E(y, 0)}{\partial y} = \frac{e}{\epsilon_0} n(y, 0) \\ n(X(t; y, 0)) = \frac{n(y, 0)}{J} \end{array} \right. \quad (7.140)$$

On peut en déduire un bilan sur les flux.

**Théoreme 41** Pour les instants  $t < t_0$ , la matière est entrante et pour  $t > t_0$ , le bilan de flux permet aux ions de rejoindre la cathode

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } t < t_0 \\ (nu)(x_s(t), t) - (nu)(z(t), t) = nu > nu \\ = \frac{n_0}{(1 + \frac{e^2}{2M\epsilon_0} n_0 t^2)^2} \frac{e^2 n_0}{M\epsilon_0} t(x_s(0) - z(t)) > 0 \\ \\ \text{et pour } t > t_0 \\ (nu)(x_s(t), t) - (nu)(0, t) = \\ -2 \frac{\epsilon_0 \Phi_0}{e} \frac{2\sqrt{\frac{-e\Phi_0}{M}}}{(a + (t - t_0)\sqrt{\frac{-e\Phi_0}{M}})^3} x_s(t) > 0 \end{array} \right. \quad (7.141)$$

### 7.8.3 Effet de l'alimentation d'ions à l'anode

Cette étude a été proposée par P.A.RAVIART en s'inspirant des travaux de J.GOSSET ([79],[80], [81]).

Elle consiste à s'intéresser au mouvement d'ions en présence d'électrons en considérant que ces derniers sont immobiles.

Le cas étudié est le problème initial suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} n = n_0 \quad \text{si } 0 < x < L \\ \Phi = 0 \quad \text{pour } x = L > 0 \\ \Phi = \Phi_0 \quad \text{pour } x = 0 \\ u_0(x) = \begin{cases} U_0(x) & \text{si } 0 < x < x_s(0) \\ u_0 & \text{si } x_s(0) < x < L \end{cases} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x_s(0) \text{ et } L \text{ sont des paramètres positifs tels que } x_s(0) < L \end{array} \quad (7.142)$$

Démonstration:

La première étape consiste à faire en sorte que les données initiales soient compatibles avec les conditions limites associées.

Pour cela, J.GOSSET remarque qu'il faut pour cela imposer la nullité du potentiel et du champ électrique au même point (qui sera appelé par la suite  $x_s(0)$ ).

L'étude demande donc de définir un point tel que pour les points inférieurs à  $x_s$  la densité des électrons soit nulle et pour les points supérieurs à  $x_s$  la densité des électrons soit égale à  $n_0$ , c'est à dire celle des ions ce qui permet de définir le champ électrique.

Nous allons suivre la méthodologie développée par J.GOSSET en 1D.

Initialement , on peut écrire que

$$\begin{cases} n(x, 0) = n_0 \\ E(x, t = 0) = \frac{e}{\epsilon_0} n_0 x + E_0 \\ \Phi(x, t = 0) = \Phi_0 - x E_0 - \frac{e}{2\epsilon_0} n_0 x^2 \end{cases} \quad (7.143)$$

Cela conduit à la recherche de  $x_s(0)$  tel que:

$$\begin{cases} E(x_s(0), 0) = 0 \\ \Phi(x_s(0), 0) = 0 \end{cases} \quad (7.144)$$

La recherche de  $x_s(0)$  s'écrit donc

$$(x_s(0))^2 = -2 \frac{\Phi_0 \epsilon_0}{n_0 e}$$

ce qui conduit à une solution ( unique ) que dans le cas où  $\Phi_0$  est négatif qui s'écrit:

$$x_s(0) = \sqrt{-2 \frac{\Phi_0 \epsilon_0}{n_0 e}} \quad (7.145)$$

Il est à noter que la vitesse en  $x=0$  est toujours négative et qu'en  $x_s(t)$  elle prend la valeur opposée positive.

La démarche de J.GOSSET consiste à définir la ligne  $x_s(t)$  comme la surface libre où le champ électrique et le potentiel sont nuls et permet de passer d'un modèle d'ions décrivant l'évolution à travers les équations suivantes

$$\begin{cases} \partial_t E = -\frac{e}{\epsilon_0} n u \\ \partial_x E = \frac{e}{\epsilon_0} n \\ \partial_t u + u \partial_x u = \frac{e}{M} E \end{cases} \quad (7.146)$$

à un modèle tel que

$$\begin{cases} \partial_t(n) + \partial_x(nu) = 0 \\ \partial_t u + u \partial_x u = \frac{e}{M} E \\ n = n_e \\ \Phi = \frac{m}{e} k T_e \text{Log}(n_e) \end{cases} \quad (7.147)$$

Dans le premier modèle, il y a couplage entre  $n$ ,  $u$  et  $E$  tandis que dans le second cas, l'égalité des densités des ions et des électrons donne le champ électrique à travers l'existence d'une pression électronique.

Afin que la surface libre ne crée pas de discontinuité, il doit y avoir continuité

du flux de l'équation de quantité de mouvement.

La démarche est analogue à celle présentée précédemment. Elle consiste à définir un changement de coordonnées de la forme  $(y = x - \sigma(t), t)$  tel que la ligne permettant le raccord des flux soit  $y = 0$ .

Dans les coordonnées classiques, on a vu au paragraphe 5.3 que l'équation de quantité de mouvement admet une forme conservative en présence de termes visqueux ou en leur absence.

Cette équation s'écrit alors:

$$\partial_t(nu) + \partial_x(nu^2 + \frac{\varepsilon_0}{2M}E^2 - \nu u_x) = 0$$

ce qui se traduit dans le changement de coordonnées par:

$$\partial_t(nv) + \partial_y(nv^2 + \frac{\varepsilon_0}{2M}E^2 - \nu u_y) + n\sigma''(t) = 0$$

où  $v = u - \sigma'(t)$ . La forme conservative s'écrit alors:

$$\frac{\partial(nv)}{\partial t} + \frac{\partial(nv^2 - (\varepsilon_0/2M)E^2) - \nu u_y + \varepsilon_0/eE\sigma''(t)}{\partial y} = 0 \quad (7.148)$$

Définissons par  $K$  la constante suivante:

$$K = \frac{e^2}{2M\varepsilon_0}$$

Soient donc de part et d'autre d'une discontinuité définie en  $y = 0$  des solutions définies par

$$E_-(y, t) = \frac{e}{\varepsilon_0} n_0 \frac{y + \sigma(t) - x_s(0)(1 + t\sqrt{Kn_0})}{(1 + t\sqrt{Kn_0})^2}$$

De même

$$v_-(y, t) = -X(0)\sqrt{Kn_0} - \sigma'(t) + 2\sqrt{Kn_0} \frac{y + \sigma(t)}{1 + \sqrt{Kn_0}t}$$

et

$$v_+(y, t) = u_0 - \sigma'(t)$$

puis

$$n_-(y, t) = \frac{n_0}{(1 + \sqrt{Kn_0}t)^2}$$

et

$$n_+(y, t) = n_0$$

avec  $N_+(y, t) = n_0(y + \sigma(t) - u_0t)$  qui vérifie  $\partial_x N_+ = n_+$ .

A partir de ces données, on définit

$$n(y, t) = n_-(y, t) + (n_+(y, t) - n_-(y, t))Y(y)$$

$$v(y, t) = v_-(y, t) + (v_+(y, t) - v_-(y, t))Y(y)$$

Il est évident que

$$\frac{\partial(n_- v_-)}{\partial t} + \frac{\partial(n_- v_-^2 - (\epsilon_0/2M)E_-^2)}{\partial y} = -n_- \sigma''(t)$$

pour  $y$  négatif. De même pour  $y$  positif,

$$\frac{\partial(n_+ v_+)}{\partial t} + \frac{\partial(n_+ v_+^2)}{\partial y} = -n_+ \sigma''(t)$$

On en déduit aisément que la solution obtenue vérifie l'équation de quantité de mouvement de part et d'autre de la discontinuité et que rien n'apparaît si le flux est continu à l'interface. La démarche est identique à celle adoptée dans le cas sans champ électrique et consiste à assurer la continuité de ce flux de l'équation de conservation de quantité de mouvement.

**Théoreme 42** *Le modèle de surface libre se caractérise par l'évolution d'une seule population, celle des ions, d'un côté de la discontinuité et de l'autre côté par un modèle ionique sans pression et non couplé au champ électrique. Cette discontinuité se caractérise par l'expression suivante*

$$\sigma(t) = (u_0 t - \frac{X(0)}{1 + t\sqrt{Kn_0}} + \sqrt{\Delta}) \frac{(1 + t\sqrt{Kn_0})^2}{t\sqrt{Kn_0}(2 + t\sqrt{Kn_0})} \quad (7.149)$$

De plus, la densité dans ce modèle se charge par un Dirac et on a

$$n(y, t) = n_-(y, t) + (n_+(y, t) - n_-(y, t))Y(y) + t\delta(y)(n_- v_- - n_+ v_+)(0, t) \quad (7.150)$$

De plus cette courbe est tangente au second ordre à la courbe  $x_s(t)$

#### 7.8.4 Effet de l'alimentation d'ions à l'anode maintenue durant tout le processus

Cette étude, suite à la précédente, a été proposée par P.A. RAVIART.

Elle consiste à s'intéresser au mouvement d'ions en présence d'électrons en considérant que ces derniers sont immobiles.

Le cas étudié est le problème initial suivant:

$$\begin{cases} n = n_0 \\ \Phi = 0 \\ \Phi = \Phi_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{pour } x = +\infty \\ \text{pour } x = 0 \end{cases} \quad (7.151)$$

Démonstration:

La première étape est identique au cas précédent en supposant que les ions et les électrons sont présents jusqu' à la cathode.

Pour cela, J.GOSSET remarque qu' il faut pour cela imposer la nullité du potentiel et du champ électrique au même point (qui sera appelé par la suite  $x_s(0)$ ). L' étude demande donc de définir un point tel que pour les points inférieurs à  $x_s$  la densité des électrons soit nulle et pour les points supérieurs à  $x_s$  la densité des électrons soit égale à  $n_0$ ,  $c'$  est à dire celle des ions ce qui permet de définir le champ électrique.

La démarche de J.GOSSET consiste à définir la ligne  $x_s(t)$  (comme cela a été conduit au paragraphe précédent ) en tant que surface libre où le champ électrique et le potentiel sont nuls simultanément , ce qui permet de passer d'un modèle d'ions décrivant l'évolution à travers les équations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t E = -\frac{e}{\epsilon_0} nu \\ \partial_x E = \frac{e}{\epsilon_0} n \\ \partial_t u + u \partial_x u = \frac{e}{M} E \end{array} \right. \quad (7.152)$$

à un modèle tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(n) + \partial_x(nu) = 0 \\ \partial_t u + u \partial_x u = \frac{e}{M} E \\ n = n_e \\ \Phi = \frac{kT_e}{e} \text{Log}(n_e) \end{array} \right. \quad (7.153)$$

Dans le premier modèle , il y a couplage entre  $n$  ,  $u$  et  $E$  tandis que dans le second cas , l'égalité des densités des ions et des électrons donne le champ électrique à travers l'existence d'une pression électronique.

Ce second modèle peut aussi s'écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(n) + \partial_x(nu) = 0 \\ \partial_t u + u \partial_x u + \frac{c^2}{n} \partial_x(n) = 0 \\ E = -\frac{kT_e}{en} \partial_x(n) \\ \Phi = \frac{kT_e}{e} \text{Log}(n) + \lambda(t) \\ \text{où } c \text{ est définie par } c^2 = \frac{kT_e}{M} \end{array} \right. \quad (7.154)$$

Ce dernier modèle est régi par les équations d'un P- système qui est classique pour des membres de la communauté Hyperbolique en Mathématique Appliquée ( [154] ) ou les mécaniciens de la Mécanique des Fluides par exemple. Afin que la surface libre ne crée pas de discontinuité, il doit y avoir continuité du flux de l' équation de quantité de mouvement et du flux de l'équation de masse.

La démarche est analogue à celle présentée dans le paragraphe 5.3. Il est à noter

cependant que si la démarche de J.GOSSET est suivie jusqu'au bout , le champ électrique étant alors nul de part et d'autre de la discontinuité (par continuité) les deux modèles sont alors équivalents à

$$\begin{cases} \partial_t(n) + \partial_x(nu) = 0 \\ \partial_t(nu) + \partial_x(nu^2) = 0 \end{cases} \quad (7.155)$$

Dans le référentiel de l'onde ,comme la vitesse est imposée constante et égale à

$$\sqrt{-\frac{e}{M}\Phi_0}$$

Si il y a discontinuité de la masse volumique , les flux sont identiques de part et d'autre de la discontinuité. De plus , comme dans le second domaine on a

$$\Phi = \frac{kT_e}{e} \text{Log}(n_e) + \lambda(t)$$

par intégration entre  $x_s(t)$  et  $+\infty$  et qu'en  $+\infty$  ,  $n = n_0$  et le potentiel est nul ( comme en  $x_s(t)$  par continuité) , on doit avoir de "l'autre côté" de la surface libre, la densité égale à  $n_0$ .

Soit donc,

$$u_0 = \sqrt{-\frac{e}{M}\Phi_0} \quad (7.156)$$

Le problème est donc de résoudre le P - système entre  $x_s(t)$  et  $+\infty$  où les données sont en  $x_s(t)$  , la densité vaut  $n_0$  et la vitesse  $u_0$  positive et en  $+\infty$  la densité vaut  $n_0$  et la vitesse nulle.

Dans le cas qui nous préoccupe comme la vitesse est positive , cela va entraîner un choc entre les états que l'on veut joindre. Si de plus il y a une détente comme cette dernière se propage à la vitesse  $u + c$ , cela entraîne l'existence d'un état intermédiaire  $(n_1, u_1)$  tel que  $u_1 + c < 0 + c$  soit donc une valeur négative pour  $u_1$  et donc un choc pour raccorder à la surface libre.

Il est donc plus simple de directement chercher un état raccordé par un choc à l'état final droit.

Considérons donc par changement de repaire , un état  $(n_1, u = 0)$  (par exemple une paroi solide ) sur laquelle arrive un fluide de densité  $n_0$  à la vitesse  $-u_0$ . Ce problème ( classique ) peut se voir comme un problème de Riemann dans lequel l'état gauche est  $(n_0, u_0)$  et l'état droit  $(n_0, -u_0)$ . Ces deux états sont raccordés par deux chocs ( l'un à vitesse négative  $-\sigma$  , l'autre à vitesse positive  $\sigma$  ).

En écrivant les relations de choc ( qui ne sont que deux par symétrie ) , on a:

$$\begin{cases} M = n_1(0 + \sigma) = n_0(u_0 + \sigma) \\ \frac{M^2}{n_1} + c^2 n_1 = \frac{M^2}{n_0} + c^2 n_0 \end{cases} \quad (7.157)$$

On a alors

$$\frac{M^2}{n_0 n_1} = c^2$$

soit

$$\sigma(u_0 + \sigma) = c^2$$

d'où

$$\sigma = -\frac{u_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{u_0}{2}\right)^2 + c^2}$$

Comme on ne veut conserver que la valeur positive, cela donne

$$\sigma = -\frac{u_0}{2} + \sqrt{\left(\frac{u_0}{2}\right)^2 + c^2}$$

et aussi

$$n_1 = n_0 \frac{u_0 + \sigma}{\sigma} = n_0 \left( \sqrt{\left(\frac{u_0}{2c}\right)^2 + 1} + \frac{u_0}{2c} \right)^2 \quad (7.158)$$

En changeant de référentiel, c'est à dire en traduisant le système à la vitesse  $u_0$ , on obtient comme valeur intermédiaire  $(n_1, u_0)$  raccordé à l'état  $(n_0, 0)$  par un choc  $\sigma_1 = \sigma + u_0 > u_0$  soit

$$\sigma_1 = \frac{u_0}{2} + \sqrt{\left(\frac{u_0}{2}\right)^2 + c^2} \quad (7.159)$$

Il est à noter que le second choc se propage à la vitesse  $\sigma_2 = -\sigma + u_0 < u_0$  permettant de raccorder l'état  $(n_0, 2u_0)$  à l'état  $(n_1, u_0)$ .

En revenant à notre problème initial, on a pu construire une solution formée de deux états constants (pour la densité et la vitesse) séparés par une discontinuité. Cela conduit à avoir un potentiel formé par deux états constants séparés par la même discontinuité et donc à un champ électrique formé d'une masse de Dirac. En outre comme le potentiel est nul en  $X(t)$  par continuité il est nul de l'autre côté de la surface libre et tel qu'en l'infini, il vaille  $\Phi_\infty$  tel que

$$\Phi_\infty = \frac{kT_e}{e} \text{Log}\left(\frac{n_0}{n_1}\right) < 0 \quad (7.160)$$

Il en résulte que la Différence de Potentiel entre 0 et l'infini n'est pas  $\Phi_0$  mais  $\Phi_0 - \Phi_\infty$

En résumé soit donc une Différence de Potentiel donnée négative  $\Phi_1$ . On pose alors

$$\Phi_0 = \Phi_1 + \Phi_\infty < 0$$

et on applique le raisonnement précédent.

Ceci peut se résumer dans le théorème suivant

**Théorème 43** *Le modèle de surface libre se caractérise par l'évolution d'une seule population, celle des ions, d'un côté de la discontinuité et de l'autre côté*

par un modèle ionique prenant en compte la présence des électrons et l'équilibre des charges.

Dans ce cas, soient données initialement le potentiel négatif  $\Phi_0$  et la densité positive de charge  $n_0$ . La solution du système est définie par deux discontinuités  $X(t)$  et  $Y(t)$ .

Soient alors les quantités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} c^2 = \frac{kT_e}{M} \\ n_1 = n_0 \left( \sqrt{\left(\frac{u_0}{2c}\right)^2 + 1} + \frac{u_0}{2c} \right)^2 \\ \Phi_\infty = \frac{kT_e}{e} \text{Log}\left(\frac{n_0}{n_1}\right) < 0 \\ \Phi_1 = \Phi_0 + \Phi_\infty < 0 \\ u_0 = \sqrt{-\frac{\epsilon_0}{M} \Phi_1} > 0 \\ v_0 = \frac{u_0}{2} + \sqrt{\left(\frac{u_0}{2}\right)^2 + c^2} > u_0 \\ x(0) = \sqrt{-2\frac{\epsilon_0}{e} \frac{\Phi_1}{n_0}} > 0 \end{array} \right. \quad (7.161)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} X(t) = x(0) + u_0 t \\ Y(t) = x(0) + v_0 t > X(t) \end{array} \right. \quad (7.162)$$

La solution s'écrit alors :

$$n(x, t) = \begin{cases} \frac{n_0}{\left(1 + t \sqrt{\frac{e^2}{M\epsilon_0} n_0}\right)^2} & \text{pour } 0 < x < X(t) \\ n_1 & \text{pour } X(t) < x < Y(t) \\ n_0 & \text{pour } Y(t) < x \end{cases} \quad (7.163)$$

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0 + 2\frac{u_0}{x(0) + u_0 t} (x - x(0) - u_0 t) & \text{pour } 0 < x < X(t) \\ u_0 & \text{pour } X(t) < x < Y(t) \\ 0 & \text{pour } Y(t) < x \end{cases} \quad (7.164)$$

$$E(x, t) = \begin{cases} \frac{e}{2\epsilon_0} \frac{n_0}{(1 + t\sqrt{\frac{e^2}{M\epsilon_0}n_0})^2} (x - x(0) - u_0t) & \text{pour } 0 < x < X(t) \\ -\Phi_\infty \delta(x - y(t)) & \text{pour } X(t) < x \end{cases} \quad (7.165)$$

$$\Phi(x, t) = \begin{cases} -\frac{e}{2\epsilon_0} \frac{n_0}{(1 + t\sqrt{\frac{e^2}{M\epsilon_0}n_0})^2} (x - x(0) - u_0t)^2 & \text{pour } 0 < x < X(t) \\ 0 & \text{pour } X(t) < x < Y(t) \\ \Phi_\infty & \text{pour } Y(t) < x \end{cases} \quad (7.166)$$

## 7.9 Etude d'un problème d'ions en présence d'électrons pour lequel la solution reste régulière

### 7.9.1 Rappel des équations prises en compte

#### Evolution d'une population

On considère une population ionique qui subit les effets de courants Electrique et Magnétique. Un tel plasma est régi par les lois de MAXWELL et dans une approche Mécanique des Milieux Continus ( si on souhaite dans un premier temps supposer que l'écoulement est suffisamment dense pour ne pas être modélisé par l'équation de BOLTZMANN ) par la loi fondamentale de la Mécanique.

On définit par

$\vec{E}$  le champ électrique,  $\vec{B}$  le champ magnétique,  $\vec{v}$  le champ de vitesse,  $n$  la densité du fluide,  $\vec{x}$  la coordonnée spatiale et  $t$  la coordonnée temporelle.

Les équations régissant le mouvement forment le système (S1) qui s'écrit:

$$(S1) \left\{ \begin{array}{l} (1./c^2) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \text{rot} \vec{B} = -\mu_0 n e \vec{v} \quad (\text{équation d' AMPERE}) \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot} \vec{E} = 0 \quad (\text{équation de FARADAY}) \\ \text{div}(\vec{B}) = 0 \quad (\text{équation de la divergence}) \\ \text{div}(\epsilon_0 \vec{E}) = en \quad (\text{équation de GAUSS}) \\ \frac{\partial(n \vec{v})}{\partial t} + \vec{\nabla}(n \vec{v} \otimes \vec{v}) = (\frac{e}{M})n(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \end{array} \right. \quad (7.167)$$

Ce système, dans lequel les effets de pressions sont négligés, correspond à choisir aussi une température des ions nulle et en définissant les constantes par  $\epsilon_0$  la permittivité relative électrique du milieu

$\mu_0$  la permittivité relative magnétique du milieu et  
 $c$  la vitesse de la lumière  
ces quantités sont reliées par la relation célèbre:

$$\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1. \quad (7.168)$$

Rappel:

On rappelle que dans les unités M.K.S.A. les valeurs respectives sont  $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C/m V}$ ,  $\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6} \text{ T m /A}$  et  $c$  vaut  $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ .

Ce problème ainsi exprimé n'est pas présenté en terme de lois de conservation. Il est par ailleurs bien connu que les équations de MAXWELL contiennent la loi de conservation de la masse. En effet, la première équation de (1.1) dont on prend la divergence et la quatrième équation de (1.1) dont on prend la dérivée temporelle conduisent à l'équation :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(n \vec{v}) = 0. \quad (7.169)$$

Pour ce faire, il faut utiliser l'égalité  $\text{div}(\text{rot} \vec{B}) = 0$ .

Afin d'étudier ce système, on se restreindra dans cette étude au cas où le champ magnétique est identiquement nul. Ceci a une conséquence importante: dans le cas où champs électrique et magnétique cohabitent, on sait que le système des équations de MAXWELL est invariant par changement de repère relativiste et non galiléen.

Cela pose le problème de l'invariance du système formé par le couplage des équations de MAXWELL et de la loi fondamentale de la Mécanique qui peut donc conduire à devoir poser la question de la validité de ces équations et du remplacement éventuel des lois de la Mécanique classique par la loi de BOLTZMANN.

Lorsque on se limite à la prise en compte du champ électrique, il est aisé de vérifier que le système est alors invariant par changement de repère galiléen.

En outre la troisième équation de (S1) conduit si  $\vec{B} = \vec{0}$  à l'existence d'un potentiel  $\phi$  tel que

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi \quad (7.170)$$

Cela donne un système simplifié (S2) qui a comme inconnues le potentiel, la densité ionique, la vitesse des ions qui s'exprime ainsi :

$$(S2) \left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{e}{\epsilon_0} n \vec{v} \\ \text{div}(\epsilon_0 \vec{E}) = en \\ \frac{\partial(n\vec{v})}{\partial t} + \vec{\nabla}(n\vec{v} \otimes \vec{v}) = \frac{e}{M} n \vec{E} \end{array} \right. \quad (7.171)$$

Ce nouveau système est plus simple à résoudre car contenant un nombre réduit d'inconnues.

### Evolution d'un plasma formé d'ions et d'électrons

On considère désormais un plasma qui subit les effets de courants Electrique et Magnétique. Un tel plasma est régi aussi par les lois de MAXWELL et par les lois de la Mécanique des Milieux Continus si l'écoulement est suffisamment dense pour ne pas être modélisé par l'équation de BOLTZMANN.

On définit par  $\vec{E}$  le champ électrique,  $\vec{B}$  le champ magnétique,  $\vec{u}_e$  le champ de vitesse des électrons,  $\vec{u}_i$  le champ de vitesse des ions,  $\rho_e$  la masse volumique des électrons,  $\rho_i$  la masse volumique des ions,  $n_e$  la densité des électrons,  $n_i$  la densité des ions,  $\vec{x}$  la coordonnée spatiale et  $t$  la coordonnée temporelle.

Soient alors:

$m$  la masse élémentaire de l'électron,

$M$  la masse élémentaire de l'ion,

$e$  la charge élémentaire.

Rappel: On rappelle que  $m$  vaut  $9.11 \cdot 10^{-31}$  kg,  $M$  vaut  $1.67 \cdot 10^{-27}$  kg et  $e$  vaut  $1.61 \cdot 10^{-19}$  C.

Il est évident que l'on a les relations suivantes:

$$\rho_e = mn_e \text{ et } \rho_i = Mn_i \quad (7.172)$$

Les équations régissant le mouvement s'écrivent donc :

$$(S3) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - c^2 \overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \frac{e}{\epsilon_0} (n_e \vec{u}_e - n_i \vec{u}_i) \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overrightarrow{rot}(\vec{E}) = 0. \\ \operatorname{div}(\vec{B}) = 0. \\ \operatorname{div}(\epsilon_0 \vec{E}) = e(n_i - n_e) \\ \frac{\partial(n_e \vec{u}_e)}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla}(n_e \vec{u}_e \otimes \vec{u}_e + P_e) = -\left(\frac{e}{m}\right) n_e (\vec{E} + \vec{u}_e \wedge \vec{B}) \\ \frac{\partial(n_i \vec{u}_i)}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla}(n_i \vec{u}_i \otimes \vec{u}_i + P_i) = \left(\frac{e}{M}\right) n_i (\vec{E} + \vec{u}_i \wedge \vec{B}) \end{array} \right. \quad (7.173)$$

Dans ce type d'approche, on suppose donc qu'il n'y a pas d'interaction mécanique.

De plus, il est évident que si pour des raisons de rapport de masse, on suppose la vitesse moyenne des électrons nulle, ceci représente une solution du problème qui vérifie un système assez proche du système (S1) défini dans le paragraphe précédent.

Dans ce système (S3), on peut donc chercher

- le champ électrique,
- le champ magnétique,
- la densité des ions,
- la vitesse des ions,

en considérant que la densité des électrons est stationnaire et la vitesse des électrons est nulle.

Si on suppose de plus que le champ magnétique est nul, le système (S3) devient invariant par changement de repère galiléen. En outre la troisième équation de (S3) conduit si  $\vec{B} = \vec{0}$  à l'existence d'un potentiel  $\phi$  tel que

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\nabla} \phi \quad (7.174)$$

Cela conduit à un système simplifié qui a comme inconnues le potentiel, la densité des ions, la vitesse des ions qui s'exprime ainsi:

$$(S4) \left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{e}{\epsilon_0} n_i \vec{u}_i \\ \text{div}(\epsilon_0 \vec{E}) = e(n_i - n_e) \simeq 0 \\ \frac{\partial(\rho \vec{u}_i)}{\partial t} + \vec{\nabla}(M n_i \vec{u}_i \otimes \vec{u}_i) = e n_i \vec{E} \end{array} \right. \quad (7.175)$$

Ce nouveau système (S4) est plus simple à résoudre car il contient un nombre réduit d'inconnues. Ce dernier système suppose que les vitesses des électrons sont d'un ordre de grandeur inférieur dans l'équation de la dynamique des électrons aux termes de forces venant de la pression et du champ électrique.

Inversement dans l'équation d'évolution des ions, la pression ionique est négligée ainsi que le champ électrique associé à l'équation de GAUSS et conduit à l'équilibre des charges.

En supposant (par exemple) les électrons en équilibre isotherme (on aurait pu être choisi un équilibre isentropique), avec une loi du type par exemple

$$P_e = k n_e T_e \quad (7.176)$$

cela conduirait au même type de traitement, le système se ramène au système (S5) qui s'écrit

$$(S5) \left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{e}{\epsilon_0} n_i \vec{u}_i \\ \frac{\partial(\rho \vec{u}_i)}{\partial t} + \vec{\nabla}(M n_i \vec{u}_i \otimes \vec{u}_i) = e n_i \vec{E} \\ \Phi = \frac{k T_e}{e} \text{Log}\left(\frac{n_e}{n_0}\right) = \frac{k T_e}{e} \text{Log}\left(\frac{n_i}{n_0}\right) \end{array} \right. \quad (7.177)$$

où  $n_0$  est une constante assurant la nullité du Potentiel.

Dans le cas monodimensionnel, en posant maintenant  $n_i = n$ ,  $u_i = u$ , on obtient le système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{e}{\epsilon_0} n u \\ \Phi = \frac{kT_e}{e} \text{Log} \frac{n}{n_0} \\ \frac{\partial(nu)}{\partial t} + \frac{\partial(nu^2)}{\partial x} = \frac{e}{M} n E \end{array} \right. \quad (7.178)$$

Ce cas conduit au système conservatif suivant (S5')

$$(S5') \left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi \\ \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{e}{\epsilon_0} n u \\ \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nu)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(nu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( nu^2 + \frac{kT_e}{M} n \right) = 0 \end{array} \right. \quad (7.179)$$

Ce système n'est rien d'autre que le P-système associé à une vitesse du son défini par

$$c^2 = \frac{kT_e}{M} \quad (7.180)$$

#### Problème liés à la Physique de l'extraction

Cette partie est dévolue à a modélisation du procédé SILVA développé au CEA et dont F.DONEDDU a dégagé une synthèse intéressante au niveau de la modélisation dans [41] que nous ne faisons que reprendre.

On s'intéresse aux mouvements lents des ions et non aux mouvements rapides des électrons.. Une interprétation physique peut être celle ci:

Dans un tel mouvement, les électrons subissent de petites perturbations à haute fréquence, c'est à dire pour  $\omega > \omega_{pe}$  ou proche de

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{e^2 n}{\epsilon_0 m}}$$

petites perturbations qui se propagent ou sont amorties sur des distances grandes devant la longueur de DEBYE

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_b T_e}{e^2 n}}$$

Ces petites perturbations observées sur des temps grands devant la fréquence  $\omega_{pe}$  soit grands devant  $\omega_{pe}^{-1}$  conduisent à des moyennes nulles.

Durant ce même intervalle de temps, les électrons subissent de petites perturbations de basse fréquence et le mouvement des ions perturbe celui des électrons par suite du couplage électrique entre les charges. Ce mouvement lent du point de vue des électrons constitue une perturbation à basse fréquence. Aussi ces perturbations sont amorties sur une distance de l'ordre de  $\lambda_D$ .

Les électrons apparaissent ne se déplacer que lentement en réponse aux forces électriques induites par le mouvement lent des ions. Cela revient donc à négliger leur inertie et donc dans l'équation du mouvement des électrons en l'absence de champ magnétique, l'équation devient stationnaire et s'écrit

$$\frac{\partial P_e}{\partial x} = -n_e e E \quad (7.181)$$

où  $P_e$  désigne la pression électronique,  $n_e$  leur densité et  $E$  le champ électrique. On a donc perdu toute information sur la dynamique électronique sur les temps brefs ainsi que sur l'échelle spatiale comparable à  $\lambda_D$ . Cette situation se présente, dans l'extraction de SILVA, lorsque le photoplasma est créé dans une zone où règne un fort champ électrique dont l'effet est d'expulser très rapidement du plasma une proportion importante des électrons.

Lorsque en outre, on suppose que les électrons sont isothermes, et comme le champ électrique dérive d'un potentiel, si on note  $n_{e0}$  la densité électronique en un point où le potentiel est  $V_0$ , on obtient simplement à partir de l'équation de quantité de mouvement des électrons, une équation devenue stationnaire

$$n_e = n_{e0} \exp(e(V - V_0)/k_b T_e) \quad (7.182)$$

Ce modèle suppose donc les électrons isothermes et sans inertie. Cela conduit

donc en 1D au système d'équation suivant:

$$(S6) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial n_i u_i}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial n_i M u_i}{\partial t} + \frac{\partial n_i M u_i^2 + P_i}{\partial x} = n_i e E \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( n_i \frac{P_i}{n_i^{\gamma_i}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( n_i u_i \frac{P_i}{n_i^{\gamma_i}} \right) = 0 \\ \frac{\partial(\epsilon_0 E)}{\partial x} = e(n_i - n_e) \\ \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_e u_e) = 0 \\ n_e = n_{e0} \exp(e(V - V_0)/k_b T_e) \end{array} \right. \quad (7.183)$$

Ce système admet comme inconnues

$n_i$  la densité ionique

$u_i$  la vitesse ionique

$E$  le champ électrique

$n_e$  la densité électronique

$u_e$  la vitesse électronique

avec comme données  $P_i$  la pression ionique, par exemple nulle,  $T_e$  la température électronique et  $V_0$  une donnée sur le potentiel ( lui même relié au champ électrique par  $E = -\partial V/\partial x$  )

Ce sera ce système qui sera par la suite étudié •

### 7.9.2 Construction de solutions de type CHILD-LONGMUIR

Considérons une seule population formée d' ions régie en monodimensionnel par le système ( S2 ).

On a donc comme système le système défini par

$$(SAV) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{e}{\varepsilon_0} nu \\ \frac{\partial(\varepsilon_0 E)}{\partial x} = en \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -E \\ \frac{\partial(nu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (nu^2 - \frac{\varepsilon_0}{2M} E^2) = 0 \\ \text{ou encore dans les zones régulières } \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{e}{M} E \end{array} \right. \quad (7.184)$$

Pour cela, on se sait qu' une solution stationnaire de ce problème peut être définie par des solutions de type CHILD-LANGMUIR en stationnaire sous la forme

$$\Phi = kx^{4/3}$$

Aussi, considérons un changement de variable de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} y = x - \sigma(t) \\ \tau = t \end{array} \right. \quad (7.185)$$

Dans ce nouveau référentiel, le système (SAV) s'écrit

$$(SAV') \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E}{\partial \tau} = -\frac{e}{\varepsilon_0} nv \\ \frac{\partial(\varepsilon_0 E)}{\partial y} = en \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -E \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{e}{M} E - \sigma''(\tau) \end{array} \right. \quad (7.186)$$

où  $u = v - \sigma'(t)$

Dans ce cadre, on peut chercher des solutions en s'inspirant des solutions stationnaires en posant par exemple

$$E = \frac{e}{\varepsilon_0} (C(t) + \lambda y^{1/3})$$

On en déduit par les deux premières équations de (SAV')

$$\begin{cases} n = \frac{\lambda}{3} y^{-2/3} \\ v = -C'(t) \frac{3}{\lambda} y^{2/3} \end{cases} \quad (7.187)$$

Cela conduit pour l'équation de quantité de mouvement à l'équation suivante

$$-\frac{3}{\lambda} C''(t) y^{2/3} + (C'(t))^2 \frac{6}{\lambda^2} y^{1/3} = \frac{e^2}{M\varepsilon_0} (C(t) + \lambda y^{1/3}) - \sigma''(t)$$

Par identification des puissances en  $y$ , on en déduit que

$$\begin{cases} C''(t) = 0 \\ C'(t)^2 \frac{6}{\lambda^2} = \frac{e^2}{M\varepsilon_0} \lambda \\ \frac{e^2}{M\varepsilon_0} C(t) = \sigma''(t) \end{cases} \quad (7.188)$$

d'où

$$\begin{cases} C(t) = a_0 t + b_0 \\ \lambda^3 = 6 \frac{M\varepsilon_0}{e^2} a_0^2 \text{ ou encore } \lambda = \left( 3 \frac{n_0 a_0^2}{\alpha} \right)^{1/3} \\ \sigma(t) = \frac{e^2}{M\varepsilon_0} \left( \frac{a_0}{6} t^3 + \frac{b_0}{2} t^2 + c_0 t + d_0 \right) \end{cases} \quad (7.189)$$

Ce système conduit donc à la proposition suivante

**Proposition 67** *Le système accepte des solutions de type CHILD-LANGMUIR qui dépendent de 4 paramètres  $a_0, b_0, c_0, d_0$  quelconques*

$$\begin{cases} n(x, t) = \frac{\lambda}{3} \frac{1}{(x - \sigma(t))^{2/3}} \\ u(x, t) = -\frac{3}{\lambda} a_0 (x - \sigma(t))^{2/3} + \frac{e^2}{M\varepsilon_0} \left( \frac{a_0}{2} t^2 + b_0 t + c_0 \right) \\ E(x, t) = \frac{e}{\varepsilon_0} (a_0 t + b_0 + \lambda (x - \sigma(t))^{1/3}) \\ \lambda = \left( 3 \frac{n_0 a_0^2}{\alpha} \right)^{1/3} \\ \sigma(t) = \frac{e^2}{M\varepsilon_0} \left( \frac{a_0}{6} t^3 + \frac{b_0}{2} t^2 + c_0 t + d_0 \right) \end{cases} \quad (7.190)$$

Ce résultat aurait pu être directement obtenu à travers l'équation de BOLTZMAN couplée aux équations de MAXWELL.

$$(SAV_0) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{e}{\varepsilon_0} nU \\ \frac{\partial(\varepsilon_0 E)}{\partial x} = en \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -E \\ \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{e}{M} E \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \\ \text{avec } n = \int_{-\infty}^{+\infty} f dv \\ \text{et } nU = \int_{-\infty}^{+\infty} f v dv \end{array} \right. \quad (7.191)$$

Aussi, considérons un changement de variable de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} y = x - \sigma(t) \\ w = v - \sigma'(t) \\ \tau = t \end{array} \right. \quad (7.192)$$

Pour cela, il suffit de considérer le système suivant

$$(SAV_0') \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E}{\partial \tau} = -\frac{e}{\varepsilon_0} nV \\ \frac{\partial(\varepsilon_0 E)}{\partial y} = en \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -E \\ \frac{\partial f}{\partial \tau} + w \frac{\partial f}{\partial y} - \left( \frac{e}{M} E + \sigma''(\tau) \right) \frac{\partial f}{\partial w} = 0 \\ \text{avec } n = \int_{-\infty}^{+\infty} f dw \\ \text{et } nV = \int_{-\infty}^{+\infty} f w dw \end{array} \right. \quad (7.193)$$

où  $V = U - \sigma'(\tau)$ . Désormais on notera  $\tau$  par  $t$ . On peut poser

$$F = E + \frac{M}{e} \sigma''(t)$$

Le système s'écrit alors

$$(SAV_0'') \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{e}{\varepsilon_0} nV + \frac{M}{e} \sigma'''(t) \\ \frac{\partial(\varepsilon_0 F)}{\partial y} = en \\ \frac{\partial f}{\partial t} + w \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{e}{M} F \frac{\partial f}{\partial w} = 0 \\ \text{avec } n = \int_{-\infty}^{+\infty} f dw \\ \text{et } nV = \int_{-\infty}^{+\infty} f w dw \end{array} \right. \quad (7.194)$$

On en déduit l'existence d'une solution stationnaire sur le couple  $(f, F)$  si la première équation est identiquement nulle. Or  $nV$  étant une intégrale en vitesse de  $wf$ , ne dépend alors que de l'espace. Pour que l'égalité

$$nV = \frac{M\varepsilon_0}{e^2} \sigma'''(t)$$

soit satisfaite, il faut et il suffit que chaque quantité soit constante c'est à dire que  $\sigma$  soit une fonction du troisième degré en temps et que  $nV$  soit constant c'est à dire conduise à une solution de type CHILD-LONGMUIR comme trouvé en utilisant les équations de la Mécanique.

**Théoreme 44** *On peut des solutions instationnaires de type CHILD LONGMUIR dont les caractéristiques sont données par le système (7.190).*

*Ce système dépend 4 paramètres quelconques et la solution correspond à une solution "presque" stationnaire dans un référentiel à dérivée de l'accélération constante.*

### 7.9.3 Etude de problème d'ions en présence d'électrons

#### Présentation du problème

Cette étude a été inspirée par P.A.RAVIART à partir des travaux menés par J.GOSSET( [79],[80], [81]) .

Elle consiste à s'intéresser au mouvement d'ions en présence d'électrons en considérant que ces derniers sont immobiles, avec  $u_0$  la vitesse initiale des ions,  $n_0$  la densité initiale des ions égale à celle des électrons supposés immobiles et  $\Phi$  le potentiel initial défini à l'anode et la cathode.

Le cas étudié consiste à définir le problème initial suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 0 \quad \text{si } 0 < x < L \\ \Phi = 0 \quad \text{pour } x = L > 0 \\ \Phi = \Phi_0 \quad \text{pour } x = 0 \\ n_0(x) = \begin{cases} n_0 & \text{si } l < x < L \\ 0 & \text{si } 0 < x < l \end{cases} \end{array} \right. \quad \text{où } L \text{ et } l \text{ sont des paramètres positifs tels que } l < L \quad (7.195)$$

Remarque: L peut être égal à  $+\infty$

### Calcul du champ électrique et du potentiel initiaux afin de définir la position de la Surface Libre initiale

Afin de s'assurer de la compatibilité des données initiales, il faut donc que la contrainte de l'équation de GAUSS ( cf. équation 4 du système (S1) ) soit satisfaite initialement.

La première étape consiste à faire en sorte que les données initiales soient compatibles avec les conditions limites associées.

Pour cela, J.GOSSET remarque qu' il faut imposer la nullité du potentiel et du champ électrique au même point (qui sera appelé par la suite  $x_s(0)$  ) tel que  $l < x_s(0) < L$ .

L' étude demande donc de définir un point tel que pour les points inférieurs à  $x_s$  la densité des électrons soit nulle et pour les points supérieurs à  $x_s$  la densité des électrons soit égale à  $n_0$  , c' est à dire celle des ions ce qui permet alors de définir le champ électrique.

Nous allons suivre la méthodologie développée par J.GOSSET en 1D.

Initialement , on peut écrire que

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x E(x, t = 0) = \frac{e}{\epsilon_0} n_0(x) \\ \partial_x \Phi(x, t = 0) = -E(x, t = 0) \end{array} \right. \quad (7.196)$$

Cela conduit à

$$\left\{ \begin{array}{l} E(x, 0) = \lambda_0 + \frac{e}{\epsilon_0} \int_0^x n_0(y) dy \\ \Phi(x, 0) = \Phi_0 - \lambda_0 x - \frac{e}{\epsilon_0} \int_0^x dy \left( \int_0^y n_0(z) dz \right) \end{array} \right. \quad (7.197)$$

ou encore

$$\left\{ \begin{array}{l} E(x, 0) = \lambda_0 + \frac{e}{\epsilon_0} \int_0^x n_0(y) dy \\ \Phi(x, 0) = \Phi_0 - \lambda_0 x - \frac{e}{\epsilon_0} \int_0^x (x - y) n_0(y) dy \end{array} \right. \quad (7.198)$$

La recherche de  $x_s(0)$  s'écrit donc

$$\begin{cases} \Phi(x_s(0), 0) = 0 \\ E(x_s(0), 0) = 0 \end{cases} \quad (7.199)$$

ce qui conduit à

$$\begin{cases} \Phi_0 = \lambda_0 x_s(0) + \frac{e}{\epsilon_0} \int_0^{x_s(0)} (x_s(0) - z) n_0(z) dz \\ 0 = \lambda_0 + \frac{e}{\epsilon_0} \int_0^{x_s(0)} n_0(y) dy \end{cases} \quad (7.200)$$

soit encore

$$\Phi_0 + \frac{e}{\epsilon_0} \int_0^{x_s(0)} z n_0(z) dz = 0$$

Dans le premier cas, si on recherche  $x_s(0) > l$ , on doit avoir

$$\Phi_0 + \frac{e}{\epsilon_0} \int_0^l z n_0(z) dz + \frac{e}{\epsilon_0} \int_l^{x_s(0)} z n_0(z) dz = 0$$

d'où

$$(x_s(0))^2 = l^2 - 2 \frac{\Phi_0 \epsilon_0}{n_0 e}$$

ce qui conduit à une solution (unique) que dans le cas où  $\Phi_0$  est négatif qui s'écrit:

$$x_s(0) = l \sqrt{1 - 2 \frac{\Phi_0 \epsilon_0}{n_0 e l^2}} > l \quad (7.201)$$

Par contre, si on cherche  $x_s(0) \leq l$ , la seule solution est obtenue pour  $\Phi_0 = 0$  (et  $l=0$ ). Le seul cas donc possible est le premier pour lequel  $\lambda_0$  est obtenu avec

$$E_0 = \lambda_0 = -\frac{e}{\epsilon_0} \int_0^{x_s(0)} n_0(z) dz = -\frac{e}{\epsilon_0} n_0(x_s(0) - l) < 0 \quad (7.202)$$

Pour la solution définie par (7.201), on obtient donc:

$$\text{Pour } 0 < x < l \begin{cases} n(x, 0) = 0 \\ E(x, 0) = \lambda_0 = -\frac{e}{\epsilon_0} n_0(x_s(0) - l) \\ \Phi(x, 0) = \Phi_0 + \frac{e}{\epsilon_0} n_0(x_s(0) - l)x \end{cases} \quad (7.203)$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} n(x, 0) = n_0 \\ E(x, 0) = \frac{e}{\epsilon_0} n_0 (x - x_s(0)) = \lambda_0 + \frac{e}{\epsilon_0} \int_l^x n_0 dz \\ \Phi(x, 0) = -\frac{e}{2\epsilon_0} n_0 (x - x_s(0))^2 = \\ \Phi(l, 0) - \frac{e}{2\epsilon_0} n_0 ((x - x_s(0))^2 - (l - x_s(0))^2) = \\ \Phi_0 + \frac{e}{2\epsilon_0} n_0 ((x_s(0))^2 - l^2) - \frac{en_0}{2\epsilon_0} (x - x_s(0))^2 \end{array} \quad (7.204)$$

$$\text{Pour } x_s(0) < x \left\{ \begin{array}{l} n(x, 0) = n_0 \\ E(x, 0) = 0 \\ \Phi(x, 0) = 0 \end{array} \right. \quad (7.205)$$

Remarque 1: Il est facile de remarquer que  $\Phi(l, 0) < 0$ .

Remarque 2: Si  $\frac{\Phi_0 \epsilon_0}{n_0 l^2 e} \ll 1$ , il est aisé d'observer que:

$$x_s(0) \simeq l - \frac{\Phi_0 \epsilon_0}{n_0 e l}$$

et

$$\lambda_0 \simeq \frac{\Phi_0}{l} \bullet \quad (7.206)$$

#### Définition du système à résoudre dans (SAM) et (SAV)

En fonction des données initiales fixées par (7.195) (ou (7.203), (7.204), (7.205)), le système à résoudre correspond au système S2 (en monodimensionnel appelé (SAV)) (comme système aval).

Soient donc  $n$  la densité des ions,  $u$  la vitesse des ions,  $\Phi$  le potentiel,  $E$  le champ électrique tels que les données initiales soient celles de (7.203), (7.204), (7.205), ce système est régi en notant par  $n_e$  la densité des électrons (comme dans (7.195)) par les équations suivantes

$$(SAV) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{e}{\epsilon_0} nu \\ \frac{\partial(\epsilon_0 E)}{\partial x} = en \\ \frac{\partial(nu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( nu^2 - \frac{\epsilon_0}{2M} E^2 \right) = 0 \end{array} \right. \quad (7.207)$$

dans le domaine ( à définir tel que  $x \leq x_s(t)$  ) où les ions sont sans interaction avec les électrons, ces derniers étant considérés comme non présents.

Par la suite, nous allons développer la méthodologie Lagrangienne dans le cas monofluide en utilisant l' idée développée par F.DONEDDU et J.GOSSET (cf [79]) selon laquelle le cas bifluide se ramène au cas monofluide à travers une surface libre où le potentiel et le champ électrique s' annulent. Jusqu' à présent, les équations supposent que dans le modèle (SAV) les électrons ne sont pas présents.

L'idée essentielle consiste à rechercher un domaine borné par un point (dépendant du temps )  $x_s(t)$ . En aval de ce domaine ( dans le choix d'orientation des abscisses fait par J.GOSSET c'est à dire pour  $x \leq x_s(t)$  ), il s'agit de résoudre les équations d' évolution d'une seule population ( celle des ions ) qui obéissent aux deux premières lois de Maxwell (équations de Gauss et d' Ampère) et à l' équation de quantité de mouvement sans traiter explicitement les électrons. Dans l'autre domaine, les équations sont données ( donc pour  $x \geq x_s(t)$  ) par le système ( S5) pour lequel il y a égalité de la densité des ions et des électrons appelé (SAM) ( comme système amont).

$$(SAM) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t(n) + \partial_x(nu) = 0 \\ \partial_t u + u \partial_x u = \frac{e}{M} E \\ \Phi = \frac{kT_e}{e} \text{Log} \left( \frac{n}{n_0} \right) \end{array} \right. \quad (7.208)$$

Ce dernier système correspond à un traitement des électrons qui sont définis à travers une équation stationnaire de quantité de mouvement telle que les charges ioniques et électroniques s' équilibrent.

Les données initiales sont telles que , pour  $x_s(0) < x < L$

$$n(x, 0) = n_e(x, 0) = n_0 \quad (7.209)$$

Il est à noter que, dans ce cadre, la solution proposée en ( 7.205) est une solution stationnaire du problème défini par (SAM) telle que champ électrique et potentiel soient continus.

Remarque:

Dans toute la suite on posera, afin de ne pas alourdir les calculs

$$\alpha = \frac{e^2}{2M\epsilon_0} \quad (7.210)$$

#### 7.9.4 Calcul d'une solution régulière dans la partie Aval

##### Etude du problème (SAV) par changement Lagrangien

Le système (SAV) défini en (7.207) s'écrit par changement Lagrangien

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E}{\partial \tau} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{e}{M} E \\ \frac{\partial(\epsilon_0 E)}{\partial y} = e J n \\ \frac{\partial X}{\partial \tau} = u \\ \frac{\partial(nJ)}{\partial \tau} = 0 \end{array} \right. \quad (7.211)$$

où on a posé

$$dx = Jdy + u d\tau \text{ et } dt = d\tau$$

Par la suite pour simplifier les notations, on gardera  $t$  pour le temps, que l'on soit dans le référentiel Lagrangien ou Eulérien.

Tout calcul fait, en utilisant les conditions initiales (7.195) et les mêmes notations que dans le cas monofluide, on obtient pour  $0 < y \leq l$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(X_-(t; y, 0), t) = E_0 = \lambda_0 < 0 \\ u(X_-(t; y, 0), t) = \frac{e}{M} t E_0 < 0 \\ X_-(t; y, 0) = y + \frac{e}{2M} E_0 t^2 < y \end{array} \right. \quad (7.212)$$

En particulier, en  $x = l$ , on obtient:

$$X_-(t; l, 0) = l + \frac{e}{2M} E_0 t^2 = l - \frac{e^2}{2M\epsilon_0} n_0(x_*(0) - l)t^2$$

$$u(X_-(t; l, 0), t) = -\frac{e^2}{M\epsilon_0} n_0(x_s(0) - l)t < 0$$

Définissons donc  $t_0$  tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_-(t_0; l, 0) = 0 \\ \text{ou } t_0 = \sqrt{\frac{2M\epsilon_0}{e^2 n_0} \frac{l}{x_s(0) - l}} \simeq \left(-\frac{2M}{e} \frac{l^2}{\Phi_0}\right)^{1/2} \end{array} \right. \quad (7.213)$$

On obtient donc comme solution pour  $t < t_0$  et  $x < X_-(t; l, 0)$

$$\left\{ \begin{array}{l} E(x, t) = -\frac{e}{\epsilon_0} n_0(x_s(0) - l) < 0 \\ u(x, t) = -\frac{e^2}{M\epsilon_0} n_0(x_s(0) - l)t < 0 \\ n(x, t) = 0 \\ \Phi = \Phi_0 + \frac{en_0}{\epsilon_0} (x_s(0) - l)x \end{array} \right. \quad (7.214)$$

On en déduit que:

$$\Phi(X_-(t; l, 0), t) = \Phi_0 + \frac{en_0}{\epsilon_0} (x_s(0) - l) \left( l - \frac{e^2}{2M\epsilon_0} n_0(x_s(0) - l)t^2 \right) \quad (7.215)$$

De même, on peut poursuivre l'étude pour  $y \in [l, x_s(0)]$

On obtient aisément, par l'étude Lagrangienne, que:

$$\left\{ \begin{array}{l} E(X_+(t; y, 0), t) = \frac{e}{\epsilon_0} n_0(y - x_s(0)) \\ u(X_+(t; y, 0), t) = 2\alpha(y - x_s(0))t < 0 \\ X_+(t; y, 0) = y + \frac{e^2}{2M\epsilon_0} n_0(y - x_s(0))t^2 < y \\ \text{d'où } J = \frac{\partial X_+(t; y, 0)}{\partial y} = 1 + \alpha t^2 > 0 \\ \text{et } n(X_+(t; y, 0), t) = \frac{n_0}{1 + \alpha t^2} \end{array} \right. \quad (7.216)$$

Dans cette approche, il est facile de noter que

$$X_-(t; l, 0) = X_+(t; l, 0)$$

et que

$$u(X_+(t; l, 0), t) = \frac{e^2}{M\epsilon_0} n_0(l - x_s(0))t = u(X_-(t; l, 0), t) < 0$$

Il y a donc continuité des caractéristiques et du champ de vitesse.  
On en déduit donc pour le champ électrique que:

$$\begin{aligned} E(x, t) &= \frac{e}{\epsilon_0} n_0 \left( \frac{x + \alpha x_s(0) t^2}{1 + \alpha t^2} - x_s(0) \right) \\ E(x, t) &= \frac{e}{\epsilon_0} n_0 \frac{x - x_s(0)}{1 + \alpha t^2} \end{aligned} \quad (7.217)$$

Par la même approche et en écrivant la continuité du potentiel en  $X_+(t; l, 0)$ , on obtient:

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) &= \Phi(X_+(t; l, 0), t) - \frac{e}{2\epsilon_0} n_0 \frac{1}{1 + \alpha t^2} ((x - x_s(0))^2 - (X_+(t; l, 0) - x_s(0))^2) \\ \Phi(x, t) &= -\frac{e}{2\epsilon_0} \frac{n_0}{1 + \alpha t^2} (x - x_s(0))^2 - \\ &\quad \frac{e^3 n_0^2}{4M\epsilon_0^2} (l - x_s(0))^2 t^2 \frac{1 - 3\alpha t^2}{1 + \alpha t^2} \end{aligned} \quad (7.218)$$

On remarque que

$$x_s(0) = X_+(t; x_s(0), 0)$$

ce qui correspond à une caractéristique stationnaire.

**Proposition 68** Par changement Lagrangien, la solution de (SAV) pour une vitesse initiale nulle des ions donne

Pour  $t < t_0$  et  $0 < x < X_+(t; l, 0)$

$$\begin{cases} E(x, t) = -\frac{e}{\epsilon_0} n_0 (x_s(0) - l) < 0 \\ u(x, t) = -2\alpha (x_s(0) - l) t < 0 \\ n(x, t) = 0 \\ \Phi = \Phi_0 + \frac{en_0}{\epsilon_0} (x_s(0) - l)x \end{cases} \quad (7.219)$$

De plus pour  $t < t_0$  et  $X_+(t; l, 0) < x < x_s(0)$

$$\begin{cases} E(x, t) = \frac{e}{\epsilon_0} n_0 \frac{x - x_s(0)}{1 + \alpha t^2} \\ u(x, t) = 2\alpha t \frac{x - x_s(0)}{1 + \alpha t^2} \\ n(x, t) = \frac{n_0}{1 + \alpha t^2} \\ \Phi(x, t) = -\frac{e}{2\epsilon_0} \frac{n_0}{1 + \alpha t^2} (x - x_s(0))^2 - \\ \quad \frac{en_0\alpha}{4\epsilon_0} (l - x_s(0))^2 t^2 \frac{1 - 3\alpha t^2}{1 + \alpha t^2} \end{cases} \quad (7.220)$$

En particulier, on obtient que  $\Phi(x_s(0), t) < 0$  et  $E(x_s(0), t) = 0$

Si nous reprenons le cas stationnaire, la solution obtenue est la densité égale à  $n_0$ , le champ électrique et la vitesse nuls et le potentiel égal à  $\Phi_0$ . On pourrait souhaiter que la solution en amont de la surface libre c'est à dire solution du système (SAM) soit une solution décrite par un autre système d'équations tel que la continuité des équations de masse et de quantité de mouvement soit assurée •

Malheureusement, ce ne peut être la solution car, si le champ électrique est continu entre 0 et L, le potentiel est discontinu, ce qui ne peut correspondre à une condition physique. •

Pour  $t > t_0$ , définissons  $h(t)$  tel que

$$\begin{aligned} X_+(t; h(t), 0) &= 0 \\ h(t) + \frac{e^2}{2M\epsilon_0} n_0 (h(t) - x_s(0))^2 &= 0 \end{aligned}$$

soit

$$h(t) = x_s(0) \frac{\alpha t^2}{1 + \alpha t^2}$$

On en déduit pour  $y \in [h(t), x_s(0)]$

$$\left\{ \begin{aligned} E(X_+(t; y, 0), t) &= \frac{e}{\epsilon_0} n_0 (y - x_s(0)) \\ u(X_+(t; y, 0), t) &= \frac{e^2}{M\epsilon_0} n_0 (y - x_s(0)) t < 0 \\ X_+(t; h(t), 0) &= 0 \\ X_+(t; y, 0) &= y + \alpha (y - x_s(0)) t^2 < y \text{ d'où} \\ E(0, t) &= \frac{e}{\epsilon_0} n_0 (f(t) - x_s(0)) = -\frac{e}{\epsilon_0} x_s(0) \frac{n_0}{1 + \alpha t^2} \\ u(0, t) &= -2\alpha x_s(0) t \frac{n_0}{1 + \alpha t^2} \text{ et } n(X_+(t; y, 0), t) = \frac{n_0}{1 + \alpha t^2} \end{aligned} \right. \quad (7.221)$$

Il faut imposer en 0,  $\Phi(0, t) = \Phi_0$ , d'où comme

$$E(x, t) = \frac{e}{\epsilon_0} (x - x_s(0)) \frac{n_0}{1 + \alpha t^2}$$

alors

$$\Phi(x, t) = \Phi_0 - \frac{e}{2\epsilon_0} \frac{n_0}{1 + \alpha t^2} ((x - x_s(0))^2 - (x_s(0))^2)$$

soit :

$$\Phi(x, t) = \Phi_0 - \frac{e}{2\epsilon_0} \frac{n_0}{1 + \alpha t^2} x(x - 2x_s(0)) \quad (7.222)$$

Si nous reprenons le cas stationnaire, la solution obtenue pour le système (SAM) est la densité initiale  $n_0$ , le champ électrique, le potentiel et la vitesse nuls et cette solution est un candidat possible pour la solution instationnaire de (SAM). Malheureusement, ce ne peut être la solution car, si le champ électrique est continu entre 0 et L, le potentiel est discontinu, ce qui ne peut correspondre à une condition physique. Aussi, cette approche ne permet pas d'obtenir la solution globale du problème •

**Proposition 69** Par changement Lagrangien, la solution de (SAV) pour une vitesse initiale nulle des ions donne pour  $t > t_0$

$$\left\{ \begin{array}{l} E(x, t) = \frac{e}{\epsilon_0} \frac{n_0}{1 + \alpha t^2} (x - x_s(0)) < 0 \\ u(x, t) = \frac{e^2}{M\epsilon_0} \frac{n_0}{1 + \alpha t^2} (x - x_s(0)) t < 0 \\ n(x, t) = \frac{n_0}{1 + \alpha t^2} \\ \Phi = \Phi_0 - \frac{e}{2\epsilon_0} \frac{n_0}{1 + \alpha t^2} x(x - 2x_s(0)) \\ = -\frac{e}{2\epsilon_0} \frac{n_0}{1 + \alpha t^2} (x - x_s(0))^2 + \frac{e}{2\epsilon_0} \frac{n_0}{1 + \alpha t^2} l^2 + \frac{\alpha t^2}{1 + \alpha t^2} \Phi_0 \end{array} \right. \quad (7.223)$$

En particulier, on obtient que  $\Phi(x_s(0), t) < 0$  et  $E(x_s(0), t) = 0$

Remarque : Dans le cas où  $l = 0$ , on a la proposition suivante :

**Proposition 70** Par changement Lagrangien, la solution de (SAV) pour une vitesse initiale nulle des ions donne pour tout temps,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } \alpha = \frac{e^2}{2M\epsilon_0} n_0 \\ E(x, t) = \frac{e}{\epsilon_0} \frac{n_0}{1 + \alpha t^2} (x - x_s(0)) < 0 \\ u(x, t) = \frac{e^2}{M\epsilon_0} \frac{n_0}{1 + \alpha t^2} (x - x_s(0)) t < 0 \\ n(x, t) = \frac{n_0}{1 + \alpha t^2} \\ \Phi = \Phi_0 - \frac{e}{2\epsilon_0} \frac{n_0}{1 + \alpha t^2} x(x - 2x_s(0)) \\ = -\frac{e}{2\epsilon_0} \frac{n_0}{1 + \alpha t^2} (x - x_s(0))^2 + \frac{\alpha t^2}{1 + \alpha t^2} \Phi_0 \end{array} \right. \quad (7.224)$$

En particulier, on obtient que  $\Phi(x_s(0), t) < 0$  et  $E(x_s(0), t) = 0$

#### Création d'une solution de type CHILD-LANGMUIR

Soit le système initial dans la zone (SAV) pour laquelle une partie de la solution est la solution Lagrangienne qui prend en compte les données initiales. On cherche une solution telle que les conditions de raccord soient régulières. On a vu que ce système conduit donc à l'existence de solutions suivantes

**Proposition 71** *Le système accepte des solutions de type CHILD-LANGMUIR qui dépendent de 4 paramètres  $a_0, b_0, c_0, d_0$  quelconques*

$$\left\{ \begin{array}{l} n(x, t) = \frac{\lambda}{3} \frac{1}{(x - \sigma(t))^{2/3}} \\ u(x, t) = -\frac{3}{\lambda} a_0 (x - \sigma(t))^{2/3} + \frac{e^2}{M\epsilon_0} \left( \frac{a_0}{2} t^2 + b_0 t + c_0 \right) \\ E(x, t) = \frac{e}{\epsilon_0} (a_0 t + b_0 + \lambda (x - \sigma(t))^{1/3}) \\ \lambda = \left( 3 \frac{n_0 a_0^2}{\alpha} \right)^{1/3} \\ \sigma(t) = \frac{e^2}{M\epsilon_0} \left( \frac{a_0}{6} t^3 + \frac{b_0}{2} t^2 + c_0 t + d_0 \right) \end{array} \right. \quad (7.225)$$

### Conditions de raccord régulier dans le domaine (SAV)

La question du raccordement entre les 2 solutions demande de connaître les relations de saut entre les deux propositions de solutions du système (SAV) Rappelons que ce dernier s'écrit :

$$(SAV) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{e}{\epsilon_0} n u \\ \frac{\partial(\epsilon_0 E)}{\partial x} = e n \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -E \\ \frac{\partial(nu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( nu^2 - \frac{\epsilon_0}{2M} E^2 \right) = 0 \\ \text{ou encore dans les zones régulières} \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{e}{M} E \end{array} \right.$$

Cela conduit aux formes conservatives suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial nu}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(nu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( nu^2 - \frac{\epsilon_0}{2M} E^2 \right) = 0 \\ \text{ou encore dans les zones régulières} \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( u^2 + \frac{e}{M} \Phi \right) = 0 \end{array} \right. \quad (7.226)$$

Bien sûr,  $E$  est, au signe près, la dérivée de  $\Phi$  et admet lui même comme dérivée, à un coefficient près  $n$ . Si on cherche donc un raccordement régulier entre les 2 solutions précédentes, il est donc nécessaire d'avoir le potentiel et le champ électrique continus mais pas nécessairement  $n$ .

Si on s'intéresse aux relations conservatives, dans le référentiel local le long du raccordement, soit  $v$  la vitesse, on doit avoir alors  $[nv] = 0$  et à cause de la continuité du champ électrique, on doit avoir aussi  $[nv^2] = 0$ . En complément, à cause de la continuité du potentiel, on doit aussi avoir  $[\frac{v^2}{2}] = 0$ . Le seul cas possible est donc, si le vide est exclu est  $[v] = 0$  ce qui conduit à la continuité de la vitesse. De plus, si  $z(t)$  est la ligne de raccordement on doit avoir le long de cette ligne,  $\frac{dz}{dt}(t) = u(z(t), t)$ , ce qui revient à dire que  $z$  est une ligne

caractéristique.

Remarque: Afin de ne pas alourdir les calculs, nous supposons que nous sommes dans le cas  $l = 0$ .

### Construction de solution régulière pour le cas $l = 0$

A partir des solutions de type Lagrangienne, si on impose le long d'une ligne que

$$\frac{dY}{dt}(t) = u(Y(t), t) = \frac{2\alpha}{1 + \alpha t^2} (Y(t) - x_s(0))t$$

on en déduit par simple intégration différentielle que

$$Y(t) - x_s(0) = \mu(1 + \alpha t^2)$$

Pour cette ligne  $y(t)$ , on obtient comme solution les quantités continue sur la vitesse, le champ électrique, le potentiel et on pose  $n_-$  la valeur de la densité issue de la solution Lagrangienne sur la ligne  $Y(t)$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} E(Y(t), t) = \frac{e}{\epsilon_0} \mu n_0 \\ u(Y(t), t) = 2\alpha \mu t \\ n_-(Y(t), t) = \frac{n_0}{1 + \alpha t^2} \\ \Phi(Y(t), t) = \Phi_0 - \frac{e}{2\epsilon_0} \frac{n_0}{1 + \alpha t^2} ((x - x_s(0))^2 - (x_s(0))^2) \\ \quad = \frac{\alpha t^2}{1 + \alpha t^2} \Phi_0 - \frac{e}{2\epsilon_0} n_0 (1 + \alpha t^2) \mu^2 \end{array} \right. \quad (7.227)$$

Les solutions sur la vitesse et le champ électrique sont négatives si et seulement si

$$\mu < 0 \quad (7.228)$$

A partir des solutions de type CHILD-LANGMUIR, si on impose le long d'une ligne que

$$\frac{dY}{dt}(t) = u(Y(t), t) = -\frac{3}{\lambda} a_0 (Y(t) - \sigma(t))^{2/3} + \sigma'(t)$$

on en déduit par intégration différentielle que

$$Y(t) - \sigma(t) = -\frac{a_0 \alpha}{3n_0} (t - \beta)^3$$

A partir des relations sur la définition sur la ligne de discontinuité, on en déduit par soustraction que

$$\sigma(t) = x_s(0) + \mu(1 + \alpha t^2) + \frac{a_0 \alpha}{3n_0}(t - \beta)^3 \quad (7.229)$$

Un simple calcul montre aisément que par définition de la ligne  $\sigma(t)$  par (7.229) la continuité de la vitesse et celle du champ électrique sont assurées. Par contre, la densité est discontinue, vaut d'un côté de la discontinuité  $n_-(Y(t), t)$  et de l'autre  $n_+(Y(t), t)$  avec

$$\begin{cases} n_-(Y(t), t) = \frac{n_0}{1 + \alpha t^2} \\ n_+(Y(t), t) = \frac{n_0}{\alpha} \frac{1}{(t - \beta)^2} \end{cases} \quad (7.230)$$

On peut noter l'équation de la ligne  $Y(t)$  avec

$$Y(t) = x_s(0) + \mu(1 + \alpha t^2) \quad (7.231)$$

Pour définir le potentiel à partir d'une solution de type CHILD-LONGMUIR raccordée à une solution Lagrangienne, ce dernier doit être continu.

Or le long de la discontinuité, le potentiel peut s'exprimer sous la forme

$$\Phi_Y(t) = \frac{\alpha t^2}{1 + \alpha t^2} \Phi_0 - \frac{e}{2\varepsilon_0} n_0 \mu^2 (1 + \alpha t^2)$$

Par définition de la solution de type CHILD-LONGMUIR, le potentiel s'écrit

$$\Phi = -\frac{e}{\varepsilon_0} [(a_0 t + b_0)(x - \sigma(t)) + \frac{3}{4} \lambda (x - \sigma(t))^{4/3} + D(t)]$$

**Proposition 72** *Le long d'une ligne de discontinuité appelée  $Y$  entre une solution Lagrangienne et une solution de type CHILD-LONGMUIR, il est possible de conserver la continuité de la vitesse, du champ électrique et du potentiel. En revanche, la densité est discontinue de part et d'autre de la ligne  $Y(t)$ .*

*Le long de cette ligne, afin d'assurer la continuité du potentiel, les valeurs sont*

les suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} E(Y(t), t) = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \mu n_0 \\ u(Y(t), t) = 2\alpha \mu t \\ n_-(Y(t), t) = \frac{n_0}{1 + \alpha t^2} \\ n_+(Y(t), t) = \frac{n_0}{\alpha} \frac{1}{(t - \beta)^2} \\ \Phi(Y(t), t) = \Phi_D(t) = \frac{\alpha t^2}{1 + \alpha t^2} \Phi_0 - \frac{\epsilon}{2\epsilon_0} n_0 (1 + \alpha t^2) \mu^2 \end{array} \right. \quad (7.232)$$

En effet, on déduit de la continuité du potentiel la valeur de  $D(t)$  par

$$\Phi_Y(t) = -\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \left( -\frac{a_0}{6} \sigma''(t)(t - \beta)^3 + \frac{a_0^2}{4n_0} \alpha (t - \beta)^4 + D(t) \right)$$

ou encore

$$\Phi_Y(t) = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \left[ \frac{a_0 \alpha}{3} \mu (t - \beta)^3 + \frac{a_0^2 \alpha}{12n_0} (t - \beta)^4 - D(t) \right] \quad (7.233)$$

Par la suite, on posera  $f(t)$  la fonction

$$f(t) = \frac{\alpha t^2}{1 + \alpha t^2} \quad (7.234)$$

### Construction des solutions de type CHIRD-LONGMUIR

Une fois le raccord effectué, la solution appelée par la suite (C.L.) peut se formuler en terme de caractéristiques.

A partir des solutions de type CHILD-LANGMUIR exprimées précédemment, les caractéristiques dans cette zone sont données par

$$\frac{dz}{dt}(t) = u(z(t), t) = -\frac{3}{\lambda} a_0 (z(t)\sigma(t))^{2/3} + \sigma'(t)$$

on en déduit par intégration différentielle que

$$z(t) - \sigma(t) = -\frac{a_0 \alpha}{3n_0} (t - \gamma)^3$$

A partir des relations sur la définition sur la ligne  $\sigma(t)$ , on en déduit que

$$z(t) = x_s(0) + \mu(1 + \alpha t^2) + \frac{a_0 \alpha}{3n_0} [(t - \beta)^3 - (t - \gamma)^3]$$

Désormais, une fois  $\sigma(t)$  défini, on peut paramétrer les caractéristiques par  $\gamma$  et définir les lignes caractéristiques par

$$z_\gamma(t) = x_s(0) + \mu(1 + \alpha t^2) + \frac{a_0 \alpha}{3n_0} [(t - \beta)^3 - (t - \gamma)^3] \quad (7.235)$$

Il est aisé d'observer que les caractéristiques sont des paraboles issues du point

$$z_\gamma(0) = x_s(0) + \mu + \frac{a_0 \alpha}{3n_0} (\gamma^3 - \beta^3)$$

Un simple calcul montre que pour 2 caractéristiques quelconques

$$z_\gamma(t) - z_\delta(t) = \frac{a_0 \alpha}{3n_0} (\gamma - \delta) \left[ \frac{1}{12} (\gamma - \delta)^2 + \left( t - \frac{\gamma + \delta}{2} \right)^2 \right] \quad (7.236)$$

ce qui signifie que les caractéristiques issues de points différents ne se coupent jamais et gardent leur ordre initial dans l'espace, c'est à dire que si

$$z_\gamma(0) < z_\delta(0) \text{ alors } \forall t > 0 \quad z_\gamma(t) < z_\delta(t) \quad (7.237)$$

Par la paramétrisation choisie, on peut calculer les inconnues sur la caractéristique en fonction de  $\gamma$

**Proposition 73** La solution de type CHID-LONGMUIR s'exprime le long des caractéristiques par

$$\left\{ \begin{array}{l} n(z_\gamma(t), t) = \frac{n_0}{\alpha} \frac{1}{(t - \gamma)^2} \\ u(z_\gamma(t), t) = \sigma'(t) - \frac{\alpha a_0}{n_0} (t - \gamma)^2 = 2\alpha\mu t + \frac{\alpha a_0}{n_0} [(t - \beta)^2 - (t - \gamma)^2] \\ E(z_\gamma(t), t) = \frac{e}{\epsilon_0} [n_0 \mu + a_0 (\gamma - \beta)] \\ \Phi(z_\gamma(t), t) = -\frac{e}{\epsilon_0} \left[ -\frac{a_0 \alpha \mu}{3} (t - \gamma)^3 + \frac{a_0^2 \alpha}{12 n_0} (t - \gamma)^3 (4\beta - 3\gamma - t) + D(t) \right] = \\ \Phi_D(t) + \frac{e}{\epsilon_0} \left[ \frac{a_0 \alpha \mu}{3} [(t - \gamma)^3 - (t - \beta)^3] + \right. \\ \left. \frac{a_0^2 \alpha}{3 n_0} (t - \beta) [(t - \gamma)^3 - (t - \beta)^3] - \frac{a_0^2 \alpha}{4 n_0} [(t - \gamma)^4 - (t - \beta)^4] \right] \end{array} \right. \quad (7.238)$$

où  $\Phi_\gamma(t)$  est défini par (7.233).

Initialement les quantités sont telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} n(z_\gamma(0), 0) = \frac{n_0}{\alpha} \frac{1}{\gamma^2} \\ u(z_\gamma(0), 0) = \frac{\alpha a_0}{n_0} (\beta^2 - \gamma^2) \\ E(z_\gamma(0), 0) = \frac{e}{\epsilon_0} [n_0 \mu + a_0 (\gamma - \beta)] \\ \Phi(z_\gamma(0), 0) = -\frac{e n_0}{2 \epsilon_0} \mu^2 + f(0) \Phi_0 + \frac{e}{\epsilon_0} \left( \frac{a_0 \alpha}{3} \mu (\beta^3 - \gamma^3) - \frac{a_0^2 \alpha}{3 n_0} \beta (\beta^3 - \gamma^3) - \frac{a_0^2 \alpha}{12 n_0} (\gamma^4 - \beta^4) \right) \end{array} \right. \quad (7.239)$$

### 7.9.5 Solution continue dans la zone Amont

Dans la suite, l'hypothèse  $l = 0$  sera conservée et levée que dans la dernière partie.

#### Solution continue à travers la Surface Libre entre les parties (SAV) et (SAM)

Dans le premier modèle, il y a couplage entre  $n$ ,  $u$  et  $E$  tandis que dans le second cas, l'égalité des densités des ions et des électrons donne le champ électrique à travers l'existence d'une pression électronique.

Ce second modèle peut aussi s'écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(n) + \partial_x(nu) = 0 \\ \partial_t u + u \partial_x u + \frac{c^2}{n} \partial_x(n) = 0 \\ E = -\frac{k T_e}{e n} \partial_x(n) \\ \Phi = \frac{k T_e}{e} \text{Log}(n) + \lambda(t) \\ \text{où } c \text{ est définie par } c^2 = \frac{k T_e}{M} \end{array} \right. \quad (7.240)$$

Ce dernier modèle est régi par les équations d'un système (issu de la Mécanique des Fluides isentropique) qui est classique pour des membres de la communauté Hyperbolique en Mathématique Appliquée ([154]) ou les mécaniciens de la Mécanique des Fluides par exemple, appelé système isentropique. Afin que la

surface libre ne crée pas de discontinuité, il doit y avoir continuité du flux de l'équation de quantité de mouvement et du flux de l'équation de masse.

De plus, dans le domaine (SAM), on a

$$\Phi = \frac{kT_e}{e} \text{Log}(n_e) + \lambda(t)$$

avec comme condition à l'infini, la densité égale à  $n_0$  et le potentiel nul.

Aussi dans (SAM), la relation suivante doit être vérifiée

$$\Phi = \frac{kT_e}{e} \text{Log}\left(\frac{n}{n_0}\right) \quad (7.241)$$

Un des postulats de la démarche consiste à imposer qu'à partir de la Surface libre, le système développe dans la partie (SAM) une onde à la vitesse  $u + c$ , ce qui conduit à l'existence d'un invariant de Riemann de la forme

$$u - c \text{Log} n$$

ce qui donne la relation dans l'onde de détente

$$u - c \text{Log}\left(\frac{n}{n_0}\right) = 0 \quad (7.242)$$

Par contre, dans cette démarche, il n'est pas imposé à l'onde détente de respecter une solution autosimilaire de la forme  $x/t$ .

On notera par la suite, par l'indice S les quantités au raccord de la Surface Libre dans la partie (SAM). Les quantités vérifient donc le système

$$\begin{cases} u_S = c \frac{e}{kT_e} \Phi_S \\ u_S = c \text{Log}\left(\frac{n_S}{n_0}\right) \end{cases} \quad (7.243)$$

Le problème désormais est de savoir quelle quantité doit être vérifiée de part et d'autre de la Surface Libre. Il est important d'observer que les équations suivantes sont vérifiées de part et d'autre de la Surface Libre

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(n) + \partial_x(nu) = 0 \\ \partial_t u + u \partial_x u - \frac{e}{M} E = 0 \\ \text{ou encore } \partial_t u + \partial_x \left( \frac{u^2}{2} + \frac{e}{M} \Phi \right) = 0 \\ \partial_x \Phi = -E \end{array} \right. \quad (7.244)$$

En outre, l'équation de quantité de mouvement sur le débit est conservative mais pour des flux différents de part et d'autre de la Surface Libre.

En raisonnant comme dans le raccordement entre la solution Lagrangienne et la solution de type CHILD-LANGMUIR, on note que le potentiel doit être continu ainsi que la vitesse, ce qui donne donc  $[\frac{v^2}{2} + \frac{e}{M}\Phi] = 0$  et  $[nv] = 0$ .

De la même manière, si la vitesse est continue et égale à la dérivée temporelle de la ligne définissant la Surface Libre, la densité peut être discontinue à priori et  $n_S$  sera donc défini par

$$n_S = n_0 \exp\left(\frac{u_S}{c}\right) \quad (7.245)$$

La condition de raccordement est donc

$$\begin{cases} u_S(t) = c \frac{e}{kT_e} \Phi_S(t) \\ \frac{dZ}{dt} = u_S(Z(t), t) \end{cases} \quad (7.246)$$

Ce raisonnement a été conduit dans le paragraphe précédent et conduit ici à définir une ligne  $S(t)$  paramétrée par  $Z(t)$  telle que

$$Z(t) - \sigma(t) = -\frac{a_0 \alpha}{3n_0} (t - \Gamma)^3$$

où  $\Gamma$  est une valeur pour l'instant arbitraire à partir du raisonnement conduit dans le chapitre 7.9.5.

Par le même type de calcul que précédemment, on obtient la vitesse  $u_S(t)$  qui vaut dans ce cas

$$u_S(Z(t), t) = u_S = \sigma'(t) - \frac{a_0 \alpha}{n_0} (t - \Gamma)^2 \quad (7.247)$$

On peut assurer que la solution est une solution relevant d' un Invariant de RIEMANN si et seulement si

$$\Phi_S(t) = \frac{kT_e}{ec} u_S(t)$$

où  $\Phi_S(t)$  est la valeur du potentiel ( continu) le long de la Surface Libre entre (SAM) et (SAV).

Cela conduit d' après la continuité du potentiel et en notant désormais  $\gamma$  le paramètre de la Surface Libre entre (SAM) et (SAV), en utilisant ( 7.239), à l' égalité suivante

$$-\frac{e}{\varepsilon_0} \left( -\frac{a_0}{6} \sigma''(t)(t - \gamma)^3 + \frac{a_0^2}{4n_0} \alpha (t - \gamma)^4 + D(t) \right) = \frac{kT_e}{ec} \left( \sigma'(t) - \frac{a_0 \alpha}{n_0} (t - \gamma)^2 \right)$$

Or, il est à noter d'après (7.229) que

$$\sigma'(t) = \frac{a_0 \alpha}{n_0} (t - \beta)^2 + 2\alpha \mu t$$

et

$$\sigma''(t) = 2 \frac{a_0 \alpha}{n_0} (t - \beta) + 2\alpha \mu$$

Ces deux égalités définissant les potentiels le long des discontinuités  $S(t)$  et  $Y(t)$  s'écrivent

$$-\frac{a_0^2 \alpha}{3n_0} (t - \beta)(t - \gamma)^3 + \frac{a_0^2 \alpha}{4n_0} (t - \gamma)^4 - \frac{a_0 \alpha \mu}{3} (t - \gamma)^3 + D(t) =$$

$$-\frac{c}{2} a_0 ((t - \beta)^2 - (t - \gamma)^2) - c n_0 \mu t$$

et

$$-\frac{a_0^2 \alpha}{3n_0} (t - \beta)^4 + \frac{a_0^2 \alpha}{4n_0} (t - \beta)^4 - \frac{a_0 \alpha \mu}{3} (t - \beta)^3 + D(t) =$$

$$-\frac{\epsilon_0}{e} f(t) \Phi_0 + \frac{n_0}{2} \mu^2 (1 + \alpha t^2)$$

Par soustraction et élimination de  $D(t)$ , on peut noter que le membre de gauche de l'égalité précédente est un polynôme en  $t$  du second degré tel que

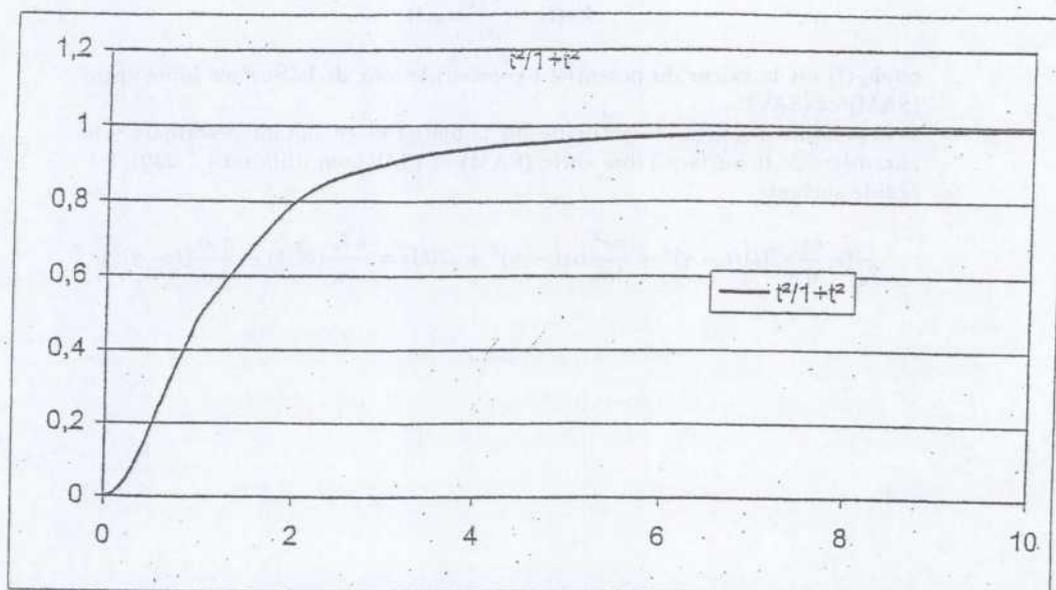
$$\left[ \frac{a_0^2 \alpha}{2n_0} (\gamma - \beta)^2 + a_0 \alpha \mu (\gamma - \beta) + \frac{n_0}{2} \alpha \mu^2 \right] t^2 +$$

$$\left[ -\frac{a_0^2 \alpha}{3n_0} (\beta - \gamma)^2 (\beta + 2\gamma) - a_0 \alpha \mu (\gamma^2 - \beta^2) + c n_0 \mu + c a_0 (\gamma - \beta) \right] t +$$

$$\left[ \frac{a_0^2 \alpha}{12n_0} (\beta - \gamma)^2 (\beta^2 + 2\beta\gamma + 3\gamma^2) + \frac{a_0 c}{2} (\beta^2 - \gamma^2) + \frac{n_0}{2} \mu^2 + \frac{a_0 \alpha \mu}{3} (\gamma^3 - \beta^3) \right] = \frac{\epsilon_0}{e} f(t) \Phi_0$$

(7.248)

Afin de résoudre ce problème, on peut tracer la courbe  $\frac{t^2}{1+t^2}$ .

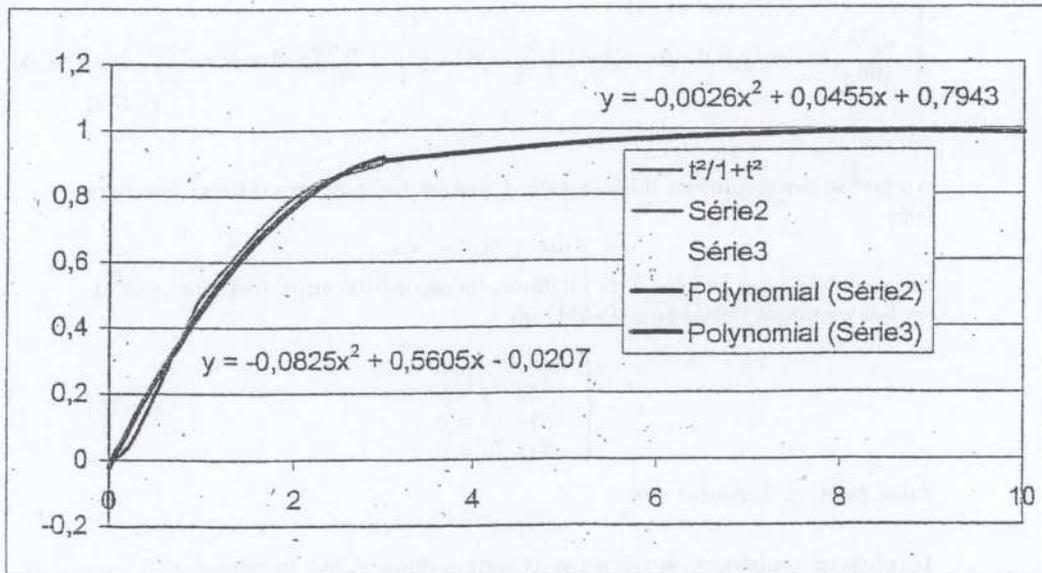


On observe aisément que pour  $t > 10$ , par exemple, l'approximation par 1 est une assez bonne approximation.

Pour aller plus loin, par simple utilisation d' EXCEL, on peut noter que, si on choisit une approximation par un polynôme de degré 2, on peut utiliser

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } t \in [0, 3], \frac{t^2}{1+t^2} \simeq -0,0825t^2 + 0,5605t + 0,0207 \\ \text{Pour } t \in [3, 10], \frac{t^2}{1+t^2} \simeq -0,0026t^2 + 0,0455t + 0,7943 \end{array} \right. \quad (7.249)$$

$$\text{Pour } t \in [10, +\infty[, \frac{t^2}{1+t^2} \simeq 1$$



Afin de résoudre le problème défini par ( 7.248), on notera par la suite que

$$\forall t \in [0, 3] \frac{t^2}{1+t^2} \simeq -p_1 t^2 + q_1 t + r_1 \quad (7.250)$$

puis

$$\forall t \in [3, 10] \frac{t^2}{1+t^2} \simeq -p_2 t^2 + q_2 t + r_2 \quad (7.251)$$

$$\forall t \in [10, +\infty] \frac{t^2}{1+t^2} \simeq r_3 (= 1) \quad (7.252)$$

avec

$$\forall i \in [1, 2], p_i, q_i, r_i > 0, \text{ et } r_3 > 0 \quad (7.253)$$

Il n'y a pas mathématiquement parlant d'égalité possible à ( 7.248 ). Mais en utilisant l' approximation ( 7.250) et en regardant, dans un premier temps, les instants tels que  $t < \frac{3}{\sqrt{\alpha}}$ , on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_0^2 \alpha}{2n_0} (\gamma - \beta)^2 + a_0 \alpha \mu (\gamma - \beta) + \frac{n_0}{2} \alpha \mu^2 = -\frac{\varepsilon_0}{e} p_1 \alpha \Phi_0 \\ -\frac{a_0^2 \alpha}{3n_0} (\beta - \gamma)^2 (\beta + 2\gamma) - a_0 \alpha \mu (\gamma^2 - \beta^2) + a_0 c (\gamma - \beta) + c n_0 \mu = \frac{\varepsilon_0}{e} q_1 \sqrt{\alpha} \Phi_0 \\ \frac{a_0^2 \alpha}{12n_0} (\beta - \gamma)^2 (\beta^2 + 2\beta\gamma + 3\gamma^2) + \frac{a_0 c}{2} (\beta^2 - \gamma^2) + \frac{a_0 \alpha \mu}{3} (\gamma^3 - \beta^3) + \frac{n_0}{2} \mu^2 = \frac{\varepsilon_0}{e} r_1 \Phi_0 \end{array} \right. \quad (7.254)$$

Au niveau des conditions initiales pour l' instant les seules contraintes imposées sont

$$0 < Y(0) \leq Z(0) < +\infty$$

Si on souhaite que la ligne  $Z(t)$  définisse la séparation entre (SAM) et (SAV), un bon candidat initial pour (SAM) est

$$\left\{ \begin{array}{l} n(x, 0) = n_0 \\ u(x, 0) = 0 \\ E(x, 0) = 0 \\ \Phi(x, 0) = 0 \end{array} \right. \quad (7.255)$$

Aussi peut on souhaiter que

$$Z'(t) = 0$$

De plus, on souhaite ( on verra par la suite pourquoi) que la vitesse en  $Z(t)$  soit négative.

En fonction de ( 7.236), on a

$$u(Z(t), t) = 2\alpha\mu t + \frac{\alpha a_0}{n_0} [2t(\gamma - \beta) + \beta^2 - \gamma^2]$$

La première contrainte conduit à

$$\beta^2 = \gamma^2 \text{ soit } \beta = \pm\gamma$$

Cela assure que

$$\Phi_S(t) = \Phi(Z(t), t) = \frac{kT_e}{ec} u(Z(t), t) = \frac{kT_e}{ec} u_S(t)$$

donc en particulier,  $\Phi_S(0) = 0$ . On montre aisément que pour le cas  $\beta = \gamma$ , le système défini par ( 7.254) n'est pas résoluble.

La contrainte revient donc à avoir

$$\beta = -\gamma \quad (7.256)$$

Dans ce cas la vitesse en  $Z(t)$  s'écrit

$$u(Z(t), t) = 2\alpha\mu t + 2\frac{\alpha a_0}{n_0}(\gamma - \beta)t$$

La première équation de ( 7.256 ) permet d'obtenir

$$\frac{a_0}{n_0}(\gamma - \beta) + \mu = -\sqrt{-2\frac{\varepsilon_0}{e}p_1\frac{\Phi_0}{n_0}}$$

soit d'après ( 7.256)

$$2\frac{a_0}{n_0}\gamma + \mu = -\sqrt{-2\frac{\varepsilon_0}{e}p_1\frac{\Phi_0}{n_0}} \quad (7.257)$$

On obtient pour la seconde égalité

$$\frac{4a_0^2\alpha}{3n_0}\gamma^3 = -\frac{\varepsilon_0}{e}q_1\sqrt{\alpha}\Phi_0 + cn_0\sqrt{-2\frac{\varepsilon_0}{e}p_1\frac{\Phi_0}{n_0}} \quad (7.258)$$

Enfin, la dernière égalité peut s'écrire

$$\frac{2a_0^2\alpha}{3n_0}\gamma^4 + \frac{2a_0\alpha\mu}{3}\gamma^3 + \frac{n_0}{2}\mu^2 = \frac{\varepsilon_0}{e}r_1\Phi_0 \quad (7.259)$$

Le problème consiste désormais à calculer les trois inconnues  $a_0, \gamma, \mu$ .

La démonstration est fournie au paragraphe suivant.

**Proposition 74** *Pour les temps  $t < \frac{3}{\sqrt{\alpha}}$ , il existe un unique triplé d'inconnues  $a_0, \gamma, \mu$  qui permet d'obtenir un raccord de solution à la Surface Libre entre (SAM) et (SAV), la ligne  $S(t)$  soit décroissante au cours du temps et porte une vitesse d'écoulement négative.*

A partir de ( 7.257), ( 7.258) et ( 7.259), les inconnues vérifient le système suivant

$$\begin{cases} 2\frac{a_0}{n_0}\gamma + \mu = -\sqrt{-2\frac{\varepsilon_0}{e}p_1\frac{\Phi_0}{n_0}} \\ \frac{4a_0^2\alpha}{3n_0}\gamma^3 = -\frac{\varepsilon_0}{e}q_1\sqrt{\alpha}\Phi_0 + cn_0\sqrt{-2\frac{\varepsilon_0}{e}p_1\frac{\Phi_0}{n_0}} \\ \frac{2a_0^2\alpha}{3n_0}\gamma^4 + \frac{2a_0\alpha\mu}{3}\gamma^3 + \frac{n_0}{2}\mu^2 = \frac{\varepsilon_0}{e}r_1\Phi_0 \end{cases} \quad (7.260)$$

D' après ( 7.228) et ( 7.257), les contraintes imposées sont

$$\begin{cases} \mu \leq 0 \\ 2\frac{a_0}{n_0}\gamma + \mu \leq 0 \end{cases} \quad (7.261)$$

En considérant le carré de ( 7.257) ( multiplié par  $(1 - \frac{\alpha\gamma^2}{3})$  ) auquel on soustrait ( 7.259) et à partir de la contrainte sur  $\mu$ , on obtient

$$\mu = -\sqrt{-2\frac{\varepsilon_0}{e}\frac{\Phi_0}{n_0}} \sqrt{\frac{r_1 + p_1\frac{\alpha\gamma^2}{3}}{\frac{\alpha\gamma^2}{3} - 1}} \quad (7.262)$$

A partir de ( 7.257), on obtient l' expression de  $2\frac{\alpha\gamma}{n_0}$ .

On en déduit finalement l' égalité vérifiée par  $\gamma$  qui s' écrit:

$$x \left[ \sqrt{\frac{r_1 + p_1\frac{\alpha x^2}{3}}{\frac{\alpha x^2}{3} - 1}} - \sqrt{p_1} \right]^2 = \frac{3}{2} \frac{q_1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{3c}{\alpha} \sqrt{-\frac{p_1}{\frac{\varepsilon_0}{e}\frac{\Phi_0}{n_0}}} > 0 \quad (7.263)$$

Posons

$$\Lambda = \frac{3}{2} \frac{q_1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{3c}{\alpha} \sqrt{-\frac{p_1}{\frac{\varepsilon_0}{e}\frac{\Phi_0}{n_0}}} > 0 \quad (7.264)$$

et

$$\forall x \text{ tel que } |x| > \sqrt{\frac{3}{\alpha}} \text{ alors } g(x) = x \left[ \sqrt{\frac{r_1 + p_1\frac{\alpha x^2}{3}}{\frac{\alpha x^2}{3} - 1}} - \sqrt{p_1} \right]^2 \quad (7.265)$$

On peut noter que la fonction  $g$  est impaire et se contenter de l' étudier pour  $x$

positif soit encore pour  $x > \sqrt{\frac{3}{\alpha}}$

On pose

$$A = \sqrt{\frac{p_1 \frac{\alpha x^2}{3} + r_1}{\frac{\alpha x^2}{3} - 1}} - \sqrt{p_1} = \frac{p_1 + r_1}{\sqrt{\frac{\alpha x^2}{3} - 1}} \frac{1}{\sqrt{p_1 \frac{\alpha x^2}{3} + r_1} + \sqrt{(\frac{\alpha x^2}{3} - 1)p_1}}$$

et

$$B = -\sqrt{p_1} + \sqrt{\frac{p_1 \frac{\alpha x^2}{3} + r_1}{\frac{\alpha x^2}{3} - 1} - \frac{2\alpha x^2}{3}} \frac{p_1 + r_1}{\sqrt{p_1 \frac{\alpha x^2}{3} + r_1} (\frac{\alpha x^2}{3} - 1)^{3/2}}$$

On obtient que  $g'(x) = AB$

On en déduit aisément la positivité de A

Reste à étudier B. Or

$$B = \frac{1}{\sqrt{p_1 \frac{\alpha x^2}{3} + r_1} (\frac{\alpha x^2}{3} - 1)^{3/2}} [p_1 (\frac{\alpha x^2}{3})^2 - (3p_1 + r_1) \frac{\alpha x^2}{3} - r_1 - \sqrt{p_1} (\frac{\alpha x^2}{3} - 1)^{3/2} \sqrt{\frac{\alpha x^2}{3} p_1 + r_1}]$$

On pose  $y = \frac{\alpha x^2}{3}$ ,  $p_1 y^2 - (3p_1 + r_1)y - r_1 = p_1(y - y_-)(y - y_+)$  où  $y_-$  est une quantité négative et  $y_+$  une quantité positive.

Dans le cas où  $y < y_+$ , il est évident que B est négatif.

Dans le cas où  $y > y_+$ , on a  $p_1 y^2 - (3p_1 + r_1)y - r_1 > 0$ , d'où écrire que B est négatif est équivalent à

$$(p_1 y^2 - (3p_1 + r_1)y - r_1)^2 < p_1(y - 1)^3(r_1 + p_1 y)$$

ce qui revient à écrire que

$$3p_1 y^3 - (r_1 + 6p_1)y^2 - (p_1 + 2r_1)y - r_1 > 0$$

Soit  $C = 3p_1 y^3 - (r_1 + 6p_1)y^2 - (p_1 + 2r_1)y - r_1$  dans laquelle y est positif.

Comme  $p_1 y^2 > (3p_1 + r_1)y + r_1$ , on en déduit que

$$C > 3y(r_1 + (3p_1 + r_1)y) - (r_1 + 6p_1)y^2 - (p_1 + 2r_1)y - r_1$$

soit

$$C > (3p_1 + 2r_1)y^2 + (r_1 - p_1)y - r_1$$

d'où en utilisant à nouveau la minoration sur  $p_1 y^2$ , on a

$$C > 2r_1(y + 1)^2 + 8p_1 y > 0$$

Cela conduit dans tous les cas à avoir  $B < 0$  et donc  $g$  décroissante entre  $[\sqrt{\frac{3}{\alpha}}, +\infty[$ .

Or aux bornes les valeurs de  $g$  sont  $+\infty$  et  $0$ , donc il existe un unique  $x > 0$ , tel que si  $\Lambda > 0$ ,  $\exists! x > 0, g(x) = \Lambda$  et donc par imparité de la fonction  $g$ , on en déduit la proposition suivante

**Proposition 75**

$$\forall \Lambda > 0, \exists! \gamma > 0 \text{ tel que } g(\gamma) = \Lambda \quad (7.266)$$

Remarque:  
On a donc

$$\begin{cases} \gamma > 0 \\ \beta < 0 \\ a_0 > 0 \\ \mu < 0 \end{cases} \quad (7.267)$$

**Construction d'une solution régulière dans (SAM)**

Le système précédent est un P-système dont la donnée est formée des quantités  $n_S, u_S, E_S, \Phi_S$  associés à une onde de détente commençant le long d'une courbe  $Z(t)$  telle la vitesse sur  $Z(t)$  soit aussi la quantité  $\frac{d(Z(t))}{dt}$  pour lequel les données à l'infini amont sont figées.

Ce problème peut être identifié au problème d'un tube ouvert à une extrémité et fermé à l'autre par un piston que l'on retire par un mouvement défini par une fonction  $Z'(t)$  donnée.

Il est en particulier expliqué dans [98]. Cela donne la construction d'une détente dont le point à vitesse nulle avance à la vitesse  $c$  pour se raccorder à l'état stationnaire.

La solution dans la détente est donnée, en définissant par  $u$  la vitesse, en fonction de la valeur de  $Z(t)$  par

$$x = t(u + c) + f(u) \quad (7.268)$$

équation où  $f$  est définie en fonction de  $Z(t)$ , ce qui donne

$$\begin{cases} u = F(x - (u + c)t) \\ \text{où } F \text{ est défini par} \\ Z'(t) = F(Z(t) - t(Z(t) + c)) \end{cases} \quad (7.269)$$

ce qui définit  $F$ .

Dans le cas qui nous importe, on peut noter que

$$Z'(t) = [2\alpha\mu + 2\frac{a_0\alpha}{n_0}(\gamma - \beta)]t$$

soit encore

$$Z'(t) = -2\alpha t \sqrt{-2 \frac{\epsilon_0}{e} p_1 \frac{\Phi_0}{n_0}} < 0$$

Posons alors

$$\Delta = -2\alpha \sqrt{-2 \frac{\epsilon_0}{e} p_1 \frac{\Phi_0}{n_0}} \quad (7.270)$$

Alors la solution est dans l'onde de détente

$$-u = (c + \Delta t) - [(c + \Delta t)^2 - 2\Delta(ct - x + Z(0))]^{1/2}$$

Cette solution est valide à tout instant ( compris entre 0 et  $+\infty$  ) jusqu' au point  $Z(0) + ct$  où la solution de type détente est raccordée de manière continue à l' état constant

$$n = n_0 \text{ et } u = E = \Phi = 0$$

Toute cette approche peut se résumer ainsi

**Théoreme 45** Pour les temps  $t < \frac{3}{\sqrt{\alpha}}$ , le système précédent admet une solution formée d'une solution Lagrangienne et d'une onde de type CHILD-LANGMUIR dans la partie (SAV) raccordées par une courbe décroissante  $Y(t)$ . En ce qui concerne (SAM), elle est formée d'une onde de détente et de données stationnaires.

Le raccord entre (SAM) et (SAV) s'effectue à travers une Surface Libre définie par la courbe  $Z(t)$  telle que  $\forall t Y(t) \leq Z(t)$ .

La solution est continue en vitesse et potentiel sur tout l'espace à tout instant tandis que le champ électrique est a priori discontinu à travers la Surface Libre. Quant à la densité, elle est régulière dans les quatre zones et discontinue au passage des interfaces de la ligne de raccordement et de la Surface Libre.

**Etude des temps supérieurs à  $\frac{3}{\sqrt{\alpha}}$**

Pour des temps supérieurs, il faut reprendre la même méthode, en changeant les paramètres  $p_1, q_1, r_1$  en  $p_2, q_2, r_2$  et  $p_3, q_3, r_3$  avec  $p_3 = q_3 = 0$  et  $r_3 = 1$ .

Dans ce cadre, les égalités ( 7.260) sont toujours valables. Il faut rajouter la contrainte sur la vitesse obtenue dans le système pour la valeur de  $Z'(t)$  aux instants  $t_1 = \frac{3}{\sqrt{\alpha}}$  et  $t_2 = \frac{10}{\sqrt{\alpha}}$ .

En travaillant de la même manière, par exemple pour les temps  $t$  tels que  $\frac{3}{\sqrt{\alpha}} \leq t \leq \frac{10}{\sqrt{\alpha}}$ , on démontrerait sur cete plage l'existence et l'unicité des quadruplés

$\beta, \gamma, a_0, \mu$ .

Pour les temps  $t$  grands correspondants à  $p_3 = q_3 = 0$  et  $r_3 = 1$ , on trouve comme solution  $\beta = \gamma = \mu = 0$ . Cela correspond au niveau des courbes  $Y(t)$  et  $Z(t)$  à avoir des états constants mais pour lesquels l'onde de détente continue à se propager.

Tout ce raisonnement se résume ainsi:

**Théoreme 46** *Le système précédent admet une solution formée d'une solution Lagrangienne et d'une onde de type CHILD-LANGMUIR dans la partie (SAV) raccordées par une courbe décroissante  $Y(t)$ . En ce qui concerne (SAM), elle est formée d'une onde de détente et de données stationnaires.*

*le raccord entre (SAM) et (SAV) s'effectue à travers une Surface Libre définie par la courbe  $Z(t)$  telle que  $\forall t Y(t) < Z(t) < x_s(0)$ .*

*La solution est continue en vitesse et potentiel sur tout l'espace à tout instant tandis que le champ électrique est a priori discontinu à travers la Surface Libre. Quant à la densité, elle est régulière dans les quatre zones et discontinue au passage des interfaces de la ligne de raccordement et de la Surface Libre.*

#### Etude du cas $l \neq 0$

D'après le raisonnement conduit au paragraphe (7.9.4), pour les temps  $t > t_0$  défini par (7.213), le raisonnement est identique à celui conduit pour le cas  $l = 0$ .

Pour les temps  $t < t_0$  la solution Lagrangienne est elle même constituée de 2 solutions séparées par une ligne appelée

$$X(t; l, 0) = l - \alpha(x_s(0) - l)t^2 \quad (7.271)$$

Cependant le raisonnement porte sur la continuité et le raccord du potentiel. D'après (7.223), on définit

$$\tilde{f}(t) = \frac{c}{2\varepsilon_0} \frac{n_0}{1 + \alpha t^2} \frac{l^2}{\Phi_0} + f(t) \quad (7.272)$$

puis on cherche une approximation de  $\tilde{f}$  par un polynôme du second degré.

Le raisonnement est par la suite identique et conduit à

**Théoreme 47** *Le système précédent admet une solution formée d'une solution Lagrangienne et d'une onde de type CHILD-LANGMUIR dans la partie (SAV) raccordées par une courbe décroissante  $Y(t)$ . En ce qui concerne (SAM), elle est formée d'une onde de détente et de données stationnaires.*

*Le raccord entre (SAM) et (SAV) s'effectue à travers une Surface Libre définie par la courbe  $Z(t)$  telle que*

$$\forall t Y(t) \leq Z(t) \leq x_s(0).$$

*La solution est continue en vitesse et potentiel sur tout l'espace à tout instant tandis que le champ électrique est a priori discontinu à travers la Surface Libre. Quant à la densité, elle est régulière dans les quatre zones et discontinue au passage des interfaces de la ligne de raccordement et de la Surface Libre.*

### Conclusion

En premier lieu, la recherche de solutions de type CHILD-LANGMUIR a été issue de discussions avec [42] à partir de solutions calculées numériquement.

Dans toutes ces études issues des lois de conservation de la Mécanique et de la Physique des Plasmas, on a cherché à mettre en évidence l'apport des Problèmes Hyperboliques Dégénérés.

Dans cette approche, la Solution Lagrangienne permet, à la différence des Problèmes Hyperboliques " classiques " qui nécessitent la connaissance ( ainsi que la décomposition ) des ondes et des ondes élémentaires de Raréfaction et de Choc, de pouvoir construire la solution sauf près de ligne de raccordement.

Pour ce raccord, il faut faire appel à des solutions classiques en imposant la continuité du Potentiel et de la vitesse sans imposer de condition sur la continuité du champ Electrique au raccord de la Surface Libre.

En fait le couple ( densité, Champ Electrique) est défini de part et d'autre de cette discontinuité sans condition précisée à l' interface. La seule condition est en fait l' équation donnée dans le paragraphe (7.9.1) dans son raisonnement continu.

Au niveau numérique, la mise en oeuvre du traitement numérique ne demande pas de cadre particulier car il n' y a pas de choc. Il y a donc des différences fondamentales de résolution dans le cadre Dégénéré qui est essentiellement issu de la Physique des Plasmas •

## Chapitre 8

# Curriculum Vitae

### 8.1 Fonction d' Enseignement

Comme membre du Commissariat à l' Energie Atomique, j' ai eu l'occasion, de part ma sensibilité personnelle et d' un intérêt certain vis à vis de mes activités professionnelles, à participer à différentes charges d' enseignement qui m' ont toujours passionnées essentiellement par le contact avec de jeunes étudiants. Voici quelques exemples de charges d' enseignement.

#### 8.1.1 Du 1er Octobre 1984 au 30 Juin 1994

Enseignement à l' I.N.S.T.N. ( Institut National des Sciences et Techniques Nucléaires)

Cours de Génie Atomique sur la Modélisation des Problèmes Physiques ( Neutronique, Mécanique des Structures et des Fluides ) et les Méthodes numériques associées ( Equation de la Chaleur, Equation du Transport)

#### 8.1.2 Du 1er Octobre 1987 au 30 Juin 1994

Dans le cadre du DEA de Mécanique Appliquée à la Construction et pour l' Option Dynamique des Structures

Enseignement des Techniques de Calcul: Méthode des Elements Finis, des Equations Intégrales, Résolution des Systèmes Linéaires et Recherche associée des valeurs propres, Algorithmes temporels et Direction des Travaux Pratiques sur Ordinateurs

### **8.1.3 Du 1er Octobre 1992 au 30 Juin 2000**

Dans le cadre de l' Université d' EVRY VAL D'ESSONNE, Professeur Associé au CEMIF (Centre d' Etudes Mécaniques de l' Ile de France)  
Enseignement en Licence et Maîtrise sur les techniques de modélisation en Mécanique et en Energétique

### **8.1.4 Du 1er Octobre 1994 au 30 Juin 1997**

Dans le cadre de l' Université de CRETEIL- VAL DE MARNE , Enseignement en DEA des modèles d'écoulements diphasiques et de leur traitement numériques.

### **8.1.5 Depuis de 1er Octobre 2000**

Dans le cadre du DESS de l' Université d' AIX MARSEILLE I, Enseignement sur la Turbulence incompressible et compressible

## **8.2 Fonction d' Expert**

Depuis 1988, création et animation d' un Séminaire Annuel sur le "Calcul des Ecoulements et Fluides Compressibles", qui se tenait traditionnellement en Décembre et désormais en fin Janvier d' une durée de 3 jours.

Ce séminaire réunit des spécialistes de divers horizons: Universitaires, Nucléaire ( EDF, FRAMATOME-ANP), Aéronautique ( ONERA, CNES, MATRA), Automobile (RENAULT),...

Depuis le 1er Juin 1997, Expert Senior au CEA dans le domaine des Ecoulements Compressibles et des explosions liées à l' hydrogène

Création et animation d' un Séminaire CEA sur la MECANIQUE au CEA le 6 Octobre 1998 réunissant plus de 100 personnes.

Création et animation d' un Séminaire Mensuel au CEA/SACLAY/SEMT depuis le 1er Octobre 1999 avec la moitié d' intervenants extérieurs portant sur la

Mécanique des Structures et des Fluides ainsi que sur l'Analyse Numérique

Depuis le 1er Janvier 2001, expert en charge de l'Evaluation Interne des thèses proposées par les Unités en support au Haut Commissaire du CEA

## **8.3 Parcours Professionnel**

### **8.3.1 Depuis le 1er Mars 2001**

Ingénieur de Projets dans la Direction d' Objectifs DSNI ( Soutien aux Industriels du Nucléaire) en charge des programmes portant sur la Corrosion des Composants du Parc, la Durée de Vie des Structures en Béton, la Durée de Vie et les Performances des Générateurs de Vapeur et les Composants, la Tenue au Séisme, l' Intégrité Mécanique des Tuyauteries.

Ces activités concernent les domaines scientifiques suivants: la Mécanique des Structures et des Fluides, les Matériaux et leurs interactions éventuelles au service des besoins des Réacteurs Nucléaires.

### **8.3.2 Du 1er Novembre 1997 au 1er Mars 2001**

Assistant Scientifique dans le CEA/SACLAY/DMT en charge de la réflexion sur l'avenir de la Mécanique au sein du CEA ( appelée MEACANIQUE2010 ) , des études portant sur la Mécanique Probabiliste, des programmes scientifiques dans l' unité ainsi que du suivi des thèses du Service et du Secrétariat des accord coopératifs avec EDF et FRAMATOME dans le domaine de la Mécanique.

### **8.3.3 Du 1er Juin 1994 au 1er Novembre 1997**

Chef du Laboratoire d' Etudes de Thermohydraulique ( CEA/CADARACHE/LETH) au CEA CADARACHE en charge d' études numériques et expérimentales portant sur la turbulence incompressibles, les échanges thermiques, les écoulements à fortes pressions eau-air, l' étude des surfaces libres,....

Animation de groupes de travail sur les activités scientifiques à engager et animation de la vie du Laboratoire

### 8.3.4 Du 1er Mai 1983 au 1er Juin 1994

Ingénieur au CEA/SACLAY/DEMT sur les problèmes de sûreté d'enceintes soumises à des accidents graves internes et externes; Etudes portant sur la propagation d'ondes linéaires et non linéaires, d'ondes de détonation et leurs effets sur les structures mécaniques environnantes (logiciel PLEXUS). Pour les milieux externes, propagation acoustique tridimensionnelle en milieu libre, surpressions engendrées et leurs effets liés aux différentes géométries (logiciel ZEPHYR).. Ces études utilisent un prétraitement type Elements Finis qui permet, par sa souplesse de mise en oeuvre, une simplicité au niveau de la "formulation".

### 8.3.5 Du 1er Octobre 1980 au 1er Mai 1983

Contrat de Formation par la Recherche au CEA/DEDR) Préparation d'une thèse de 3ème cycle sur la " Modélisation des Ecoulements >Diphasiques sous l'hypothèse de non glissement de phase ".  
Les applications importantes portaient essentiellement sur l'étude du fluide dans un générateur de vapeur (logiciel CERBERE)

### 8.3.6 Diplomes

- Novembre 1981  
Thèse de 3ème Cycle, Analyse Numérique,  
Université Pierre et Marie CURIE, PARIS 6
- Juin 1978  
DEA d'Analyse Numérique,  
Université Pierre et Marie CURIE, PARIS 6
- Juin 1977  
Agrégation de Mathématiques
- Juin 1976  
CAPES de Mathématiques
- Années 1975-1976  
Licence et Maîtrise de Mathématiques, Université d'ORSAY, PARIS 11
- 1er Octobre 1974  
Entrée à l'ENS CACHAN, Section Mathématiques

## Chapitre 9

# Listes des publications et documents

### 9.1 Publications

## Bibliographie

- [FHLX00] A.FORESTIER, J.M.HERARD, X.LOUIS and E.XEUXET " *Numerical Simulation of Compressible Flows by a  $k - \varepsilon$  approximation*", Computers and Fluids ( soumis pour publication), (2000).
- [DFHLP00] E.DECLERCQ, A.FORESTIER, J.M.HERARD, X.LOUIS and G.POISSANT " *An exact RIEMANN Solver for a multicomponent turbulent flow* ", Part. 1 et 2, International Journal of Computational Fluid Dynamics (accepté pour publication), (2000).
- [FV00] A.FORESTIER and D.VOROBIEV " *Numerical Treatment of EULER-MAXWELL Equations with RIEMANN Solver* ", Computational Fluid Dynamics JOURNAL (accepté pour publication), (2000).
- [DFH00] E.DECLERCQ, A.FORESTIER et J.M.HERARD " *Comparaison de Solveurs numériques pour simuler la Turbulence Compressible* ", C.R. Acad. Paris ( accepté pour publication ), (2000).
- [FHL97] A.FORESTIER, J.M.HERARD et X.LOUIS " *Solveur de type Godunov pour simuler les écoulements turbulents compressibles* ", C.R. Acad. Paris t 324 , série I , p919-926,1997.
- [BCFVGT97] F.BARRE, F. DE CRECY, A.FORESTIER, M.VILLAND, M.GRANDOTTO, I.TOUMI et J.P. MAGNAUD " *TRIO-U Un Logiciel Moderne de Thermohydraulique* ", Rapport Scientifique CEA/DRN 1997.
- [F96] A.FORESTIER " *Non Strictly Hyperbolic Problems with no Pressure:*", 6ème Conference on Hyperbolic Problems - HONG KONG(CHINE)
- [F296] A.FORESTIER " *Simulation Numérique en Mécanique des Fluides Compressibles*", Support de cours Université PARISXII-Val de Marne DEA Systèmes Energétiques et Contrôle des Processus ( SECP) Filière Physique pour les Transferts Energétiques
- [FHL95] A.FORESTIER, J.M.HERARD and X.LOUIS " *Exact or Approximate Riemann Solvers to compute a two equation Turbulent Compressible*

*Model*", 9th International Conference on Finite Elements in Fluids News Trends and Applications, VENISE ( ITALIE)

- [F95] A.FORESTIER " *Quelques Applications de la Mécanique des Fluides Numérique au CEA* ", Support de Cours - Collège de Polytechnique Modélisation Numérique des Ecoulements Fluides -Mai 1995-PALAISEAU-
- [F94] A.FORESTIER " *TVD Scheme for the Euler Equations extended to viscous or reactive flows*", Computational Fluid Dynamics JOURNAL Vol3 n(1 April 1994 p53-63
- [SFVL94] R.SAUREL,A.FORESTIER,D.VEYRET and J.C.LORAU " *A Finite Volume scheme for Two-Phase Compressible Flow* ", International Journal for Numerical Methods in Fluids , Vol18,p803/819,1994
- [FHL94] A.FORESTIER, J.M.HERARD and X.LOUIS " *Non Linear Waves in a turbulent compressible Two-Equation Model*", 5ème Conference on Hyperbolic Problems- NEW YORK(USA)
- [RFT94] P.RAYMOND, A.FORESTIER et I.TOUMI " *Méthodes Numériques pour les Ecoulements de Fluides Compressibles*", Rapport Scientifique CEA/DRN 1994
- [FG93] A.FORESTIER and P.GONZALES " *Implicit scheme for P-system Equations via ROE 's linearisation*", Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol.43,p.246-257,1993
- [FLS94] A.FORESTIER, C.LECOMTE and M.STUDER " *Hydrogen Risk and Associated Calculation* ", SMIRT 12th - STUTTGART ( ALLEMAGNE)
- [FL92] A.FORESTIER and Ph. LEFLOCH " *Multivalued Solutions to Some Non-Linear and Non-Strictly Hyperbolic Systems*", Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics Vol9,N(1, February 1992, p1/24
- [FG92] A.FORESTIER and P.GONZALES " *Implicit scheme for P-system*", 4th Conference on Hyperbolic Problems - TAORMINA(ITALIE)
- [F91] A.FORESTIER " *Hydrogen Risk :Studies about Detonation Phenomena via PLEXUS code*", Workshop on Hydrogen Behaviour and Mitigation in Water-Cooled Nuclear Power Reactors, CEE- BRUXELLES ( BELGIQUE)
- [HBCFLAB90] A.HOFFMANN,H.BUNG,A.COMBESCURE,A.FORESTIER, M.LEPAREUX, B.AUROIRE et P.BOYCE " *Tenue des Structures aux Chocs*", Journées Sciences et Défense -PARIS(FRANCE)
- [F90] A.FORESTIER " *Treatment of Inert and Reactive flows by a TVD formulae*", 12ème Int. Conference on Numerical Methods in Fluids Dynamics - OXFORD(GB)

- [DFJM90] G.DHATT, A.FORESTIER, A.JAMI et J.P.MAGNAUD " *Méthodes Numériques en Mécanique des Fluides et Applications Industrielles*", Support de Cours - Cours IPSI - PARIS ( FRANCE)
- [DFH89] Y.DING, A.FORESTIER and T.HA DUHONG " *A Galerkin Scheme for the time domain integral equation of acoustic scattering from a hard surface*", Journal of Acoustic Society of America ( J.A.S.A.) Vol. 86, p 1566-1572 ,October 1989.
- [FBALM89] A.FORESTIER,H.BUNG,S.AITA,J.F.LEVY,N.MONTMAYEUR and A. TABBAL " *Numerical simulation of Inert and Reactive Flows by a F.E.M.*", 3ème Int. Conference on Numerical Combustion - SOPHIA-ANTIPOLIS - (FRANCE)
- [FG88] A.FORESTIER and C.GAUDY " *Second Order Scheme in bidimensional space for Compressible Gas with arbitrary mesh* ", 11ème International Conference on Numerical Methods in Fluids Dynamics -WILLIAMBURG ( USA)
- [FDH86] A.FORESTIER, Y.DING and T.HA DUHONG " *Space-Time Variational Formulation for the KIRCHOFF Integral Equation*", International Conference on Boundary Elements Methods in Engineering -BEJING (CHINE)
- [FG86] A.FORESTIER and S.GOLDSTEIN " *On two aspects of Hydrogen Risk*", 3ème Workshop on Containment Integrity -WASHINGTON (USA)
- [FG85] A.FORESTIER and S.GOLDSTEIN " *Calculation of Blast Loading on a Containment due to an internal Air- Hydrogen Detonation*", 2ème Workshop on Containment Integrity -BRUXELLES (BELGIQUE)
- [BF85] A.BAMBERGER et A.FORESTIER " *Introduction aux Schémas d'intégration des Equations Différentielles du Premier Ordre*", Recueil de Simulations Numériques - IMAGICIEL -
- [FL84] A.FORESTIER and M.LEPAREUX " *A Finite Element Method For Flow Problems in Blast Loading*", Methods For Transient and Coupled Problems -VENISE ( ITALIE)
- [FM83] A.FORESTIER and J.L.MONTAGNE " *Some Applications of Mixed Finite Elements to an ultra Compressible or a Two Phase Flow Computation*", 20ème Congrès A.I.R.H. -MOSCOU(RUSSIE)
- [FM283] A.FORESTIER and J.L.MONTAGNE " *Application of Mixed Finite Element to Two-Phase Flow Computations*", Advances in Reactor Computations (American Nuclear Society ) -SALT LAKE CITY (USA)

[F82] A.FORESTIER" *A Finite Element Method for an Ultracompressible Flow*", Advances in Reactor Computations (American Nuclear Society), Symposium on refined Modelling of Flows(AIRH)- PARIS-

## 9.2 Rapports

Ces rapports ne peuvent être diffusés que sous réserve expresse d'autorisation des responsables des unités concernées

## Bibliographie

- [DFG00] J.DEVOS, A.FORESTIER et R.J.GIBERT "*MECANIQUE 2010: Première Version*", Rapport CEA/DMT 00- 003
- [DV00] N.DEVICTOR and All. "*Approches Probabilistes en Mécanique*", Rapport CEA/DER/STR/00- 011
- [F98] A.FORESTIER "*LA MECANIQUE AU CEA : Séminaire CEA/INSTN du 6-10-1998*", C.R.SEMT/DIR/CR/98-847
- [FB97] A.FORESTIER et N.BAKOUTA "*Interprétation des essais AIRBUS*", Rapport CEA/DER/97-5010
- [FDPB96] A.FORESTIER, C.DE PASCALE et N.BAKOUTA "*Modélisation des phénomènes physiques d'AIRBUS*", Rapport CEA/DER/96-5005
- [FR95] A.FORESTIER et P.ROUBIN "*TRIO-U: Premiers calculs 3D pour PHE-NIX*", Rapport CEA/DER/95-5043
- [RGF94] A.ROUBOA, R.GALON and A.FORESTIER (CEA) "*Hydrogen- Air Detonation Experiments and Numerical Simulations Detonation models and Experiment Comparisons*", Containment Project " Hydrogen Detonations Contract number FI3S-CT94-0034
- [GF94] R.GALON et A.FORESTIER "*PLEXUS: schéma de Godounov de VAN LEER pour la résolution des Equations d'EULER 3D*", Rapport CEA/DMT/94-054
- [BMRWWFC93] W. BREITUNG, M. MOSCHKE, REDLINGER, H.WERLE, H.J.WOLFF (FZK-INR), A.FORESTIER (CEA) and C.CAROLI (ENEA) "*Hydrogen- Air Detonation Experiments and Numerical Simulations Progress report for the Commission of the European Communities: Containment Project -Hydrogen- Detonation-*", Rapport CEA/DMT/93-646
- [RF93] P.RAYMOND et A.FORESTIER "*Séminaire sur les Ecoulements de Fluides Compressibles*", Rapport CEA/DMT/93.567

- [FHL93] A.FORESTIER, J.M. HERARD et X.LOUIS " *Un système non strictement hyperbolique décrivant une modélisation de la Turbulence Compressible*", Rapport CEA/DMT/93.554
- [F93] A.FORESTIER " *Implicit Method for Hyperbolic System. Application to P-system or Gas Dynamic*", Rapport CEA/DMT/93-510
- [BRF93] W. BREITUNG, R. REDLINGER (FZK-INR) and A.FORESTIER (CEA) " *State of the Art: Report on Numerical modelling on Hydrogen-Air Detonation*", Rapport CEA/DMT/93.496
- [BMRWWFC92] W. BREITUNG, M. MOSCHKE, REDLINGER, H.WERLE, H.J.WOLFF(FZK-INR), A.FORESTIER (CEA) et C.CAROLI (ENEA) " *Hydrogen- Air Detonation Experiments and Numerical Simulations Progress report for the Commission of the European Communities*", Containment Project "Hydrogen Detonation" Contract number FI3S-CT92-0007
- [F92] A.FORESTIER " *Un schéma Volume Fini pour les Ecoulements Diphasiques Compressibles*", Rapport CEA/DMT/92-631
- [F292] A.FORESTIER " *Etude des conséquences d'une détonation d'hydrogène dans une cuve de produits de fission*", Rapport CEA/DMT/92-592
- [F392] A.FORESTIER " *Etude des conséquences d'une détonation hydrogène dans un bâtiment de SPX1*", Rapport CEA/DMT/92-512
- [F492] A.FORESTIER " *TVD Scheme for the EULER equations: Extension to viscous or reactive flows* ", Rapport CEA/DMT/92-509
- [FB92] A.FORESTIER and W.BREITUNG " *STATE OF THE ART: Report on Numerical Modelling on H2-Air detonation*", Rapport CEA/DMT/92-496
- [FC92] A.FORESTIER et A.CAROLI " *Analysis of Detonation in Air-Mixtures by means of PLEXUS code*", Rapport CEA/DMT/92-495
- [F592] A.FORESTIER " *Implicit schemes for P-system equation via ROE' s linearization*", Rapport CEA/DMT/92-355
- [HFL91] J.M.HERARD, A.FORESTIER et X.LOUIS " *A Non Strictly Hyperbolic System to describe Compressible Turbulence*", Rapport HE 41/94.11A EDF/Direction des Etudes et Recherches
- [BF91] H.BUNG et A.FORESTIER " *Tenue d'une enceinte lors d'une détonation*", Rapport CEA/DMT/91-356
- [F91] A.FORESTIER " *Stable and unstable aspect in a combustion treatment: case of hydrogen reaction*", Rapport CEA/DMT/91-342

- [BCFLG91] H.BUNG, A.COMBESCURE, A.FORESTIER, M.LEPAREUX et P.GALON " *Lois de comportement et modélisation des impacts*", Rapport CEA/DMT/91-292
- [FB91] A.FORESTIER et M.BILLAUD " *Etude de la détonation H2 dans des géométries allemandes*", Rapport CEA/DMT/91-220
- [LBF91] M.LEPAREUX, H.BUNG et A.FORESTIER " *PLEXUS: Note succincte de présentation*", Rapport CEA/DMT/91-144
- [FB291] A.FORESTIER et M.BILLAUD " *Prise en compte de la détonation H2 dans PHEBUS PF*", Rapport CEA/DMT/91-092
- [F91] A.FORESTIER " *Etude par Eléments Finis de l' Equation des Ondes*", Rapport CEA/DMT/91-065
- [GBLF91] P.GALON , H.BUNG , M.LEPAREUX et A.FORESTIER " *PLEXUS: Examples Manual*", Rapport CEA/DMT/91-011
- [F291] A.FORESTIER " *Application du code PLEXUS à l'étude d'un jet supersonique dans une géométrie 2D de puit de cuve* ", Rapport CEA/DMT/91-002
- [F90] A.FORESTIER " *Application du code PLEXUS à l'étude d'un jet supersonique dans une géométrie 2D de puit de cuve* ", Rapport HE 41/90.09 EDF/Direction des Etudes et Recherches
- [F290] A.FORESTIER " *Traitement de la Combustion dans un écoulement non visqueux*", Rapport CEA/DMT/90-378
- [BSLF90] H.BUNG, B.SCHAWB, M.LEPAREUX et A.FORESTIER " *PLEXUS: Fiches théoriques* ", Rapport CEA/DMT/90-159
- [F89] A.FORESTIER " *Boundary conditions in a TVD scheme for EULER Equations*", Rapport CEA/DMT/89-436
- [F289] A.FORESTIER " *Etude d' une détonation localisée dans une casemate*", Rapport CEA/DMT/89-407
- [F389] A.FORESTIER " *Etude de la détonation hydrogène. Comparaison pour des calculs plans et axisymétriques des effets de concentration* ", Rapport CEA/DMT/89-384
- [BF89] H.BUNG et A.FORESTIER " *Etude de la tenue du réacteur SILOE à une explosion externe*", Rapport CEA/DMT/89-208
- [FL88] A.FORESTIER and Ph. LEFLOCH " *Multivalued solutions to Some Non-linear and Non-strictly Hyperbolic Systems*", Rapport Ecole Polytechnique - CMA n212

- [FBB88] A.FORESTIER, H.BUNG et M.BLOZOWSKI " *Adaptation d'un Solveur de RIEMANN dans PLEXUS pour un gaz réel*", Rapport CEA/DMT/88-321
- [BF88] H.BUNG et A.FORESTIER " *PLEXUS: Calcul de jet plan supersonique dans un domaine présentant un obstacle pour un gaz parfait*", Rapport CEA/DMT/88-295
- [FG88] A.FORESTIER et S.GOLDSTEIN " *Calcul du débit d'UF6 dans une fente rectangulaire*", Rapport CEA/DMT/88-276
- [F88] A.FORESTIER " *Schémas du second ordre en bidimensionnel pour un fluide compressible avec un maillage arbitraire*", Rapport CEA/DMT/88-263
- [FG87] A.FORESTIER et S.GOLDSTEIN " *Modélisation du transvasement dans le moto compresseur STABINE*", Rapport CEA/DMT/87-515
- [F87] A.FORESTIER " *Analyse Numérique Matricielle*", Rapport CEA/DMT/87-475
- [FD87] A.FORESTIER et Y.DING " *Programme ZEPHYR: comparaison méthode de collocation et méthode variationnelle*", Rapport CEA/DMT/87-331
- [FG287] A.FORESTIER et C.GAUDY " *PLEXUS: Schéma de VAN LEER, tests bidimensionnels*", Rapport CEA/DMT/87-286
- [FB87] A.FORESTIER et J.BROCHARD " *Tenue de l'enceinte REP1300 en cas de détonation hydrogène*", Rapport CEA/DMT/87-276
- [FG387] A.FORESTIER et S.GOLDSTEIN " *On two aspects of hydrogen risk*", Rapport CEA/DMT/87-224
- [F287] A.FORESTIER " *Introduction aux Eléments Finis*", Rapport CEA/DMT/87-004
- [FD287] A.FORESTIER et Y.DING " *Space Time Variational formulation for the KIRCHOFF Integral Equation*", Rapport CEA/DMT/87-003
- [F387] A.FORESTIER " *Schémas numériques de l'Equation de Transport*", Rapport CEA/DMT/87-002
- [F86] A.FORESTIER " *Etude des Schémas  $S_{\alpha,\beta}$  modifiés Application à la Mécanique des Fluides (2ème Partie)*", Rapport CEA/DMT/86-477
- [F286] A.FORESTIER " *Etude Physico- Mathématique des Ondes de choc avec et sans réaction chimique. Application numérique à la propagation d'une onde de détonation(2ème Partie)*", Rapport CEA/DMT/86-390

- [F386] A.FORESTIER " *Etude Mathématique des Problèmes Hyperboliques associés aux lois de conservation (1ère Partie)*", Rapport CEA/DMT/86-389
- [F486] A.FORESTIER " *Etude des Schémas Numériques du second ordre de type VAN LEER intervenant en dynamique des gaz*", Rapport CEA/DMT/86-388
- [MF86] P.MONS et A.FORESTIER " *Etude des Schémas  $S_{\alpha,\beta}$  Application à la Mécanique des Fluides (1ère Partie)* ", Rapport CEA/DMT/86-365
- [F586] A.FORESTIER " *Calcul de la tenue du réservoir PHEBUS suite à une détonation hydrogène*", Rapport CEA/DMT/86-364
- [HLSFB84] A.HOFFMANN,A.COMBESCURE,A.MILLARD,A.FORESTIER and M.LEPAREUX " *PLEXUS: A General Computer for Fast Dynamics Analysis* ", Rapport CEA/DMT/86-295
- [FG86] A.FORESTIER et S.GOLDSTEIN " *On two aspects of hydrogen risk*", Rapport CEA/DMT/86-203
- [FG85] A.FORESTIER et S.GOLDSTEIN " *Internal Hydrogen- Air Detonation in a Containment*", Rapport CEA/DMT85-426
- [F84] A.FORESTIER " *PLEXUS: Validation bidimensionnelle de l'étude des ondes de choc(1ère partie)*", Rapport CEA/DMT/84-305
- [FH84] A.FORESTIER et E.HOUSSINI-SKALLI " *PLEXUS: Premiers calculs de l'Explosion Hydrogène dans le cas d'une enceinte axisymétrique*", Rapport CEA/DMT/84-304
- [HLSFB84] A.HOFFMANN,M.LEPAREUX,B.SCHAWB,A.FORESTIER et H. BUNG " *PLEXUS: General Computer Code for Fast Dynamics Analysis*", Rapport CEA/DMT/84-295
- [FL84] A.FORESTIER et M.LEPAREUX " *PLEXUS: Cas de l'explosion hydrogène*", Rapport CEA/DMT/87-085
- [F284] A.FORESTIER " *Etude des ondes de choc et quelques applications à PLEXUS*", Rapport CEA/DMT/84-084
- [BFL84] H.BUNG, A.FORESTIER et M.LEPAREUX " *Programme PLEXUS: traitement des fluides incompressibles et peu compressibles*", Rapport CEA/DMT/84-023
- [FM82] A.FORESTIER et J.L.MONTAGNE " *CERBERE: Manuel d'utilisation*", Rapport CEA/DRE/SERMA/LDCC/525

## Chapitre 10

# Liste des thèses et références

### 10.1 Thèses

## Bibliographie

- [AB] A.BECCANTINI " *Solveurs de Riemann pour des mélanges de gaz parfaits avec capacités calorifiques dépendantes de la température*", Soutenu le 16 Juin 2000, Université EVRY VAL D'ESSONNE, Jury: Mrs. B.DUBROCCA, A.FORESTIER, R.J.GIBERT, H.PAILLERE, G.POISSANT, L.QUARTAPELLE, R.SAUREL, E.TORO
- [CB] C.BEC " *Modélisation Numérique d'Écoulements Incompressibles à Interfaces Mobiles en Maillage Non Structuré*", Soutenu le 25 Avril 2000, Université de la MEDITERRANEE (AIX - MARSEILLE II), Jury: Mrs M.BENHADDID, R .BORGHI, A .FORESTIER, C.KHARIF, O.LEBAIGUE, M.VILLAND, S.ZALESKI
- [EXD] E.XEUXET. DECLERCQ " *Comparaison de solveurs numériques pour la turbulence bifluide* ", Soutenu le 23 Juin 1999, Université d' EVRY-VAL D' ESSONNE, Jury: Mrs A.CHPOUN, O.DAUBE, A.FORESTIER, Th. GALLOUET, S.GAUTHIER, R.J.GIBERT, M.GIAT, J.M.HERARD, O.LAFITTE, G.POISSANT, R.SAUREL
- [FR] F.ROUCAYROL " *Résolution des Equations de Navier-Stokes pour les mélanges de gaz réactifs avec diffusion d'espèces par Solveurs de Riemann*", Soutenu le 3 Juillet 1998, Université EVRY VAL D'ESSONNE, Jury: Mmes C. SCHMIDT-LAINE, B. THOMAS, Mrs R.BORGHI, O.DAUBE, A.FORESTIER, R.J. GIBERT, Ph. LEFLOCH
- [DV] D.VOROBIEV " *Couplage numérique des Equations du système d' EULER et celles du système de MAXWELL en 3D* ", Soutenu le 19 Juin 1998, Université EVRY VAL D'ESSONNE , Jury: Mrs R.ABGRALL, A .FORESTIER, R.J.GIBERT, Ph. LEFLOCH, G.POISSANT, J.N. RICHET, R.SAUREL
- [CJ] C.JURSKI " *Etude expérimentale du Transport et de l' évolution granulométrique de gouttelettes microniques en écoulement critique en tuyère*", Soutenu le 5 Septembre 1997, Université PARIS 13-VAL DE MARNE, Jury: Mme E.GEHIN, Mrs D.BOULAUD, A.FORESTIER, J.LEBLOND, G.PIAR, A.RENOUX

- [SHKK] S. HO KEE KING " *Contribution à la Modélisation des Ecoulements Diphasiques en canalisation influence des processus d'entraînement et de déposition dans le cas d'une configuration annulaire dispersée* ", Soutenu le 3 Octobre 1996, Université PARIS 13-VAL DE MARNE, Jury: Mrs Y. CANDAU, D.GENTILLE, A.FORESTIER, H.LEMONNIER, G.PIAR, M.THELLIEZ
- [EC] E.CAMALET " *Méthodes de Couplage Euler-Lagrange pour les Equations d'Euler -Poisson* ", Soutenu le 19 Mai 1995, Université PARIS 6, Jury: Mmes E.GODLEWSKI, S.MAS-GALLIC, Mrs Y.BRENNIER, L.DESVILLETES, A.FORESTIER, Y.PERREAL
- [XL] X.LOUIS " *Modélisation Numérique de la Turbulence Compressible* ", Soutenu le 6 Juillet 1995, Université PARIS 6, Jury: Mme P.LEYLAND, Mrs R.ABGRALL, C.BASDEVANT, D.BESNARD, A.FORESTIER, J.M.HERARD, Y.MADAY
- [MF] M.FILIPPE " *Etude Mathématique et Numérique d'un Problème d'Interaction Fluide-Structure dépendant du temps par la Méthode de Couplage Eléments Finis - Equations Intégrales* ", Soutenu le 28 Novembre 1994, Ecole Polytechnique, Jury: Mrs T.ABBOUD, A.BACHELOT, A.FORESTIER, R.J.GIBERT, J.GIROIRE, T. HA DUONG, J.C. NEDELEC
- [YDY] Y.DING " *Etude par Equations Intégrales en temps des Equations de l'Acoustique 3D* ", Soutenu le 15 Mai 1989, Université PARIS 11, Jury: Mrs A.BAMBERGER, A.FORESTIER, R.J. GIBERT, T. HA DUONG, J.C.NEDELEC
- [LBL] L.BENAIM-LUNEVILLE " *Applications des méthodes particulières en Mécanique des Fluides et en Physique des Plasmas* ", Soutenu le 25 Novembre 1988, Université PARIS 6, Jury: Mme S.MAS-GALLIC, Mrs A.FORESTIER, C.GREGARD, A.HOFFMANN, O.PIRONNEAU, P. A. RAVIART

## 10.2 Références

- [1] J. K. Knowlton, "The structure of the human brain," *Journal of the American Academy of Child and Adolescent Psychiatry*, vol. 10, pp. 1-10, 1971.
- [2] J. K. Knowlton, "The structure of the human brain," *Journal of the American Academy of Child and Adolescent Psychiatry*, vol. 10, pp. 1-10, 1971.
- [3] J. K. Knowlton, "The structure of the human brain," *Journal of the American Academy of Child and Adolescent Psychiatry*, vol. 10, pp. 1-10, 1971.
- [4] J. K. Knowlton, "The structure of the human brain," *Journal of the American Academy of Child and Adolescent Psychiatry*, vol. 10, pp. 1-10, 1971.
- [5] J. K. Knowlton, "The structure of the human brain," *Journal of the American Academy of Child and Adolescent Psychiatry*, vol. 10, pp. 1-10, 1971.
- [6] J. K. Knowlton, "The structure of the human brain," *Journal of the American Academy of Child and Adolescent Psychiatry*, vol. 10, pp. 1-10, 1971.
- [7] J. K. Knowlton, "The structure of the human brain," *Journal of the American Academy of Child and Adolescent Psychiatry*, vol. 10, pp. 1-10, 1971.
- [8] J. K. Knowlton, "The structure of the human brain," *Journal of the American Academy of Child and Adolescent Psychiatry*, vol. 10, pp. 1-10, 1971.
- [9] J. K. Knowlton, "The structure of the human brain," *Journal of the American Academy of Child and Adolescent Psychiatry*, vol. 10, pp. 1-10, 1971.
- [10] J. K. Knowlton, "The structure of the human brain," *Journal of the American Academy of Child and Adolescent Psychiatry*, vol. 10, pp. 1-10, 1971.

## Bibliographie

- [1] P.AILLAUD, P.VERPEAUX, J.M.PAROT AND B.BARBE, *Calcul de diffraction d'onde par un corps de forme quelconque*, 11th ICA Proceedings, Paris, 1983.
- [2] J.E.ALLEN AND J.G.ANDREWS, *A note on ion rarefaction waves*, J. Plasma Physics., Vol. 4 , Part 1 , pp 187-194, 1970.
- [3] C.BARDOS., *Introduction aux Problèmes Hyperboliques Non Linéaires*, Cours CIME, 1982.
- [4] B.S.BALDWIN AND T.J.BARTH, *A one equation turbulence model for high Reynolds number wall-bounded flows*, NASA Tech. Memorandum n102847
- [5] M.R.BAER AND J.W.NUNZIATO, *A two-phase mixture theory for the deflagration to detonation transition-DDT- in a reactive granular materials*, Int. Journal of Multiphase Flow, Vol 12, pp 861-839, 1986.
- [6] A.BAMBERGER AND T.HA DUONG, *Formulation variationnelle espace-temps pour le calcul par potentiel retardé d'une onde acoustique*, Math. Methods for Applied. Science, Vol 8, pp 405-435 and pp 598-608, 1986.
- [7] S. BARRE, D. ALEM, J. P. BONNET, *Experimental Study of a Normal Shock - Homogenous Turbulence Interaction*, AIAA Journal, Vol.34, n5, May 1996.
- [8] C.L.BENNET AND M.H.MIERRAS, *Time domain integral equation solution for acoustic scattering from fluid targets*, J. Acoustic Scientific of America, Vol 69, pp 1261-1265, 1981.
- [9] M. BEIRO SA VEIGA, *The stability of one dimensional stationary flow of compressible viscous fluids*, Annales de l' Institut Henri POINCARÉ, V7, n4, pp259-268, 1990.
- [10] F.BERGER, J.F.COLOMBEAU ET M.MOUSSAOUI, *Solutions Mesures de Dirac de Systèmes de Lois de Conservation et Applications Numériques*, C.R.A.S., t.316, Série I, pp 989-994, 1993.

- [11] CH. BERTON, *Contribution à l'Analyse Numérique des Equations de Navier-Stokes compressibles à deux entropies spécifiques. Application à la turbulence compressible*, PhD Thesis, University of PARIS VI, 1999.
- [12] CH. BERTON AND F.COQUEL, *Convection diffusion system with first and second order in non conservation form*, in preparation, 1999.
- [13] CH. K.BIRDSALL ET A.BRUCE LANGDON, *Plasma Physics via Computer Simulation*, McGraw-Hill Company, 1985.
- [14] D.L.BOOK, J.P.BORIS AND K.HAIM, *Flux corrected transport ii: generalisation of the method*, J. Computational Physics, Vol 18, pp 243-283, 1975.
- [15] F.BOUCHUT, *On zero Pressure Gas Dynamics*, Soumis à Publication J.C.P., 1998.
- [16] T.J.M. BOYD ET J.J. SANDERSON, *Plasma Dynamics*, Nelson,(1969)
- [17] Y.BRENNIER, *Systèmes Hyperboliques des Lois de Conservation*, Publications du Lab. d'Analyse Numérique, Université P. et M.CURIE, 1992.
- [18] G.BRUN, J.M. JEANDEL AND D.UHLMANN, *An approximate Roe-type Riemann solver for a class of realisable second-moment closures*, to appear in the International Journal of Computational Fluid Dynamics, 2000.
- [19] M. BRUNEAU, *Introduction aux Théories de l'Acoustique*, Publications Université du Maine,(1983)
- [20] TH. BUFFARD, *Analyse de quelques méthodes de Volumes Finis non structurés pour la résolution des Equations d'EULER*, University of PARIS 6, Thesis, 1993.
- [21] I.S.CHANG, *One and two-phase nozzle flows*, AIAA Journal, Vol 18, pp 1455-1461, 1980.
- [22] S.CHAPMAN AND T.G.COWLING, *The Mathematical Theory of Nonuniform Gases*, Cambridge University Press, New York ,1953.
- [23] P.COELLA AND A.L.ZACHARY, *A High-Order Godunov Method for the Equations of Ideal Magneto hydrodynamic*, J.C.P.99, pp 341-347, 1992.
- [24] L.COMBE, *Simulation numérique gaz-particules sur maillage non structuré*, PhD thesis, Institut National Polytechnique de TOULOUSE, 1997.
- [25] F.COQUEL AND PH. LEFLOCH, *Convergence of finite difference schemes for conservation laws in several space dimension :A general theory*, SIAM Journal of Numerical Analysis, Vol 30, pp. 675-700, 1993.

- [26] F.COQUEL AND M.S.LIOU, *Hybrid Upwind Splitting by a field by field decomposition*, NASA Tech. Memo., ICOMP n 95-2, 1995.
- [27] F.COQUEL AND C.MARMIGNON, *Simulation numérique d'écoulements faiblement ionisés en déséquilibre thermo-chimique*, ONERA, 1993.
- [28] R.COURANT AND K.O.FRIEDRICHS, *Supersonic Flow and Shock Waves*, Interscience Publishers, London, 1948.
- [29] E.DANIEL, R.SAUREL, M.LARINI AND J.C.LORAUD, *A comparison between centred and upwind schemes for two-phase compressible flows*, AIAA Paper, 1993.
- [30] E.DANIEL, M.LARINI, J.C.LORAUD AND B.PORTERIE, *A numerical simulation of injection of droplets in a compressible flow*, AIAA Paper, pp 920-929, 1992.
- [31] E.DECLERCQ, A.FORESTIER, J.M.HERARD, X.LOUIS and G.POISSANT " *An exact RIEMANN Solver for a multicomponent turbulent flow* ", International Journal of Computational Fluid Dynamics (accepté pour publication), (2000).
- [32] J.M.DELHAYE, *Equations fondamentales des Ecoulements Diphasiques*, Part 1 et 2 CEA-R-3429, CEN 17 Rue des Martyrs, 38054 GRENOBLE, FRANCE.
- [33] G.DEL MASO, PH. LEFLOCH AND F.MURAT, *Definition and weak stability of non conservative product* , J. of Maths Pure and Applied, Vol74, pp 483-548, 1995.
- [34] D.DESBORDES, *Aspects stationnaires et transitoires de la détonation dans les gaz*, Université of POITIERS, Thesis, 1991.
- [35] D.DESBORDES, J.P.SAINT-CLOUD ET J.L.LEYER, *Calculs des effets de pression engendrée par la détonation et la déflagration dans une enceinte fermée des mélanges air-vapeur d'eau - hydrogène*, Lab. d'Energétique de l'ENSMA, Poitiers, 1981.
- [36] F. DE VUYST, *Schémas non conservatifs et schémas cinétiques pour la simulation d'écoulements hypersoniques non visqueux en déséquilibre thermo- chimique*, PhD Thesis, Université Paris VI, 1994.
- [37] Y.DING, *Etude par Equations Intégrales en temps des Equations de l'Acoustique 3d*, PhD Thesis, Université Paris XI, 1989.
- [38] Y.DING, A.FORESTIER and T.HA DUHONG, " *A Galerkin Scheme for the time domain integral equation of acoustic scattering from a hard surface*", Journal of Acoustic Society of America ( J.A.S.A.) Vol. 86, p 1566-1572 ,October 1989.

- [39] R.J.DIPERNA, *Global Solution to a class of non linear hyperbolic systems of equations*, Comm. Pure and Applied Mathematics, V26, p1-28, 1973.
- [40] J.L.DOHNER, R.SHOURESHI AND R.J.BERNARD, *Transient analysis of 3d wave propagation using B.E.M.*, Int. Journal Numerical Methods Engineering, Vol 24, pp 621-634, 1987.
- [41] F.DONEDDU AND ALL, *Méthode de MONTE CARLO et Physique SILVA associée*, Formation Interne DPE, CEA-DCC, 1994.
- [42] F.DONEDDU, *Communication personnelle*, 2001.
- [43] F.DUBOIS, 00, *Volumes Finis pour la Dynamique des gaz.*, Preprint, Mai 2000.
- [44] F.DUBOIS, *Partial Riemann problem, boundary conditions and gas dynamics*, note CNMAM 337-2000, Juin 2000.
- [45] J.K.DUKOWICZ, *A particule fluid numerical for liquid sprays*, J. Computational Physics, Vol 35, pp 229-253, 1980.
- [46] P.EMBED AND M.BAUER, *Mathematical analysis of a two-phase continuum mixture theory*, Continuum Mech. Thermodynamic, Vol 4, pp 279-312, 1992.
- [47] A.FAVRE, *Equations des gaz turbulents compressibles-Méthode des vitesses moyennes; méthode des vitesses macroscopiques pondérées par la masse volumique*, Journal de Mécanique, Vol.4, n4, 1965.
- [48] J.H.FERZIGER AND H.G.KAPER, *Mathematical Theory of Transport Process in Gases*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam/London, 1972.
- [49] A.J.FORESTIER, 94, *T.V.D. Scheme for the EULER Equations extended to viscous or reactive fluid*, Computational Fluid Dynamics Journal, Vol 2 N4, January 1994.
- [50] A.FORESTIER, 91 " *Stable and unstable aspect in a combustion treatment: case of hydrogen reaction*", Rapport CEA/DMT/91-342
- [51] A.J.FORESTIER, 90, *Treatment of Inert and Reactive Flows by a T.V.D. Scheme in 2D Space in unstructured geometry*, 12 ICNMF Oxford, 1990.
- [52] A.FORESTIER, 88 " *Schémas du second ordre en bidimensionnel pour un fluide compressible avec un maillage arbitraire*", Rapport CEA/DMT/88-263
- [53] A.FORESTIER, 86 " *Etude des Schémas  $S_{\alpha,\beta}$  modifiés Application à la Mécanique des Fluides (2ème Partie)*", Rapport CEA/DMT/86-477

- [54] A.FORESTIER,86 " *Etude des Schémas Numériques du second ordre de type VAN LEER intervenant en dynamique des gaz*", Rapport CEA/DMT/86-388
- [55] A.FORESTIER,86,*Etude Mathématique des Equations Macroscopiques déduites des Equations de VLASOV - POISSON*, Rapport DMT 86/296, 1986.
- [56] A.FORESTIER et Y.DING " *Space Time Variational formulation for the KIRCHOFF Integral Equation*", Rapport CEA/DMT/87-003
- [57] A.FORESTIER C.GAUDY AND H.BUNG, *Second Order scheme for Arbitrary Mesh in Compressible Fluid Dynamics*, 9<sup>th</sup> ICNMFJ Williamsburg, July 1988.
- [58] A.FORESTIER, H.BUNG et M.BLOZOWSKI " *Adaptation d'un Solveur de RIEMANN dans PLEXUS pour un gaz réel*", Rapport CEA/DMT/88-321
- [59] A.FORESTIER AND H.BUNG, *Boundary Conditions in a TVD Scheme for EULER Equation in a Finite Element Formulation*, 3<sup>rd</sup> ISCFD Nagoya, August 1989.
- [60] A.FORESTIER and P.GONZALES " *Implicit scheme for P-system Equations via ROE 's linearization*", Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol.43,p.246-257,1993
- [61] A.FORESTIER, J.M.HERARD AND X.LOUIS, *An investigation of the K- $\epsilon$  and K-R turbulent compressible models*, Rapport EDF,HE-41/95/012/A and ASME/JSME Fluids Engineering Division Summer Meeting, 1995.
- [62] A.FORESTIER, J.M.HERARD AND X.LOUIS, *A Godounov type solver to compute turbulent compressible flows*, C.R.A.S. Paris, Tome 324, Série 1, n8, pp. 919 - 926,1997.
- [63] A.FORESTIER, J.M.HERARD, X.LOUIS, E.XEUXET AND G.POISSANT, *An exact Riemann Solver for a multi component turbulent flow*, submitted to Computational Fluid Dynamics., 1999.
- [64] A.FORESTIER and D.VOROBIEV " *Numerical Treatment of EULER-MAXWELL Equations with RIEMANN Solver* ", Computational Fluid Dynamics JOURNAL (accepté pour publication), (2000).
- [65] A.FORESTIER et F.ROUCAYROL " *Glissement en combustion: Approche Numérique* ", soumis à Archiv in Rational Mechanics and Analysis.
- [66] M.B.FRIEDMANN AND R.P.SHAW, *Diffraction of Pulses by cylindrical obstacles of arbitrary cross section*, J. Applied Mechanics, Vol29,pp 40-46, 1962.

- [67] K.O.FRIEDRICHS AND H.KRANZER, *Non Linear Wave Motion in Magneto hydrodynamics*, Report MH-8, Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1954.
- [68] TH. GALLOUET ET J.M.MASELLA, *Un schéma de Godounov approché*, CRAS Paris, Tome 323, Série I, pp 77-84, 1996.
- [69] I.GASSMANN, *Combustion*, Academic Press, 1987.
- [70] H.GILQUIN, Thèse de 3ème Cycle, Université de LYON-St ETIENNE, 1984.
- [71] J.GLIMM, *Solutions in Large for Nonlinear Hyperbolic Systems of Equations*, Comm. Pure and Applied Mathematics, Vol18 , pp597, 1965.
- [72] E.GODLEWSKI AND P.A.RAVIART, *Hyperbolic Systems of conservative laws*, Tome 1 , SMAI, Ellipses, 1991.
- [73] E.GODLEWSKI AND P.A.RAVIART, *Hyperbolic Systems of conservative laws*, Tome 2, Applied Mathematical Sciences, Vol118, Springer, 1995
- [74] S.GODOUNOV, 79 , *Schémas aux Différences* , Edition MIR, 1979.
- [75] S.GODOUNOV, 57 , *A Finite Difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics*, Math.Sb.,47, pp 357-393, 1957.
- [76] S.GODOUNOV AND COLL., *Equations de la Physique Mathématique* ,Edition MIR, 1979.
- [77] S.GODOUNOV AND COLL., *Résolution Numérique des Problèmes Multidimensionnels de la Dynamique des Gaz*, Edition MIR, 1979.
- [78] R.J.GOLDSTON ET P.H.RUTHERFORD, *Introduction to Plasma Physics*, Institute of Physics Publishing, 1997.
- [79] J.GOSSET, *Modélisation de plasma par frontière libre*, Rapport Scientifique de la Direction du Cycle du Combustible, Publications CEA, 1998.
- [80] J.GOSSET, *Multidimensional Time-dependent Free Boundary Model of Ion Extraction*, Submitted to Journal of Computational Physics, 1999.
- [81] J.GOSSET, *Modélisation par frontière libre de l'extraction d'ions dans un plasma en régime instationnaire*, Thèse de l' Ecole Polytechnique, 1998.
- [82] GRADSHTEYN AND RYSNIK, *Tables of Integrals, Series and Integrals*, Edition MIR, 1981.

- [83] T. HA DUONG, *Equations intégrales pour la résolution numérique de problèmes de diffraction d'ondes acoustiques dans  $R^3$* , Thèse d'état, Université Paris VI, 1987.
- [84] A.HARTEN, *On a class of High Resolution Total Variation Stable Finite Difference Scheme*, SIAM Journal of Numerical Analysis, Vol21, 1984 February.
- [85] A.HARTEN, H.C.YEE AND R.F.WARMING, *Implicit Total Variation Diminishing(T.V.D) - Schemes for Steady State Calculations*, Journal of Computational Physics, Vol.57, pp 327-360, 1985.
- [86] J.M.HERARD, A.FORESTIER AND X.LOUIS, *A non strictly hyperbolic system to describe compressible turbulence*, Internal Report EDF, HE-41/94.11A, 1994.
- [87] G.HETSRONI, *Handbook of Multiphase Systems*, Hemisphere Mc Graw-Hill, 1982.
- [88] J.O.HIRSCHFELDER, C.F.CURTISS AND R.B.BIRD, *Molecular Theory of Gases and Liquids*, John Wiley Sons, NEW YORK, 1954.
- [89] T.J.R.HUGUES AND M.MALLET, *New Finite Element Methods for the Compressible EULER and NAVIER-STOKES Equations*, Notes on Numerical Fluid mechanics, Springer-Verlag, 1986.
- [90] M.ISHII, *Thermodynamic Dynamic Theory of Two Phase-Flow*, Collection Eyrolles EDF/Etudes et Recherches, 1975.
- [91] M.ISHII, Y.UMEDA AND M.YUHI, *Numerical analysis of gas-particule two-phase flows*, J. Fluid Mech., Vol 203, pp 475-515, 1989.
- [92] K.JANSEN, Z.JOHAN AND T.J.R.HUGUES, *Implementation of a one-equation turbulence model within a stabilized finite element formulation of a symmetric advective diffusive system*, CMAME, Vol105, pp405-433, 1993.
- [93] S.N.KRUZKOV, 70, *First Order Quasilinear Equations in Several Independent Variables*, Math. USSR Sb., pp217-243, 1970.
- [94] S.N.KRUZKOV, 69, *Generalized Solutions of the Cauchy Problem in the Large for Non Linear Equations of First Order*, Soviet. Math. Doc., Vol10, 1969.
- [95] P.KUENTZMANN, *Aéro-thermo-chimie des Suspensions*, Gauthier-Villars, Paris, 1973.

- [96] A.KUMBARO , *Modélisation, Analyse mathématique et numérique des modèles bi-fluides d'écoulements diphasiques*, PhD Thesis, Université d'ORSAY,1992.
- [97] L.LANDAU , *On the theory of Slow Combustion* , Zh.Eksp.Theor.Fiz., pp 14-240, 1944.
- [98] L.LANDAU AND E.LIFCHITZ,*Mécanique des Fluides*, Edition MIR, 1969.
- [99] L.LANDAU AND E.LIFCHITZ,*Electrodynamique des Milieux Continus*, Edition MIR, 1969.
- [100] L.LANDAU AND E.LIFCHITZ,*Théorie des Champs*, Edition MIR, 1969.
- [101] M.LARINI, R.SAUREL AND J.C.LORAUD, *An exact Riemann solver for detonation products*, Int. J. Shock Waves, Vol 2, pp 225-236, 1992.
- [102] P.LASCAUX, *Numerical Methods for Time Dependant Equations. Applications to Fluid Flow Problems*, Tata Institute of Fundamental Research Bombay, 1976.
- [103] P.D.LAX,73, *Hyperbolic System of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*, SIAM Regional Conferences Series in Applied Mathematics, V11, 1973.
- [104] P.D.LAX,57, *Hyperbolic System of Conservation Laws*, Comm. Pure and Applied Mathematics, V10, pp537-566, 1957.
- [105] P.D.LAX AND B.WENDROFF,*Systems of Conservation Laws*, Comm. Pure and Applied Mathematics, V13 , pp217-237,1960.
- [106] PH. LEFLOCH,*Entropy weak solutions to nonlinear hyperbolic systems under non conservative form*, Comm. Part.Diff.Equa., Vol13 , n6 , pp. 669-727, 1988.
- [107] PH. LEFLOCH,*Thèse d' Habilitation* ,University of PARIS VI, Thesis, 1990.
- [108] PH. LEFLOCH AND T.P.LIU,*Existence theory for nonlinear hyperbolic systems in nonconservative form*,Forum Math., Vol5, pp. 261-280, 1993.
- [109] Y. LEGRANDGERARD,*Problèmes Hyperboliques Non Linéaires*,Thèse de 3ème.Cycle, Université Paris XI, 1985.
- [110] A.LERAT,82,*Propriétés d'homogénéité et décomposition des flux en dynamique des gaz*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 1982.
- [111] A.LERAT,81,*Thèse d' Etat*, Université Paris VI, 1981.

- [112] A.LERAT AND G.PEYRET, *Non centred schemes and shocks*, Propagation Problems Computers and Fluids, V2, pp 32-59, 1974.
- [113] A.Y.LEROUX, *These RENNES*, 1979.
- [114] R.J.LEVEQUE, *Numerical Method for Conservation Laws*, Birkhauser Verlag, 1992.
- [115] A.S.LEVINE AND B.OTTERMAN, *Analysis of unsteady supersonic two-phase flows by the particule in cell method*, Comput. Fluids, Vol 3 , pp 111-123, 1975.
- [116] R.L. LIBOFF *Introduction to the Theory of Kinetic Equations*, John Wiley and Sons, 1969
- [117] T.P.LIU, *Quasilinear Hyperbolic Systems*, Comm. Math. Phys., V68, pp 141-172, 1979.
- [118] X.LOUIS, *Modélisation Numérique de la Turbulence Compressible*, PhD Thesis, University of PARIS VI, 1995.
- [119] R.W.MAC CORMACK, *The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering*, AIAA Paper, pp 69-354, 1969.
- [120] J.M.MASELLA, *Quelques méthodes numériques pour les Ecoulements Diphasiques bifluides en conduite pétrolière*, PhD Thesis, Université PARIS VI, 1997.
- [121] K.M.MITZNER, *Numerical Solution for Transient Scattering from the time domain integral equation of Acoustic Scattering from a hard surface*, Journal of Acoustical Society of America, Vol 42, pp.391-397, 1967
- [122] H.MIURA AND I.I GLASS, *On a dusty gas shock tube*, Proc. Royal Soc. London. A., Vol 382, pp 373-388, 1982.
- [123] B.MOHAMMADI AND O.PIRONNEAU, *Analysis of the K -  $\epsilon$  Turbulence Model*, Research in Applied Mathematics, Masson, 1994
- [124] K.M.MITZNER *Numerical Solution for Transient Scattering from the time domain integral equation of Acoustic Scattering from a hard surface*, Journal of Acoustical Society of America, p.391-397, 1967
- [125] W.F.NOH, *Artificial viscosity and artificial heat flux errors for spherically divergent shocks*, Laurence Livermore National Laboratory, Preprint UCRL 89623, 1983.
- [126] F.OBERHETTINGER, *Tables of Bessel Transforms*, Springer-Verlag, 1972

- [127] M. OLIM, O. IGRA, M. MONOD AND G. BEN-DOR, *A general attenuation law of planar shock waves propagating into dusty gases*, Proc. Sym. On Shock Tubes, pp 684-689, 1987.
- [128] S. PAIK, P. H. HUANG, J. HEBERLEIN AND E. PFENDER, *Determination of the Arc-Root Position in a DC Plasma Torch*, Plasma Chemistry and Plasma Process, Vol 13, N3, 1993.
- [129] K. G. POWELL, *An Approximated Riemann Solver for Magneto hydrodynamics*, NASA Contract Report 194902.
- [130] P. A. RAVIART, *Cours de DEA*, Université PARIS VI, 1985.
- [131] R. D. RICHTMEYER AND K. W. MORTON, *Difference Methods for Initial Value Problems*, 1967.
- [132] P. L. ROE, *Approximate RIEMANN Solvers, Parameter Vectors and Difference Scheme*, Journal of Computational Physics, 1981.
- [133] P. L. ROE AND D. S. BALSARA, *Notes on the eigensystem of Magneto hydrodynamics*, SIAM Applied Math., 1995.
- [134] R. ROSALES AND A. MAJDA, *Weakly Nonlinear Detonation waves*, SIAM Journal of Appli. Math., Vol 45, 1983 October.
- [135] F. ROUCAYROL, *Résolution des équations de Navier-Stokes pour les mélanges de gaz réactifs avec diffusion d'espèces par solveurs de Riemann*, PhD Thesis, Université d'EVRY VAL D'ESSONNE, 1998.
- [136] G. RUDINGER, *Some effects of Finite Partial volume on the dynamics of gas-particle mixture*, AIAA Journal, Vol 5, pp 1917-1922, 1965.
- [137] V. RUSANOV, *Calculation of interaction of non-steady shock waves with obstacles*, Journal of Computational Mathematics and Physics USSR, Vol 1, pp 267-279, 1961.
- [138] L. SAINSAULIEU, *Contribution à la modélisation mathématique et numérique des écoulements diphasiques constitués d'un nuage de particules dans un écoulement de gaz*, PhD Thesis, Université PARIS VI, 1995.
- [139] L. SAINSAULIEU AND P. A. RAVIART, *A nonconservative hyperbolic system modelling spray dynamics. Part 2: Existence of travelling waves solutions*, Math. Methods and Models in Applied Sciences, 1995.
- [140] R. SAUREL AND R. ABGRALL, *A simple method for compressible multifluid flows*, SIAM Sci. Comput. in preparation.

- [141] R.SAUREL, M.LARINI AND J.C.LORAUD, *Ignition and growth of a detonation by a high energy plasma*, International Journal of Shock Waves, Vol 2, pp 19-29, 1992.
- [142] R.SAUREL, M.LARINI AND J.C.LORAUD, *Numerical modelling of deflagration transition produced by laser impact on granular explosive*, Journal of Computational Fluid Dynamics, Vol1, pp 155-174, 1992.
- [143] R.SAUREL, J.C.LORAUD AND M.LARINI, *Optimisation of a pyrotechnic igniter by the release of pyrotechnic particules*, International Journal of Shock Waves, Vol1, pp 121-133, 1991.
- [144] R.P.SHAW AND J.A.ENGLISH, *Transient acoustic scattering by a free (pressure release) sphere*, Journal of Sound Vibration, Vol 20(3), pp 321-331, 1977.
- [145] M.P.SHERMAN *Hydrogen combustion in nuclear plant accidents and associated containment loads*, Nuclear Engineering and Design, Vol 82, pp 13-24, 1984.
- [146] V.SMIRNOV, *Cours de Mathématiques Supérieures*, Edition MIR, Tome 3, 1972
- [147] J.SMOLLER, *Shock waves and Reaction-Diffusion equations*, Springer-Verlag, 1983.
- [148] M.SOMMERFIELD, *Numerical simulation of supersonic two-phase gas-particle flows*, Proc. Sym. On Shock Tubes, pp 235-241.
- [149] J.L.STEGER AND R.F.WARMING, *Flux vector splitting of the inviscid gas dynamic equations and applications to finite difference methods*, Journal of Computational Physics, V40, pp 263-293, 1981.
- [150] J.A.STRATTON, *Electromagnetic Theory*, Mac-Graw-Hill, 1941
- [151] E.F.TORO, *Riemann problem based techniques for computing reactive two-phase flows*, CoA Rep.8815, Aerodynamics Cranfield Institute of Technology, 1988.
- [152] B.VAN LEER, 82, *Flux Vector Splitting for the Euler Equations*, Lecture Notes in Physics, Springer-Berlin, V170, pp 507/651, 1982.
- [153] B.VAN LEER, 79, *Towards the ultimate conservative scheme 5: A second order sequel to GODOUNOV's method*, Journal of Computational Physics, V32, pp 101-136, 1979.

- [154] J.P.VILA, *Sur la théorie et l'approximation numérique de Problèmes Hyperboliques Non Linéaires. Application aux Equations de Saint Venant et à la modélisation des avalanches de neige dense*, Thèse de l'Université PARIS VI, 1986.
- [155] D.VOROBIEV, *Couplage Numérique des Equations du Système d'EULER et des Equations de MAXWELL en 3D*, PhD Thesis, University of EVRY VAL D'ESSONNE, 1998.
- [156] R.F.WARMING AND R.M.BEAM, *Upwind second order schemes and applications in aerodynamic flows*, AIAA Journal, Vol 14, 1976.
- [157] H.WEYL, *Shock Waves in Arbitrary Fluids*, Applied Math. Panel , 1944.
- [158] F.A.WILLIAMS, *Combustion Theory*, Benjamin Cummings Publishing Company, 1985.
- [159] P.R.WOODWARD AND P.COLLELLA, *Journal of Computational Physics*, Vol 54 , pp 115-173, 1989.
- [160] E.XEUXET-DECLERCQ, *Comparaison de solveurs numériques pour le traitement de la Turbulence Bifluide*, PhD Thesis, University d'EVRY VAL D'ESSONNE, 1999.
- [161] K.XU AND H-Z TANG , *An Explanation for the Sonic Point Glitch*, Preprint, 2000.
- [162] K. YOSIDA *Functional Analysis*, Springer-Verlag , 1980
- [163] Y.B.ZELDOVITCH AND ALL, *The Mathematical Theory of Combustion and Detonation*, Consultants Bureau, 1985.
- [164] Y.B.ZELDOVITCH AND Y.P.RAISER, *Physics of Shock Waves and High Temperature- Hydrodynamics Phenomena-*, Academic Press, 1966

## Annexe: Résultats numériques

**Alain FORESTIER**<sup>(1)(2)</sup>,

<sup>(1)</sup> C.E.A. Saclay, DRN/DMT/SEMT, 91191 Gif-Sur-Yvette FRANCE Cedex

<sup>(2)</sup> Université d'EVRY-CEMIF-,40 Rue du Pelvoux, 91020 Evry Cedex, FRANCE

**Key Words :** Ecoulements compressibles- Ondes inertes et réactives-Modèles de Turbulence-Physique des Plasmas- Acoustique-Géométrie quelconque non structurée-Calculs 1D,2D et 3D.

### **Abstract :**

Il s'agit dans ce rapport de présentation de résultats numériques. Tout ce qui concerne la justification est analysé dans une autre contribution. Il n'y a donc pas de référence bibliographique et seulement quelques éléments afin de guider le lecteur dans les résultats.

Nous renvoyons pour plus de détail au document d'habilitation dans lequel sont présentées les différentes idées qui sont illustrées par les résultats numériques présentés ici.

# Chapitre 1

## Introduction

Dans cette annexe, sont présentés les résultats obtenus pendant toutes les années de travaux sur ces thèmes passionnants. Cela n'a pu se faire sans l'aide précieuse de collaborateurs qui ont aidé à collectionner tous ces résultats numériques qu'ils en soient vivement remerciés.

Pour mémoire, je voudrais citer :

Sur les études liés aux Ecoulements Inertes,  
H.BUNG, P.GALON, A.LETELLIER et M.LEPAREUX,

Sur les études liées aux Ecoulements Réactifs,  
C.CAROLI, P.GALON et F.ROUCAYROL,

Sur les études liées aux Ecoulements Turbulents,  
J.M.HERARD, X.LOUIS et E.XEUXET-DECLERCQ,

Sur les Equations EULER-MAXWELL,  
D.VOROBIEV,

Sur les Méthodes Implicites  
P.GONZALES-RODELAS,

Sur les Méthodes Particulaires,  
L.BENAIM-LUNEVILLE, E.CAMALET et R.SAUREL,

Sur les Equations Intégrales  
Y.DING et P.VERPEAUX.

Aussi cette présentation veut refléter un travail collectif qui a été conduit durant une quinzaine d'années.

Les outils numériques développés sont implantés dans les logiciels du CEA, pour la plupart EUROPLEXUS(Code de Dynamique Rapide explicite), dans CASTEM2000 (pour certains aspects liés à la Turbulence) et dans ZEPHYR(logiciel dévolu aux Equations Intégrales).

## Chapitre 2

# Etudes compressibles sans réaction chimique

### 2.1 Résultats numériques liés au schéma de VAN LEER 1D

Dans cette partie, sont présentés des résultats liés aux premiers tests (Année 1985) en monodimensionnel.

#### 2.1.1 Cas test de SOD

Il s'agit du cas bien connu pour les équations d'EULER en dynamique des gaz qui mettent en évidence l'évolution de perturbation dès que le CFL est supérieur à 0.5. Il s'agit dans ce cas du schéma de VAN LEER en imposant la condition classique dans le cadre scalaire pour respecter le caractère TVD du schéma (cf Figures 1, 2 et 3). Par contre, en modifiant le schéma sur la limitation des pentes permet de traiter des CFL de 0.8. On peut noter la variation de l'énergie très faiblement décroissante au cours du temps (variation de moins de l'ordre de 0,3 pour cent). Les conditions initiales sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } x \in ]0, 0.5[ \left\{ \begin{array}{l} \rho_L = 1 \\ u_L = 0. \\ P_L = 1. \end{array} \right. \\ \\ \text{pour } x \in ]0.5, 1[ \left\{ \begin{array}{l} \rho_R = 0.1 \\ u_R = 0. \\ P_R = 0.1 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

pour une loi polytropique avec  $\gamma = 1.4$ . On peut vérifier que les conditions de

réflexion sont correctement traitées.

On attend pour les conditions de RANKINE -HUGONIOT qui donnent comme conditions à la paroi

$$P = P_L \frac{(3\gamma - 1)P_L - (\gamma - 1)P_R}{(\gamma - 1)P_L + (\gamma + 1)P_R} \quad (2.2)$$

que P soit égal à 3.7, ce qui est en accord avec les résultats présentés.

### 2.1.2 Cas test de LAX

Dans ce cas, on utilise comme données initiales:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } x \in ]0, 0.5[ \left\{ \begin{array}{l} \rho_L = 0.445 \\ \rho_L u_L = 0.331 \\ \rho_L E_L = 6.928 \end{array} \right. \\ \text{pour } x \in ]0.5, 1[ \left\{ \begin{array}{l} \rho_R = 0.5 \\ \rho_R u_R = 0. \\ \rho_R E_R = 1.4275 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

La figure 5 présente les résultats pour un CFL de 0.8 avec un maillage uniforme de 300 mailles

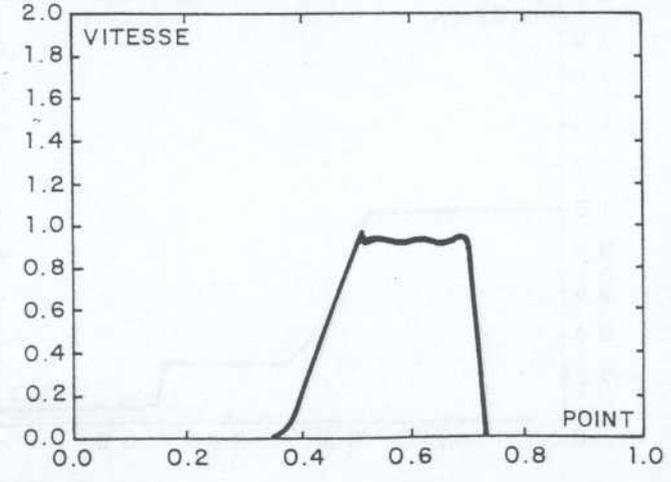
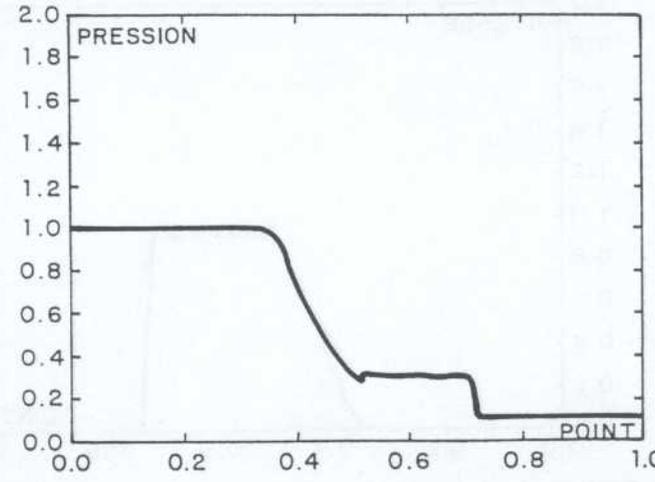
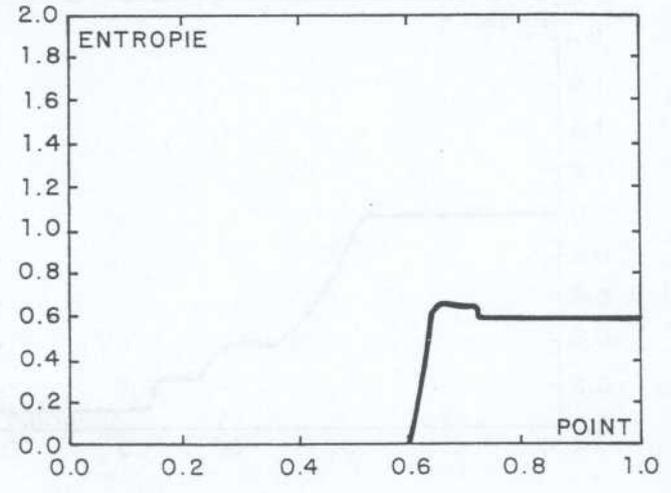
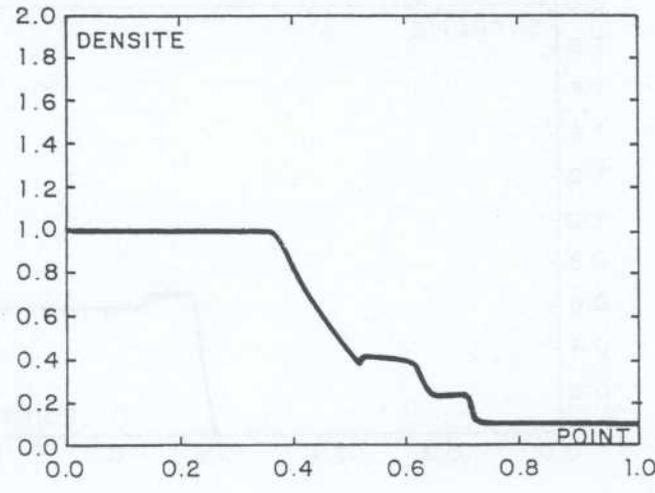
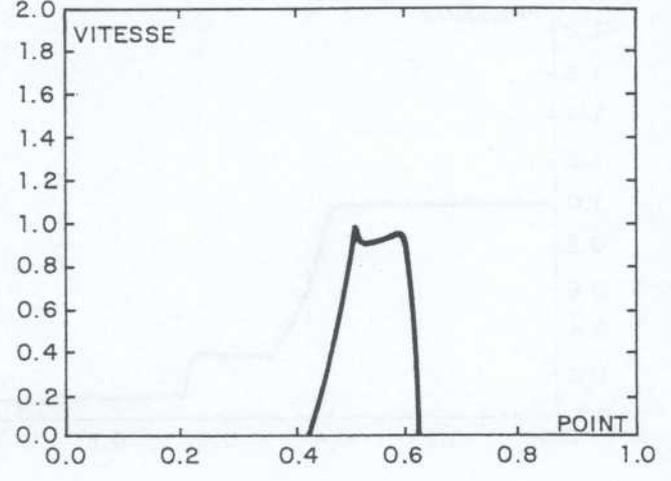
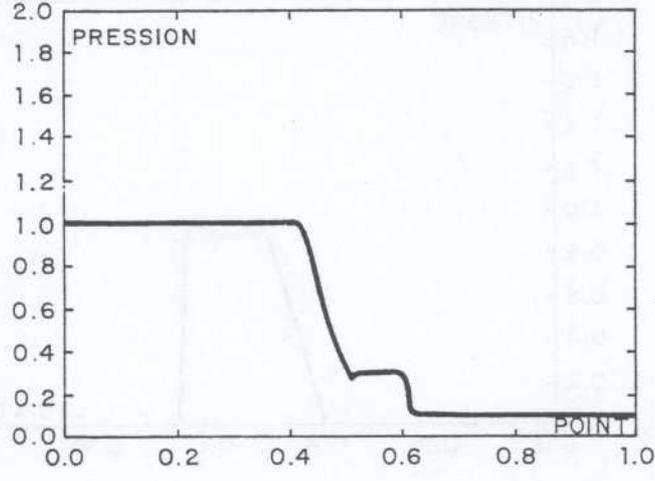
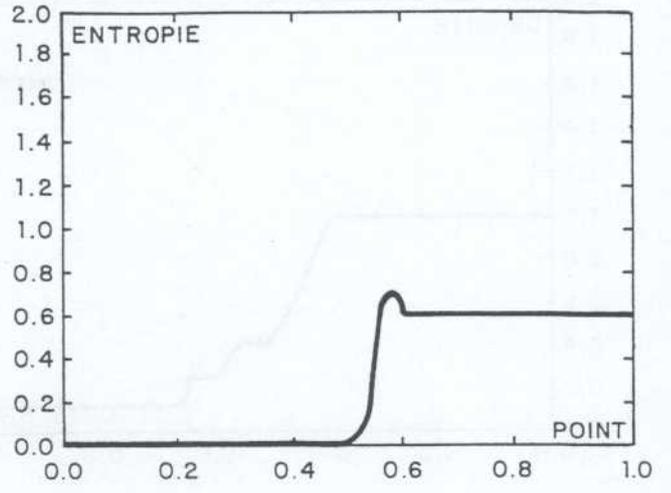
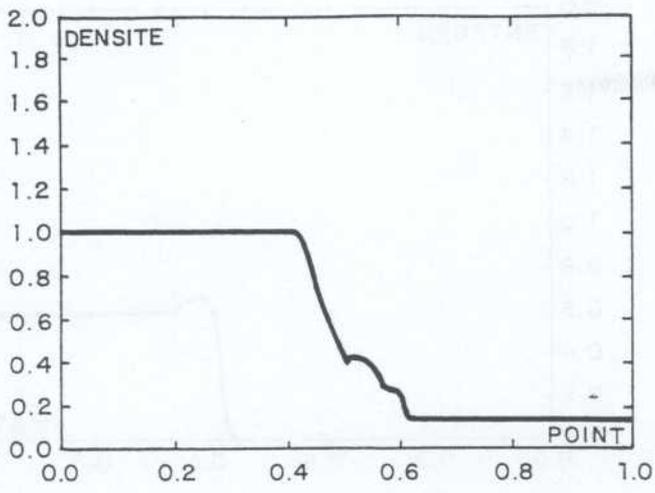


Figure 1\_ CFL = 0.5

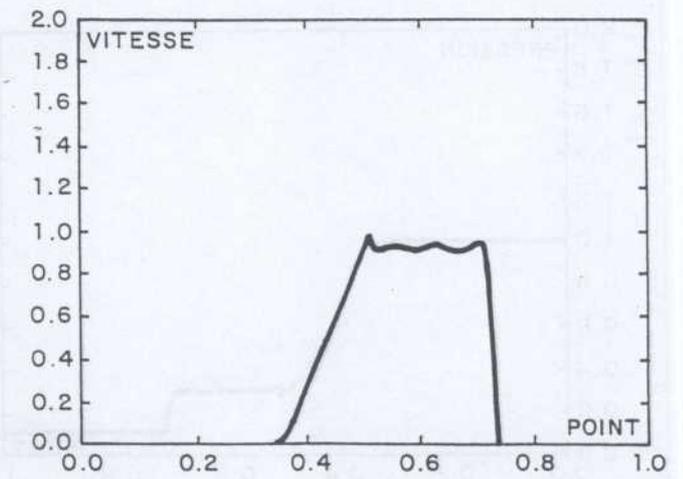
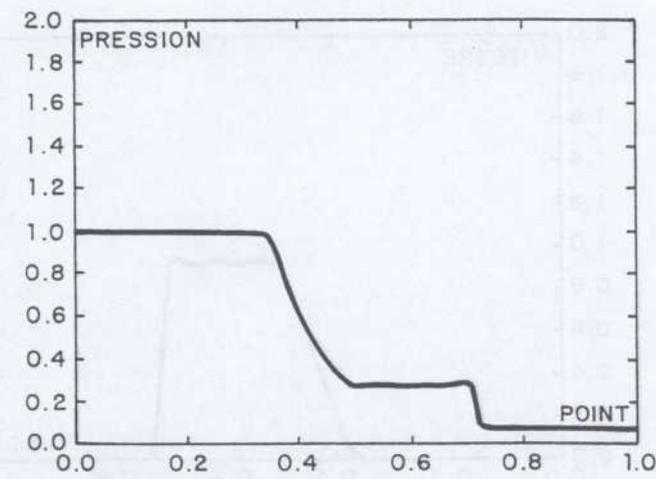
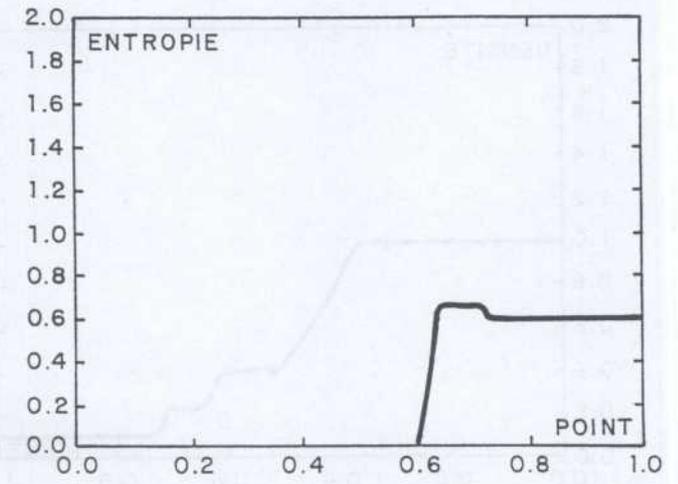
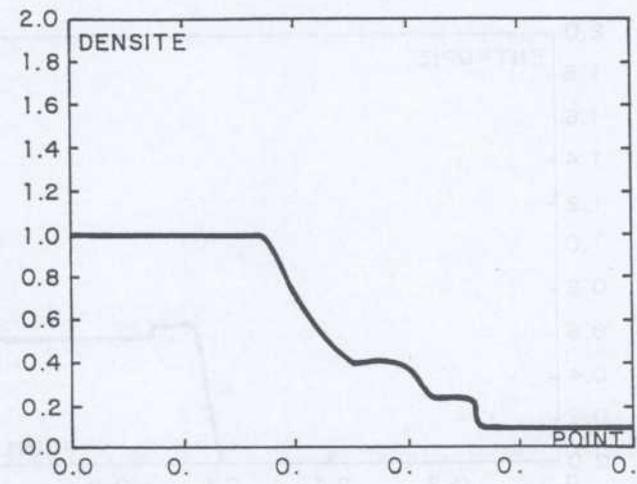
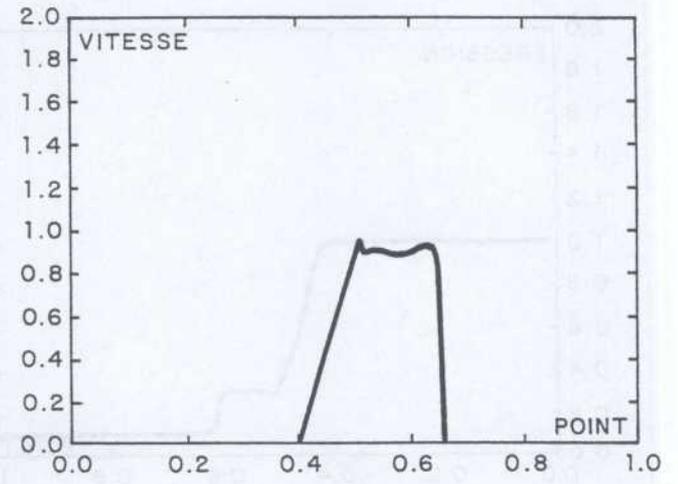
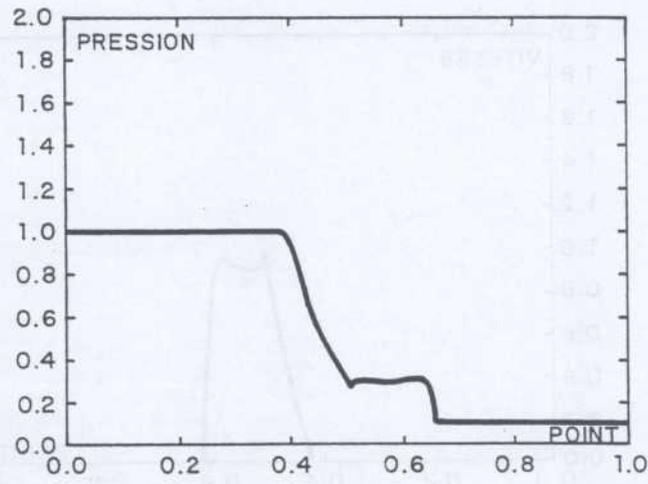
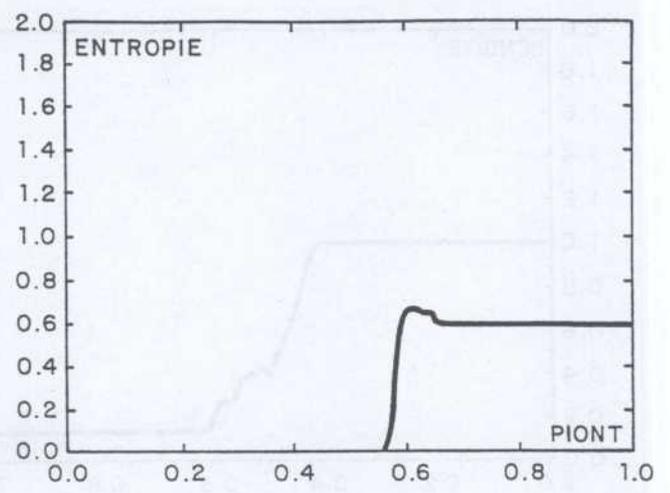
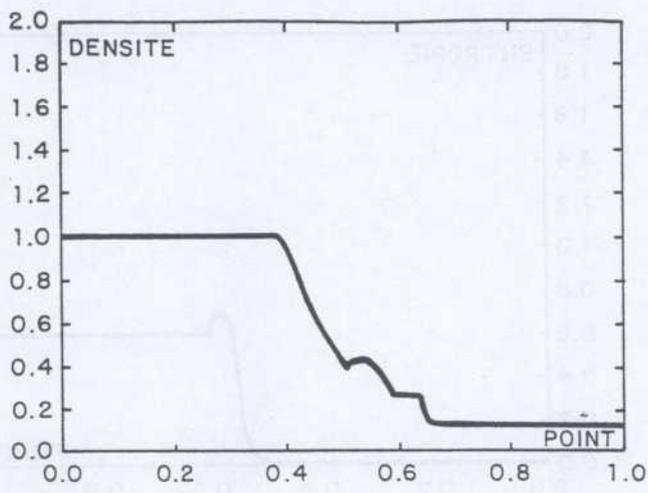


Figure 2 - CFL = 0.6

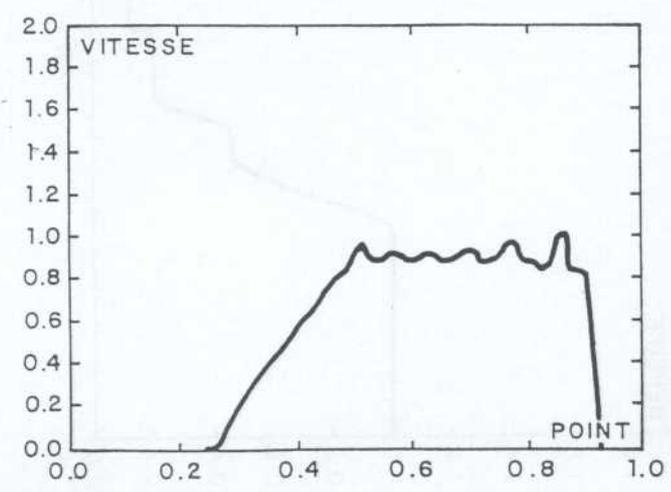
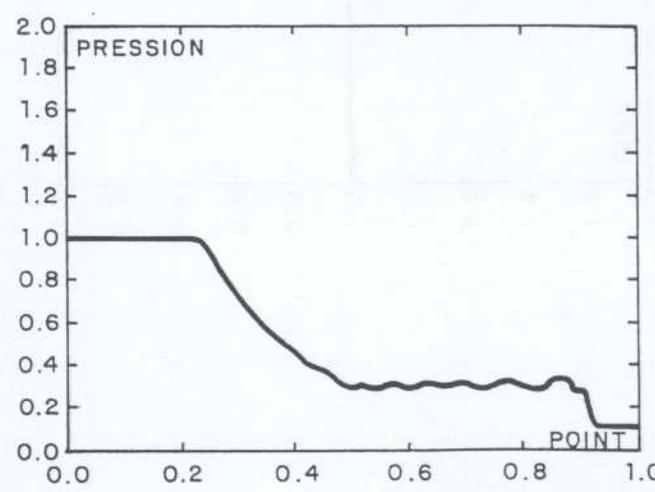
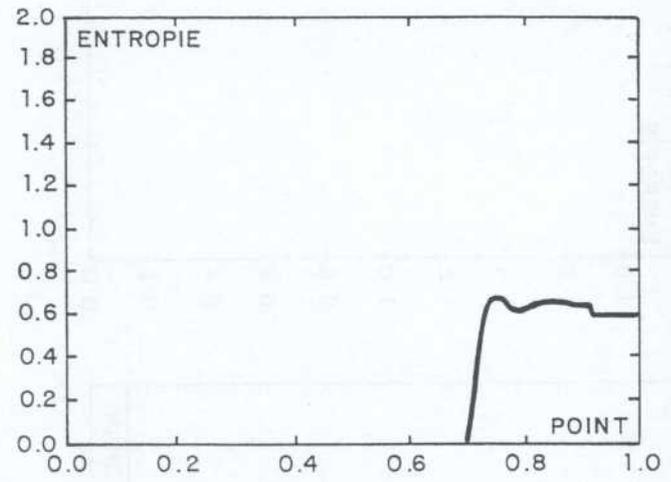
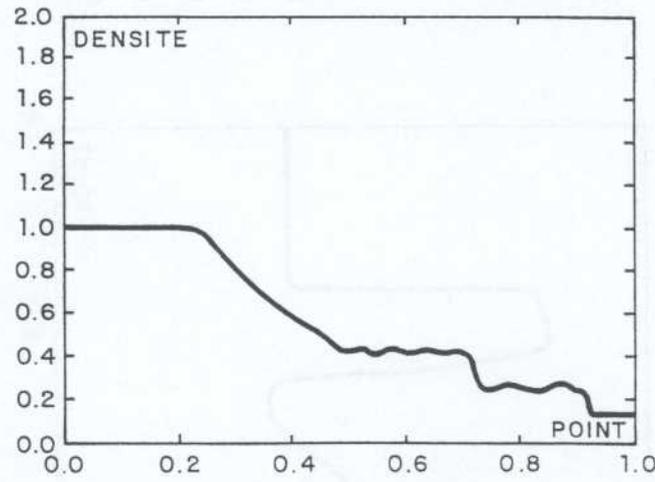
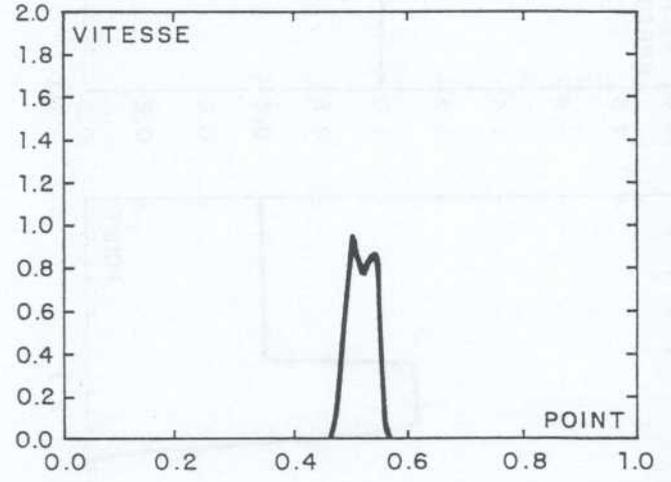
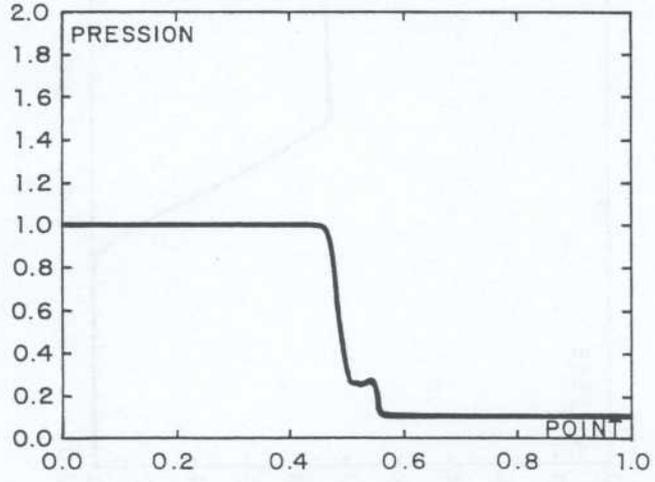
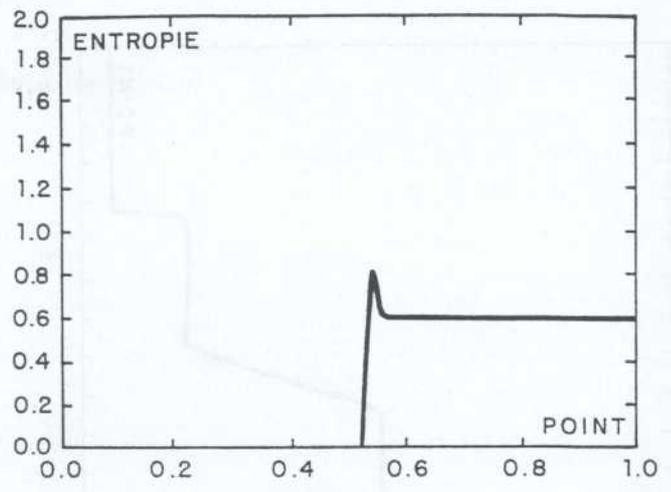
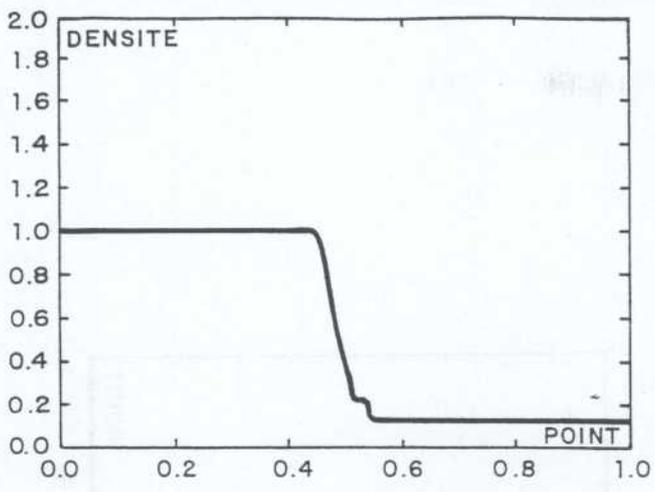


Figure 3 - CFL = 0.8

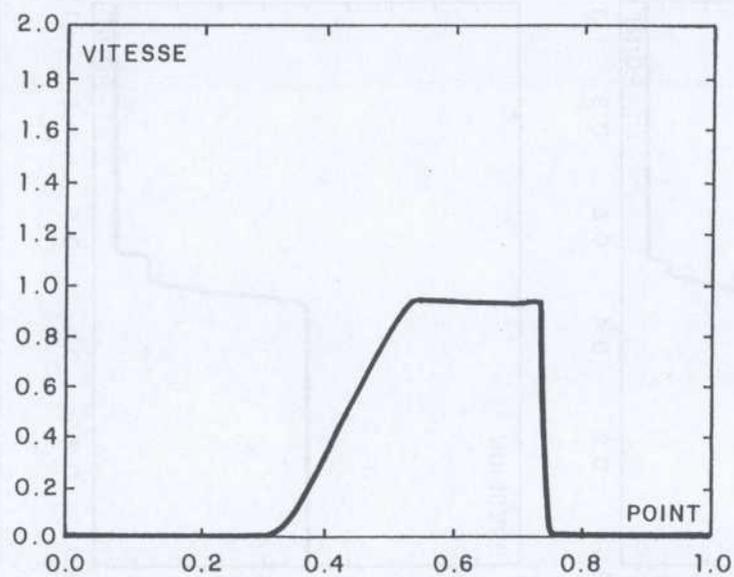
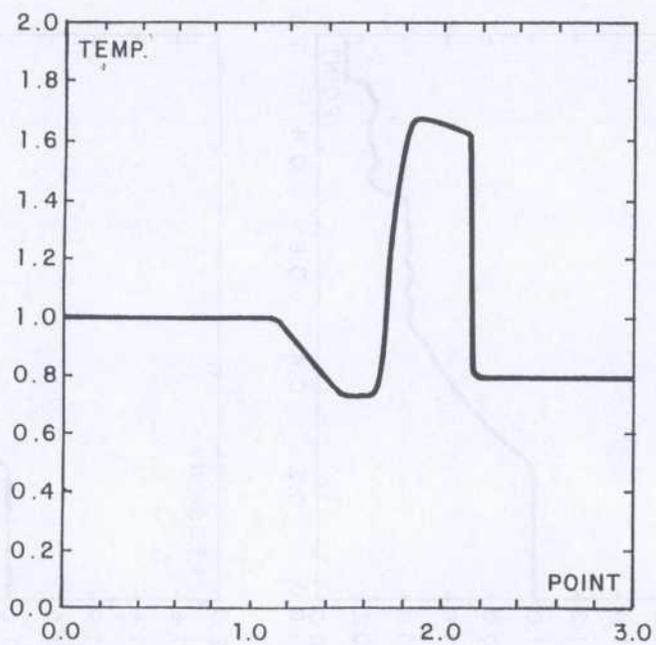
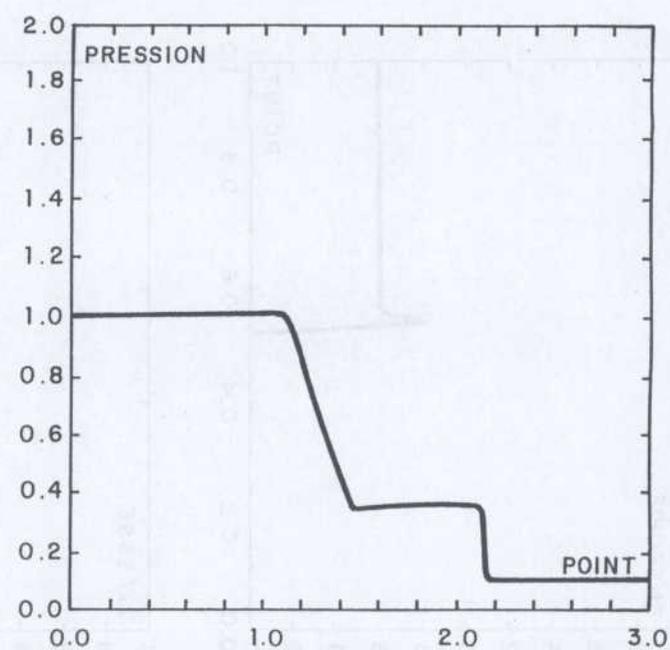
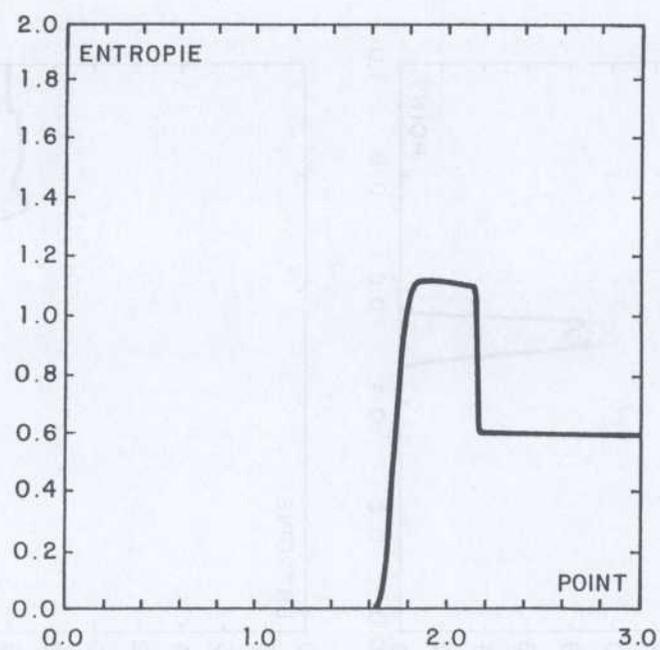
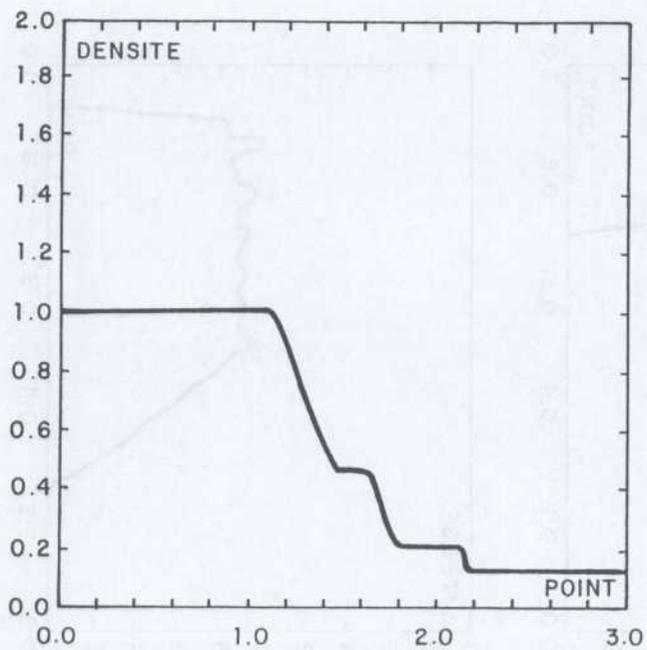
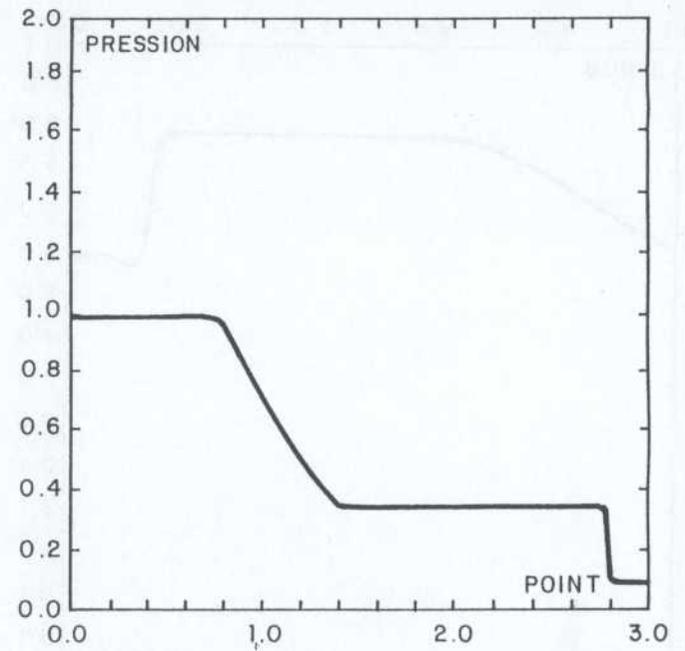
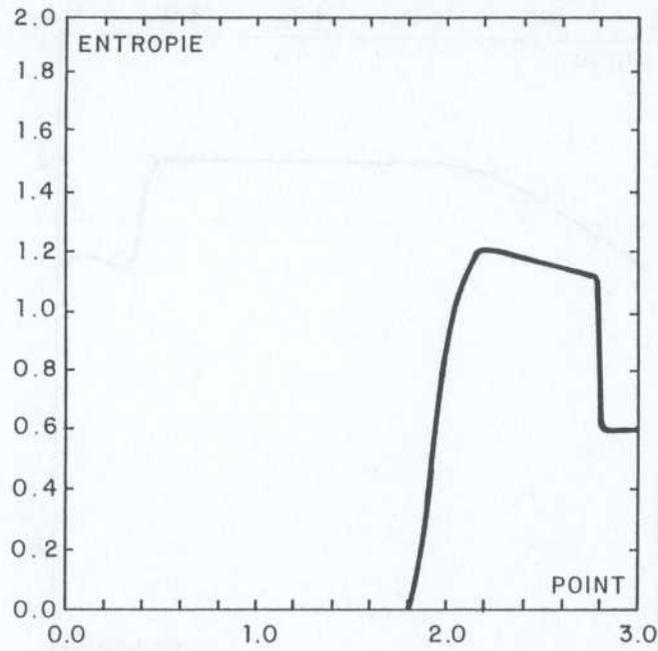
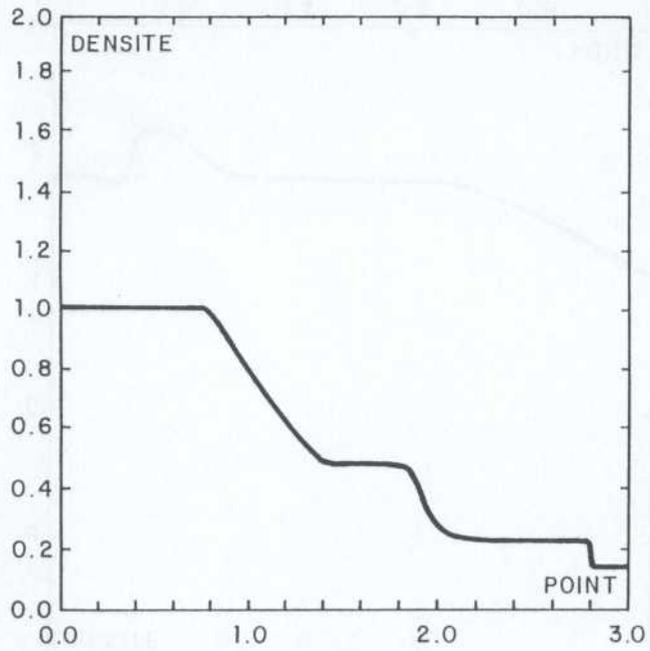


Figure 4 - CFL = 0.8



6

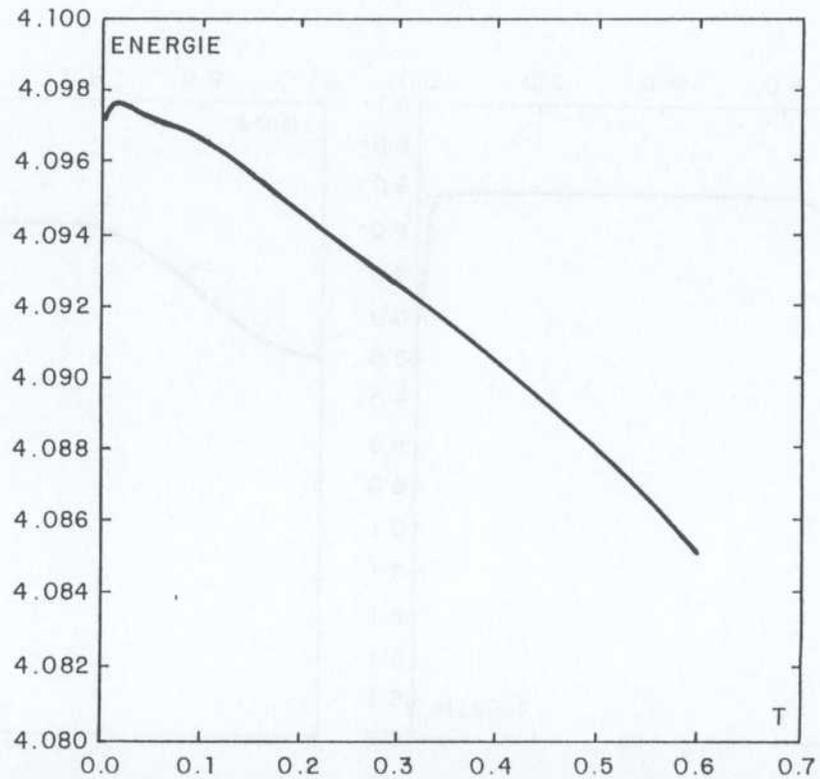
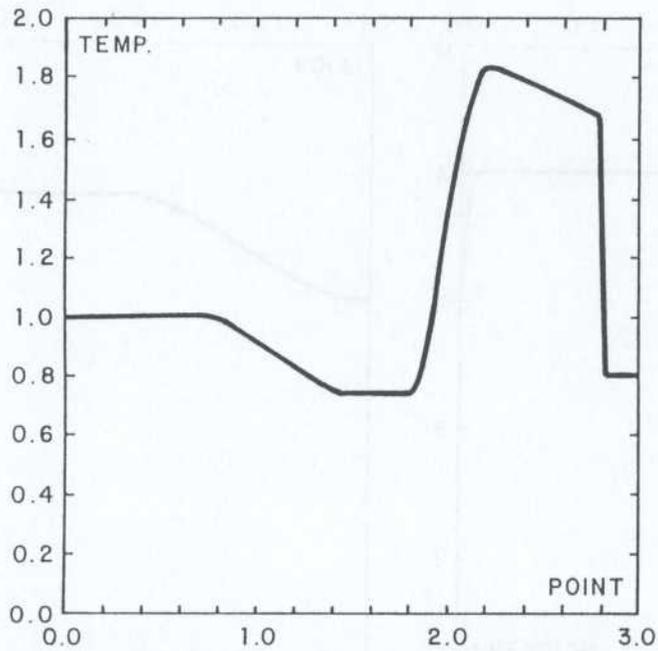


Figure 4 - CFL = 0.8

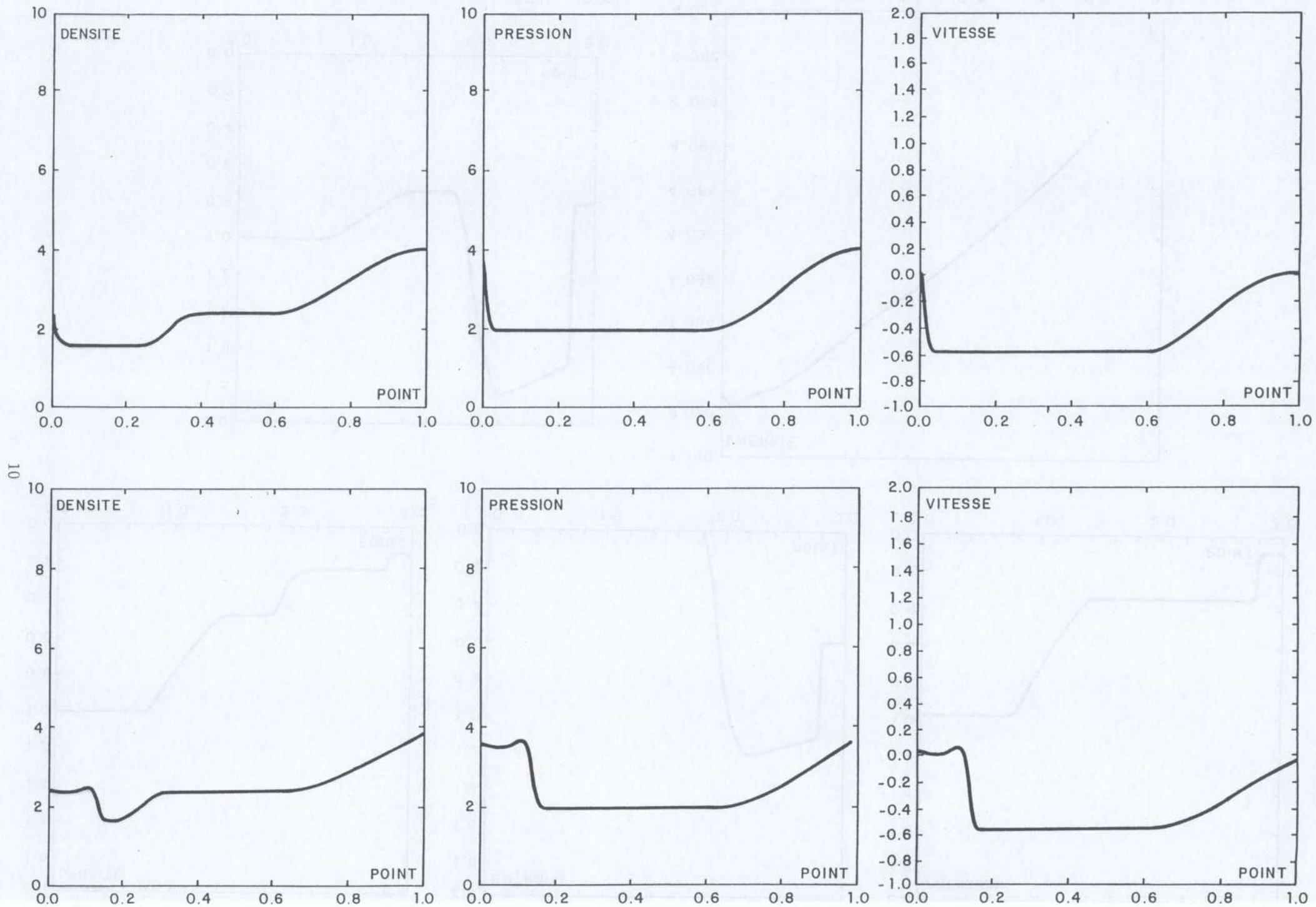
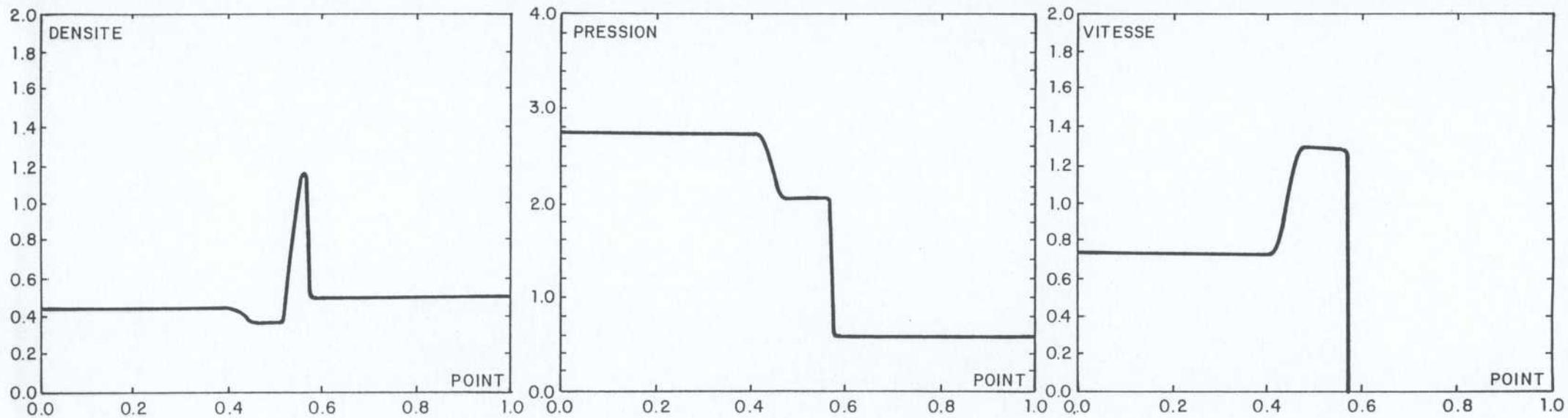


Figure 4 Etude de la réflexion.



11

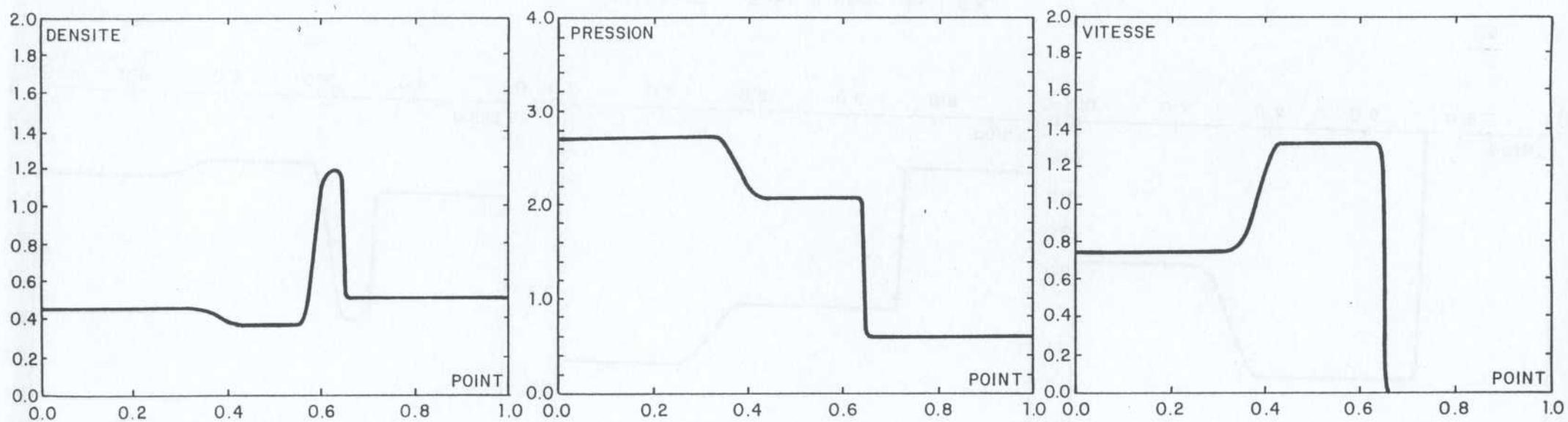


Figure 5 - Tube à choc de LAX.

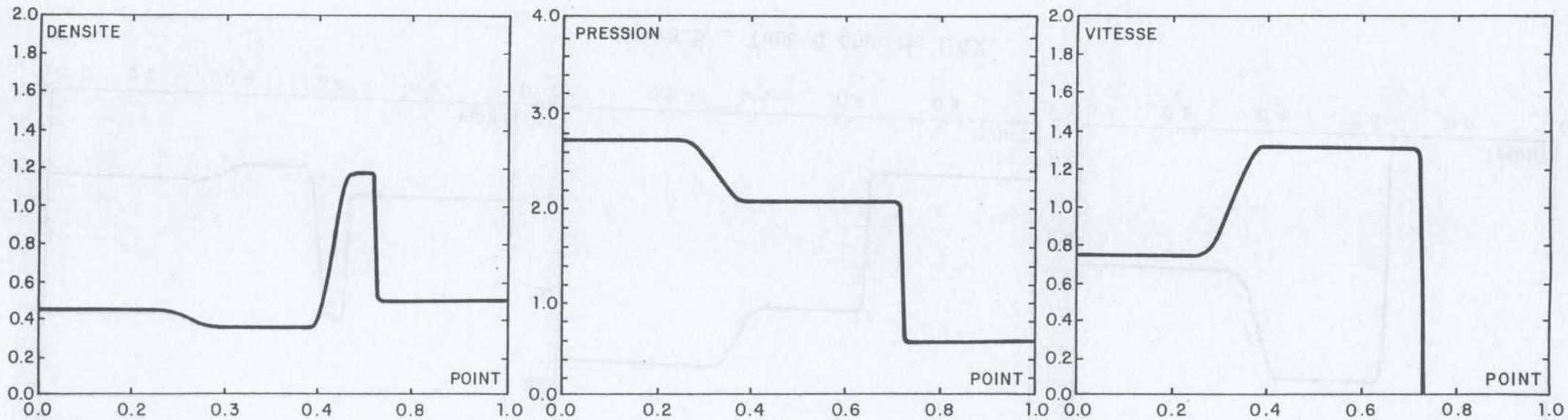


Figure 5 - Tube à choc de LAX.

## 2.2 Résultats numériques liés au schéma de type $S_{\beta}^{\alpha}$ 1D

On reprend dans ce cas le cas test de SOD en comparant la masse volumique ( $\rho$ ), la pression  $P$  et la vitesse  $u$  à différents instants par le schéma  $S_1^{1/2}$  (figure 1) et les mêmes quantités par celui qui a été modifié (figure 2). On pourra noter l'apport de la modification en particulier au niveau de la discontinuité de contact et de l'apparition d'oscillation qui se propage.

le cas test traité est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } x \in ]0, 0.5[ \left\{ \begin{array}{l} \rho_L = 4 \\ u_L = 0. \\ P_L = 4 \end{array} \right. \\ \text{pour } x \in ]0.5, 1[ \left\{ \begin{array}{l} \rho_R = 1 \\ u_R = 0. \\ P_R = 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

pour une loi polytropique avec  $\gamma = 1.4$ .

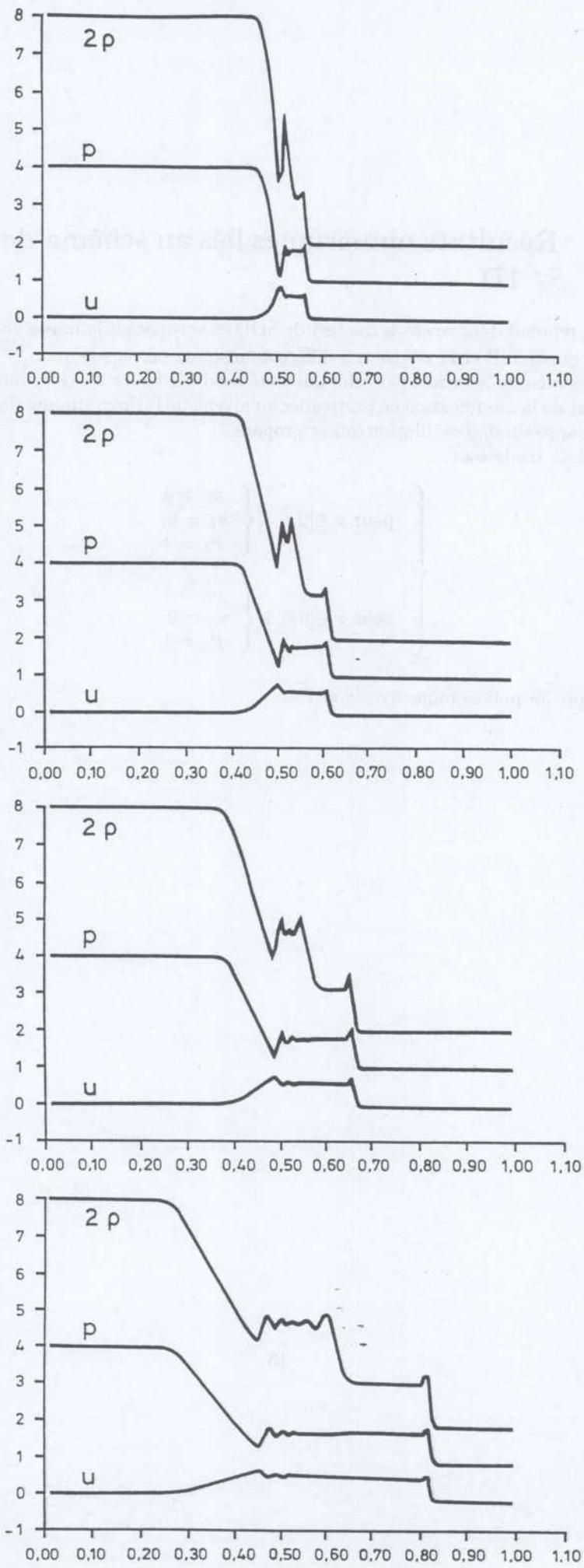


Figure 1

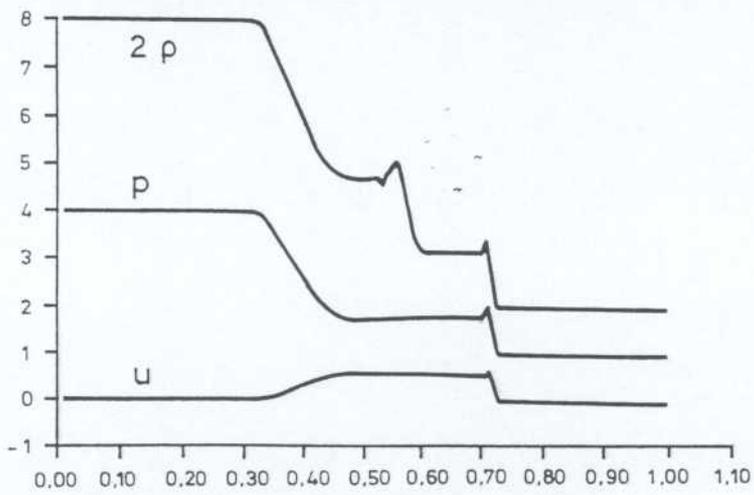
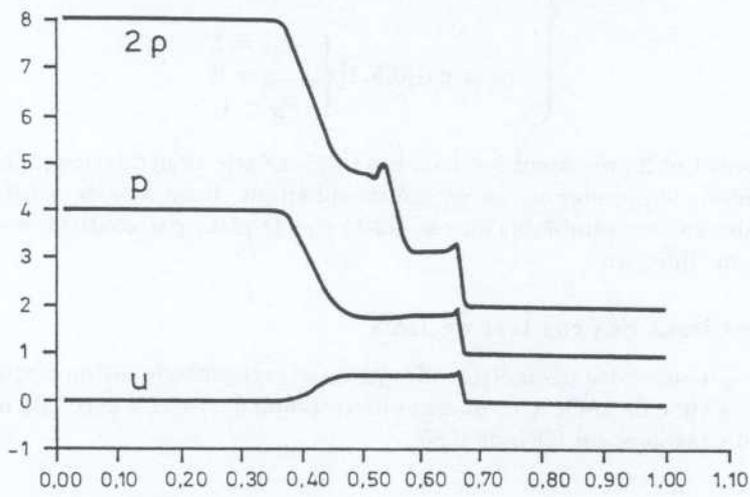
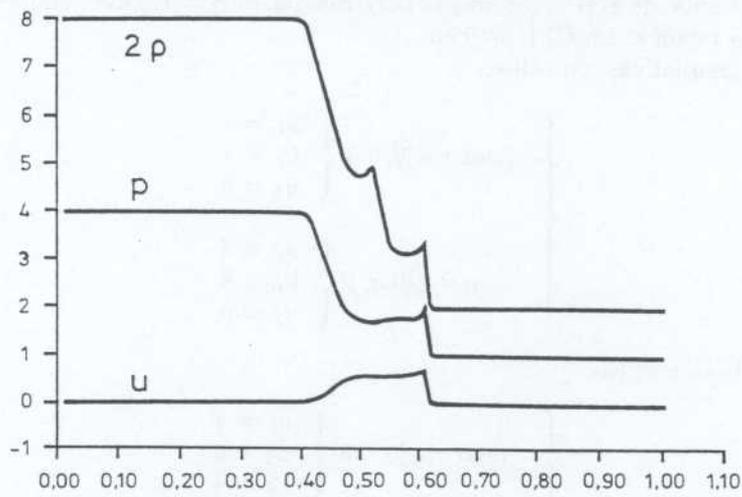
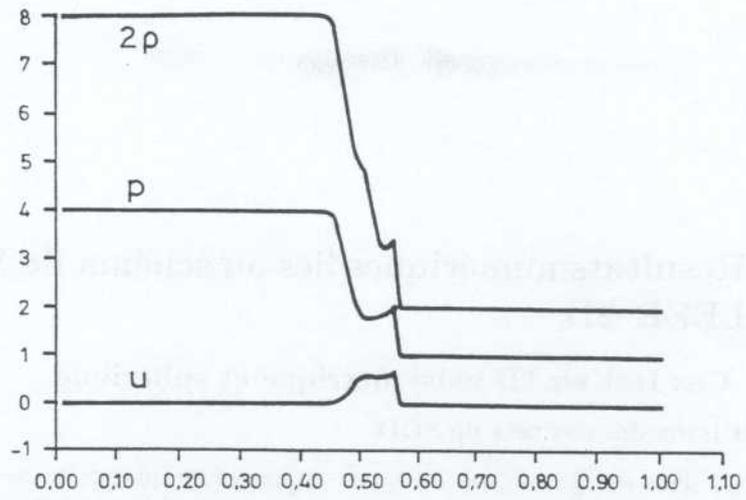


Figure 2

## 2.3 Résultats numériques liés au schéma de VAN LEER 2D

### 2.3.1 Cas test en 1D axisymétrique et sphérique

#### Cas test issus des cas test de SOD

Il s'agit dans des géométries 2D (plane et axisymétrique) de traiter le cas du tube à choc de SOD avec un gaz polytropique de  $\gamma = 1.4$  avec 300 mailles le long d'un rayon et un CFL de 0.85.

Dans le premier cas, on utilise

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } r \in ]0, 0.5[ \left\{ \begin{array}{l} \rho_L = 1 \\ P_L = 1 \\ u_L = 0 \end{array} \right. \\ \text{pour } r \in ]0.5, 1[ \left\{ \begin{array}{l} \rho_R = 4 \\ P_R = 4 \\ u_R = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.5)$$

et dans le second cas

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } r \in ]0, 0.5[ \left\{ \begin{array}{l} \rho_L = 4 \\ u_L = 0 \\ P_L = 4 \end{array} \right. \\ \text{pour } r \in ]0.5, 1[ \left\{ \begin{array}{l} \rho_R = 1 \\ u_R = 0 \\ P_R = 1. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Les figures 1 et 2 présentent les deux cas en géométrie axisymétrique. Les figures 3 présentent le premier cas en géométrie sphérique. Il est aisé de constater que le premier cas est semblable au cas traité en 1D plan, par contre le second est nettement différent.

#### Cas test issus des cas test de LAX

Il s'agit dans des géométries 2D (plane et axisymétrique) de traiter le cas du tube à choc de LAX avec un gaz polytropique de  $\gamma = 1.4$  avec 300 mailles le long d'un rayon et un CFL de 0.85.

Dans le premier cas, on utilise

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } r \in ]0, 0.5[ \left\{ \begin{array}{l} \rho_L = 0.445 \\ u_L = 0.7438 \\ P_L = 2.722 \end{array} \right. \\ \text{pour } r \in ]0.5, 1[ \left\{ \begin{array}{l} \rho_R = 0.5 \\ u_R = 0 \\ P_R = 0.571 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

et dans le second cas

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } r \in ]0, 0.5[ \left\{ \begin{array}{l} \rho_L = 0.445 \\ P_L = 2.722 \\ u_L = -0.7438 \end{array} \right. \\ \text{pour } r \in ]0.5, 1[ \left\{ \begin{array}{l} \rho_R = 0.5 \\ P_R = 0.571 \\ u_R = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Les figures 4 et 5 présentent le premier cas en géométrie cylindrique et sphérique et les figures 6 et 7 le second en géométrie cylindrique et sphérique. En complément, on inverse les états gauche et droit.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } r \in ]0, 0.5[ \left\{ \begin{array}{l} \rho_L = 0.5 \\ u_L = 0. \\ P_L = 0.571 \end{array} \right. \\ \text{pour } r \in ]0.5, 1[ \left\{ \begin{array}{l} \rho_R = 0.445 \\ u_R = 0.7428 \\ P_R = 2.722 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Pour le dernier cas, les figures 8 et 9 sont associées aux cas cylindrique et sphérique. On pourra noter que, à la différence du tube de SOD, pour le cas test tube de LAX, la nature plane, cylindrique ou sphérique donne des résultats beaucoup plus distincts et tranchés.

#### Cas test de NOH

Il s'agit ici d'une géométrie 2D axisymétrique pour laquelle les données sont spécifiées avec un gaz polytropique de  $\gamma = 5/3$  avec 100 mailles le long d'un rayon et un CFL de 0.85.

On définit les données initiales par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } r \in ]0, 0.5[ \left\{ \begin{array}{l} e_L = 30 \\ u_L = 0. \\ P_L = 20 \end{array} \right. \\ \\ \text{pour } r \in ]0.5, 1[ \left\{ \begin{array}{l} e_R = 0.001 \\ u_R = -1 \\ P_R = 0.0001 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.10)$$

où  $e$  est l'énergie interne.

Pour ce cas, une solution analytique est obtenue sur l'axe avec

$$\rho = 64 \quad (2.11)$$

La figure 10 montre l'adéquation correcte de la solution numérique. On peut aussi noter la réflexion sur l'axe conduite dans le calcul 2D associé (figure 23) Les courbes représentent à 2 instants ( le premier juste après la réflexion et le second quelques instants après) la pression (courbes gauches ) et la densité (courbes droites).

### 2.3.2 Cas test 2D

#### Problème du tube à choc

Il s'agit cette fois ci de la même définition que le cas du tube à choc de SOD mais traité dans une géométrie 2D plane ( en triangle) présentée sur la figure 10. Les résultats (pression , masse volumique) sont traduits figure 11 et montrent le traitement correct en 2D non structuré.

#### Canal subsonique

Ce benchmark est le premier cas réellement 2D associé au traitement en gaz parfait.

On définit les conditions dans un canal par les données suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{à l'amont à l'infini} \\ \text{et dans la bulle sphérique} \\ \text{avec dans le canal} \end{array} \right\} \begin{cases} \rho = 1.398 \\ u = 0.3475 \\ v = 0. \\ P = 1.1754 \\ \\ \rho = 2.8605 \\ u = 0 \\ v = 0. \\ P = 0.7143 \\ \\ \rho = 1. \\ u = 0 \\ v = 0. \\ P = 0.1743 \end{cases} \quad (2.12)$$

Il n'y a pas de condition de sortie car le fluide est supersonique en sortie. Par contre, il est important de noter que l'entrée est subsonique ( le nombre de MACH vaut  $M = 0.32$  )

La figure 13 traduit le maillage constitué de quadrangles et de triangles. Les figures 14 et 15 montrent l'évolution de la pression et de la vitesse. On peut noter sur la figure 14 que les isopressions traduisent bien la condition de réflexion à la paroi à travers le traitement numérique (  $\frac{\partial P}{\partial n} = 0$  )

### 2.3.3 Jets supersoniques

#### Jet libre

Cette partie présentent trois cas traités de manière assez différente mettant en évidence la robustesse de la méthode.

Dans le premier cas, il s'agit d'un jet libre en sortie issu d'une grande cavité avec une pression donnée  $P_\infty$  et une masse volumique  $\rho_\infty$  au repos (  $u=0$  ). A  $t=0$  , ce jet est libéré dans une autre cavité à travers un petit orifice dans un autre grand domaine à une pression  $P_i$  et une masse volumique  $\rho_i$ .

On traite différents cas tels que le ratio  $\frac{P_i}{P_\infty} = \frac{\rho_i}{\rho_\infty}$  soit égal à 10 ou 100 ou 1000.

Le traitement est effectué sur un demi-domaine. La figure 16 traduit la forme du jet pour un ratio de 10, ce qui correspond au niveau des conditions entrée - milieu à l'infini aval à un rapport de 5.22 sur les pressions et de 6.29 sur les masses volumiques afin d'être exactement sonique à l'entrée.

Le  $\gamma$  du gaz polytropique vaut 1.4 et on a imposé des conditions absorbantes

au bord du domaine, sachant que certains points passent par des conditions de sortie supersonique à des condition de sortie ou d'entrée subsonique.

### **Intersection de jets**

Dans ce cas, deux jets sont en interaction dans une chambre sous un angle de 45 degrés.

Le premier est un gaz supersonique injecté à la pression de 4 bars et à la température de 60K pour un nombre de Mach de 1.7 et le second est aussi un gaz supersonique à la pression de 25 bar et à la température de 2370K pour un nombre de Mach de 1.1. Les deux gaz obéissent à une loi de gaz parfait avec un  $\gamma$  de 1.23.

Les calculs sont effectués avec un maillage de 50\*70 mailles dans un cas et un second avec un maillage identique mais dans un domaine deux fois plus petit (soit 25\*35 mailles) ce qui correspond à un zoom sur le calcul.

La figure 18 montre la cohérence des résultats obtenus.

Deux autres cas ont été menés dans la même géométrie. Il s'agit d'un cas où interviennent une interaction entre un jet subsonique et un jet supersonique (figure 19) dans le second et pour le dernier cas de deux jets subsoniques (figure 20). Plus les cas traités sont lents, plus apparaissent des vortex secondaires qui montrent des oscillations dans l'écoulement principal.

### **Cas test de la marche**

Il s'agit du cas bien connu où est injecté à Mach 3 le fluide à l'amont qui fait apparaître les structures en  $\lambda$ . La géométrie est présentée sur la figure et les isoMach en figure 22. La figure 24 traduit la formation du choc et son aspect stationnaire

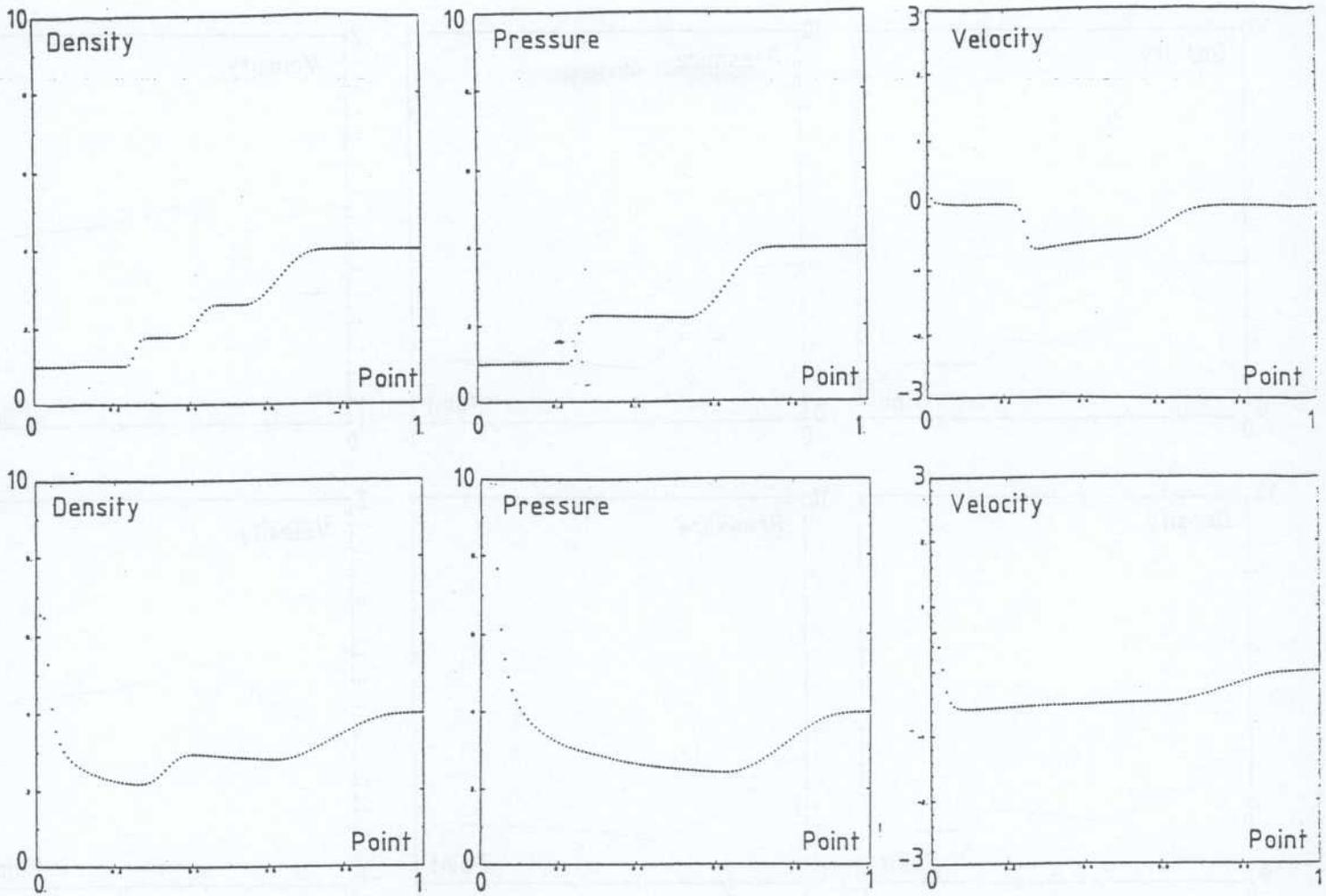
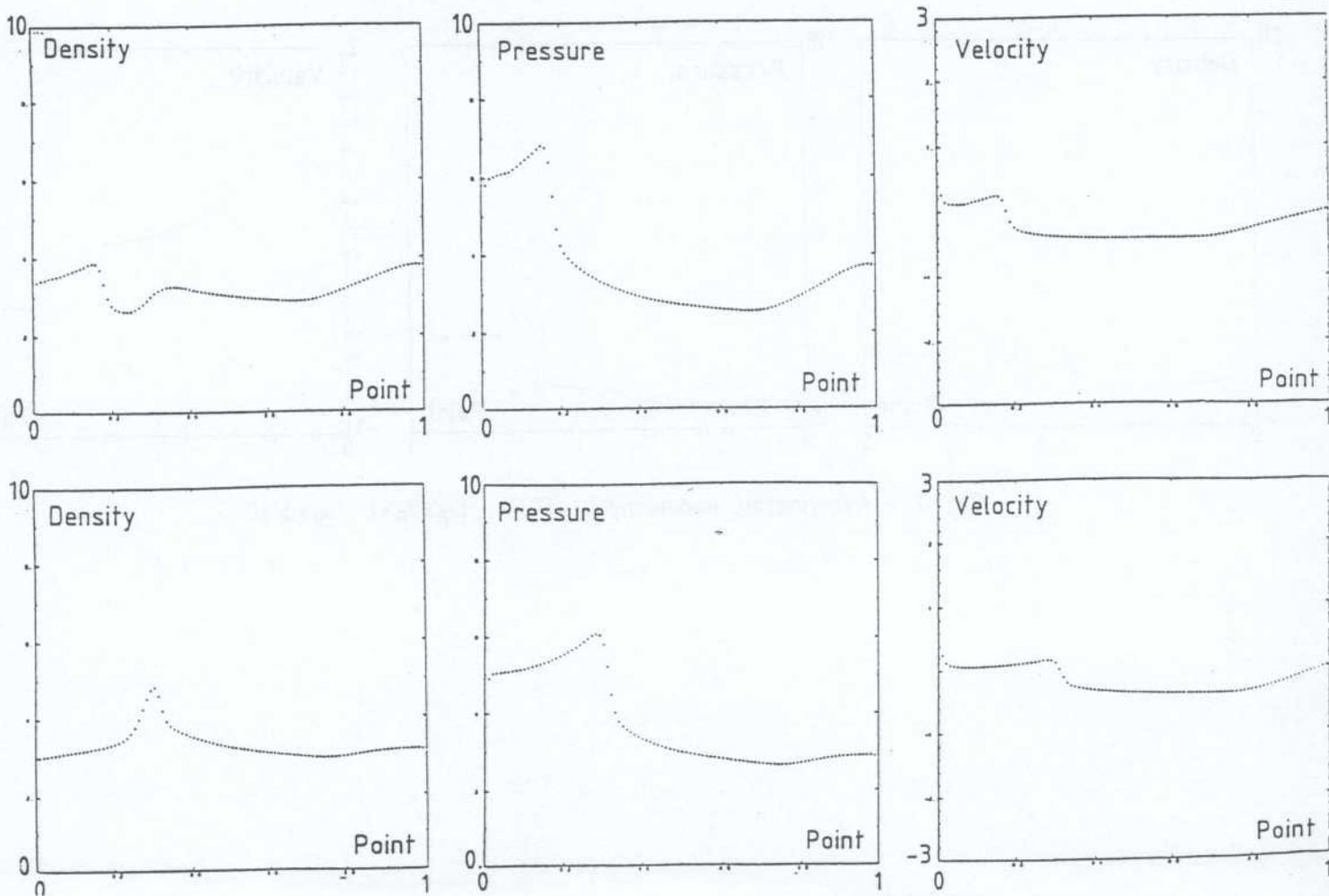


Fig. 1 - Axisymmetric geometry  $\rho_L = \rho_R = 1$ ,  $\rho_R = \rho_L = 4$ ,  $u_L = u_R = 0$



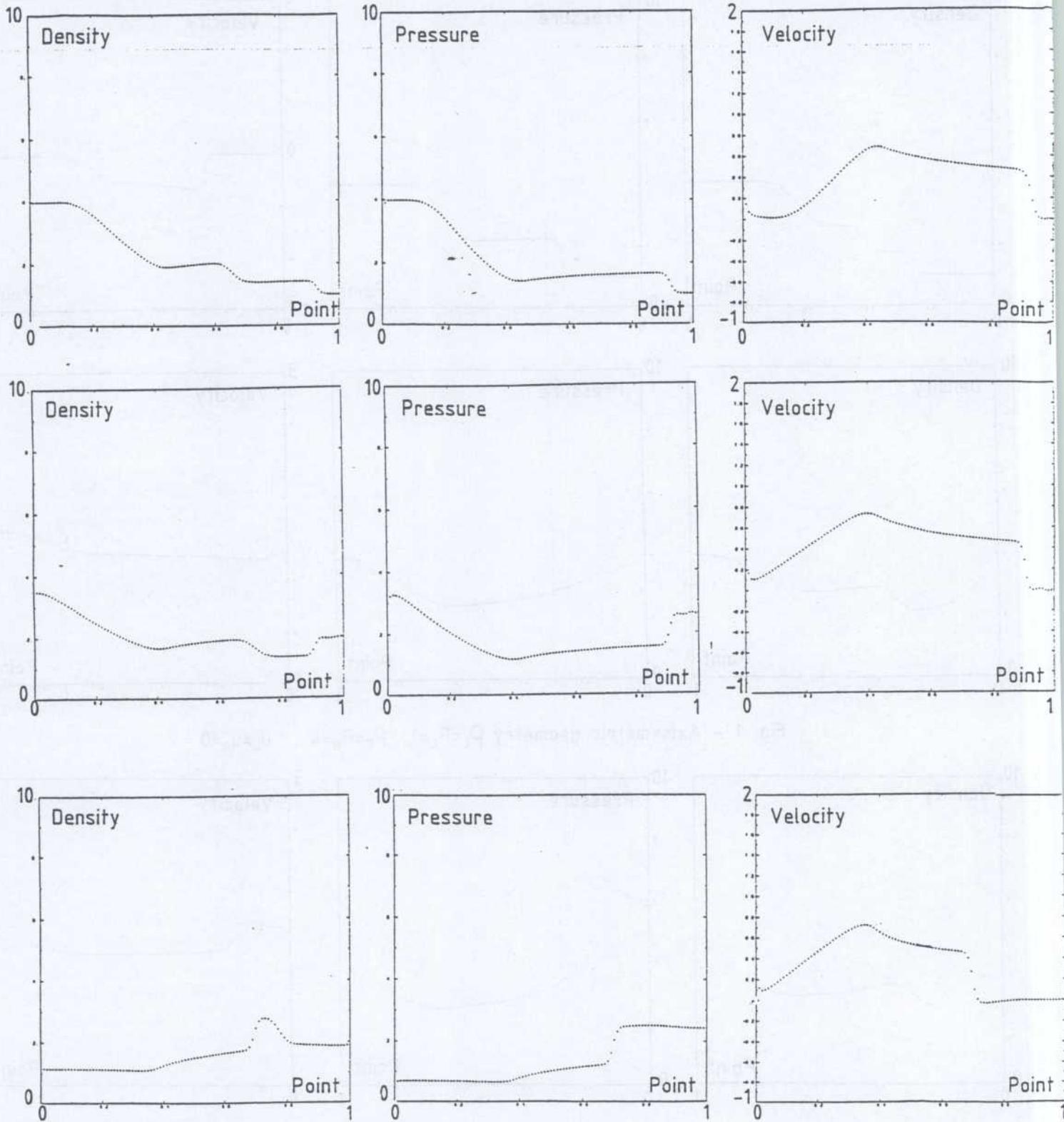


Fig. 2 - Axisymmetric geometry  $\rho_L = P_L = 4$ ,  $\rho_R = P_R = 1$ ,  $u_R = u_L = 0$

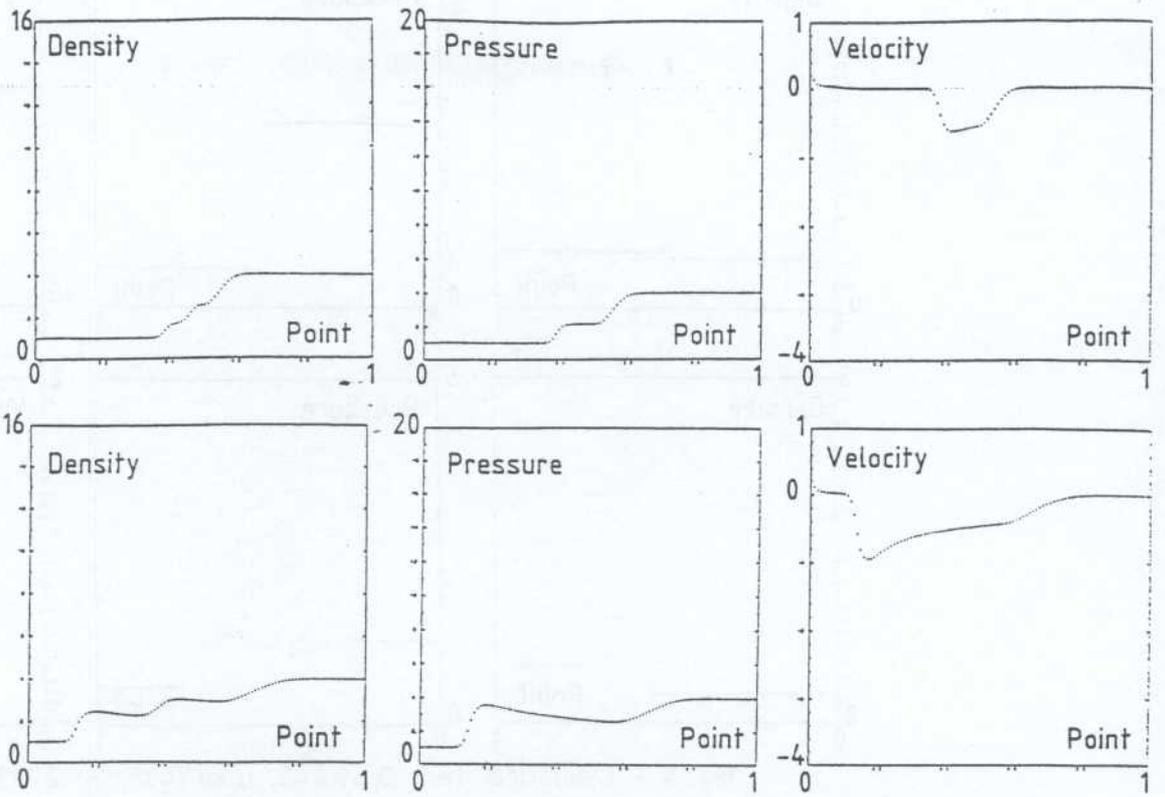
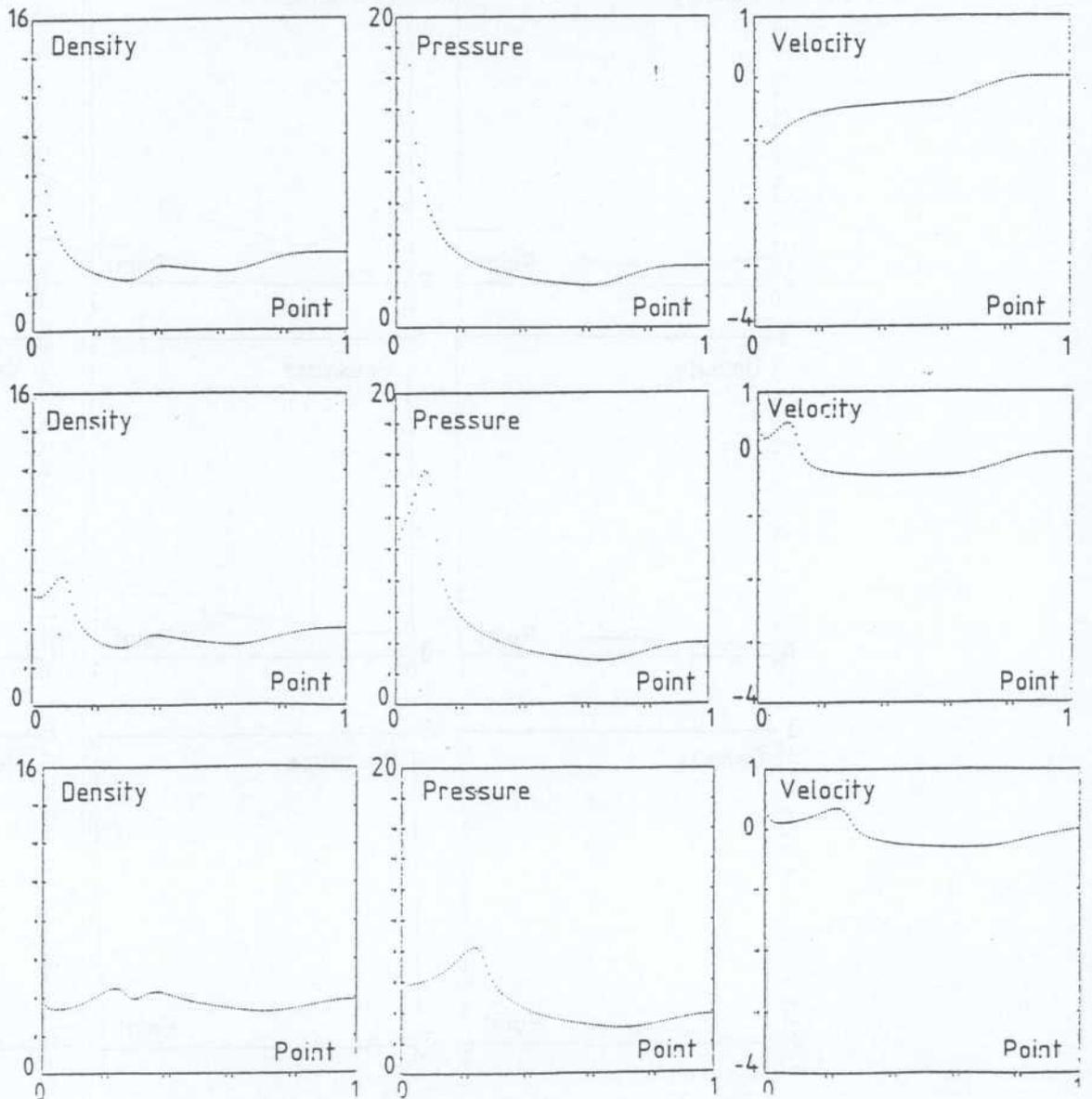


Fig. 3 - Spherical geometry  $\rho_L = \rho_R = 1$ ,  $\rho_R = \rho_L = 4$ ,  $u_L = u_R = 0$



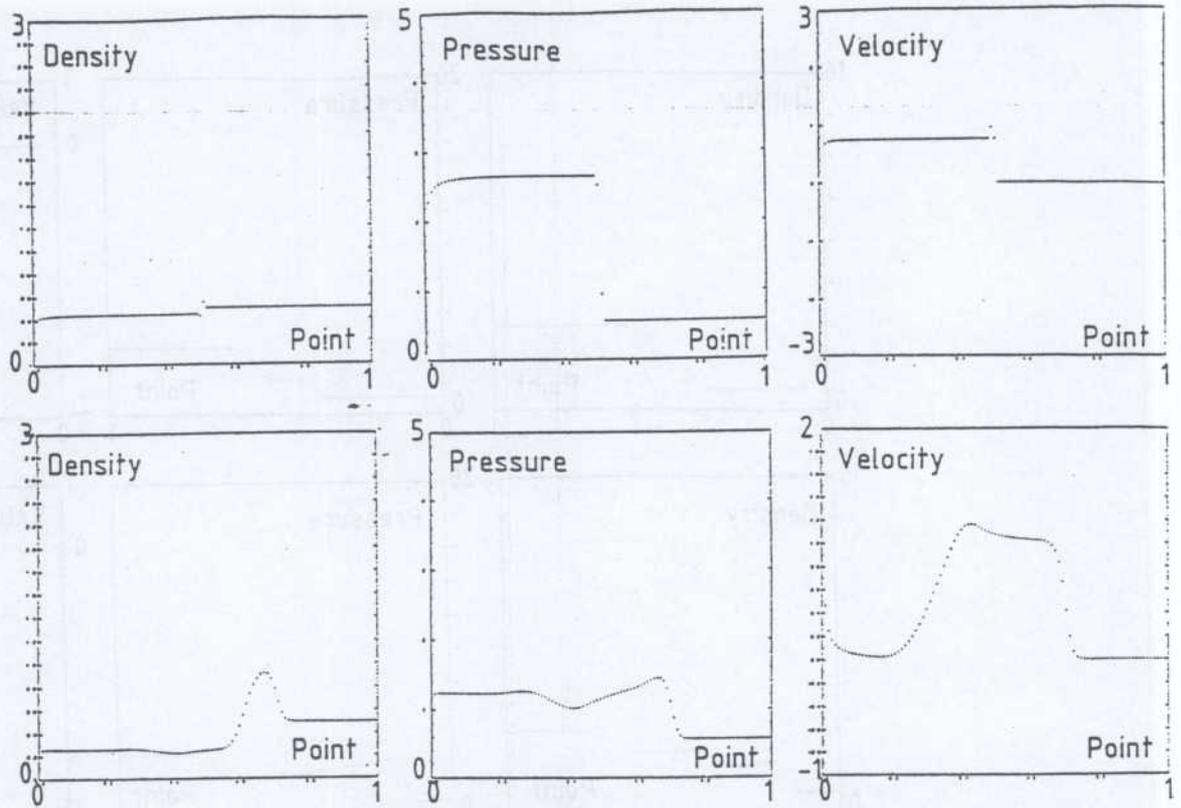
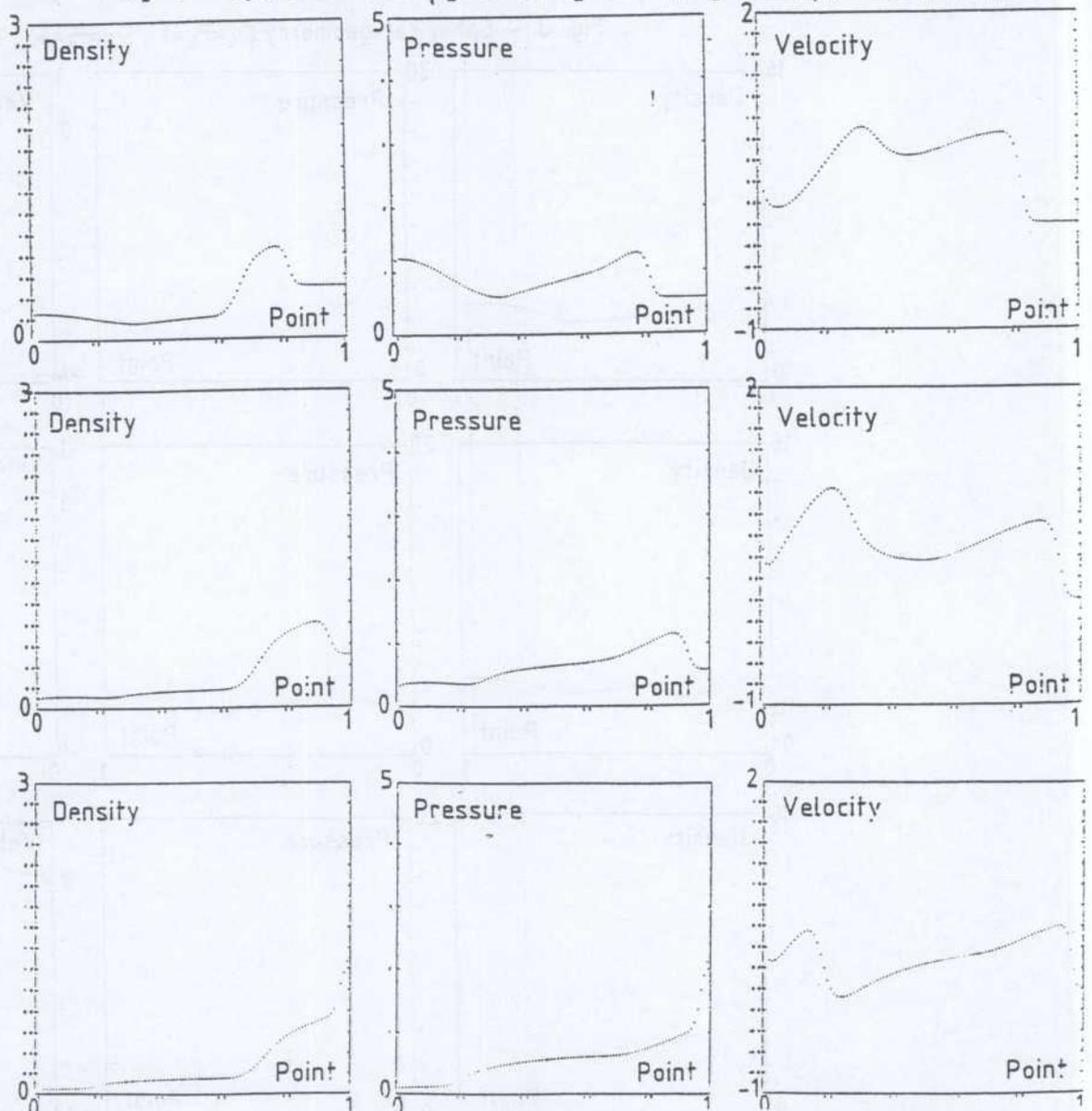


Fig. 4 - Cylindrical test  $\rho_L=0.445$ ,  $u_L=0.7438$ ,  $P_L=2.722$ ,  $\rho_R=0.5$ ,  $u_R=0$ ,  $P_R=0.571$



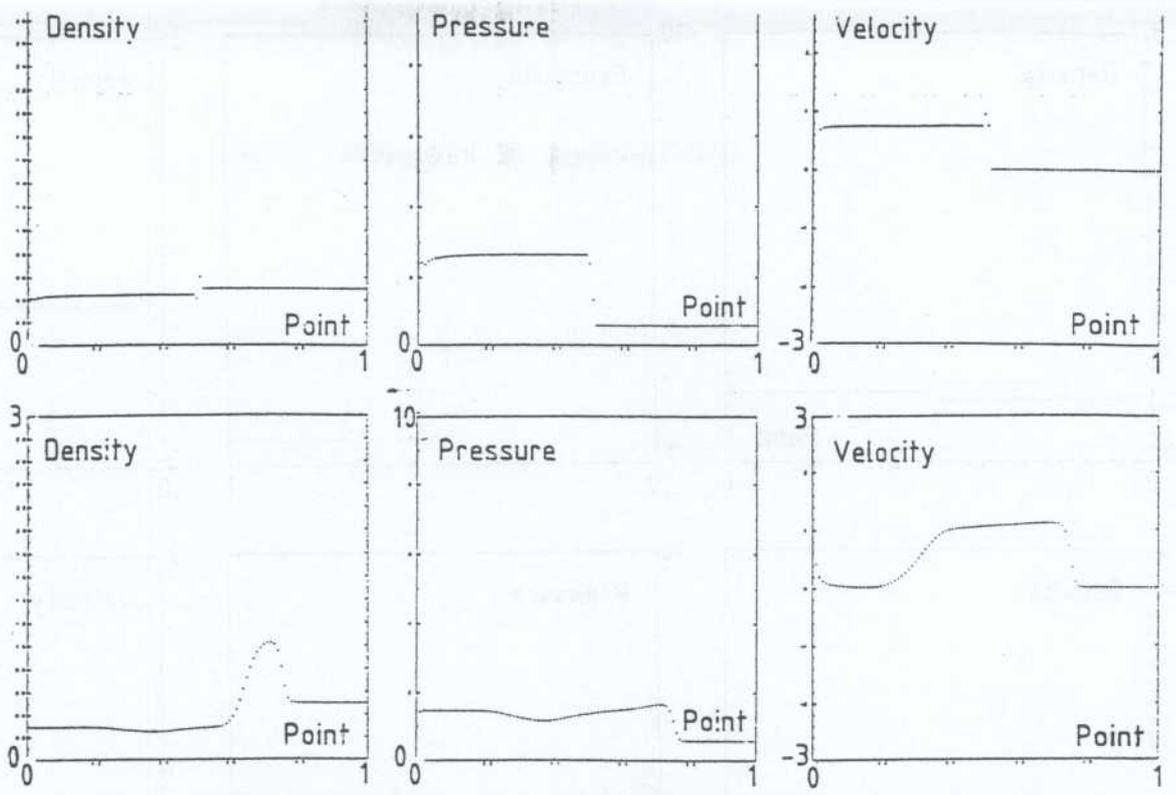
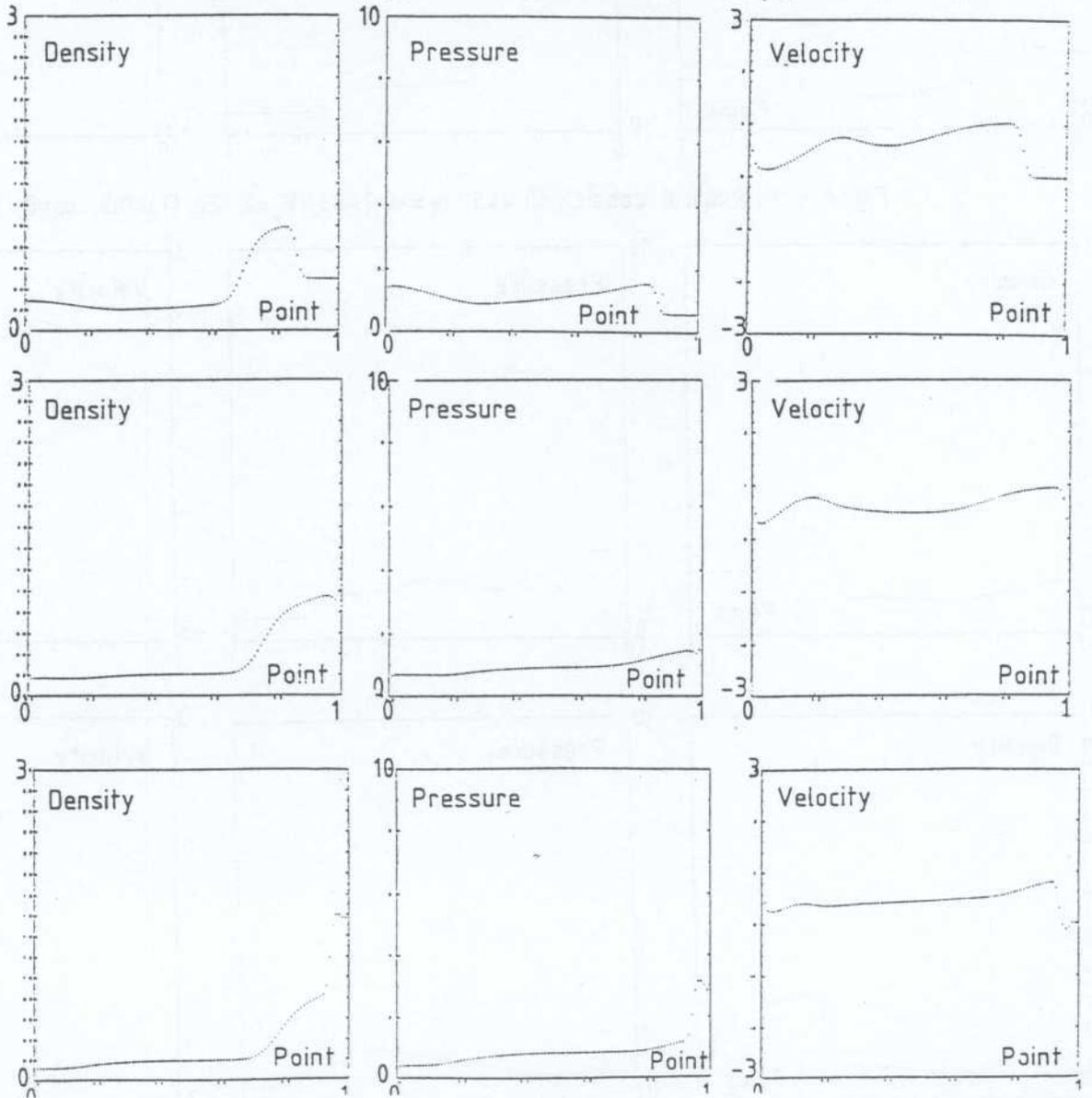


Fig. 5 - Spherical case  $\rho_L=0.445$ ,  $u_L=0.7438$ ,  $P_L=2722$ ,  $\rho_R=0.5$ ,  $u_R=0$ ,  $P_R=0.571$



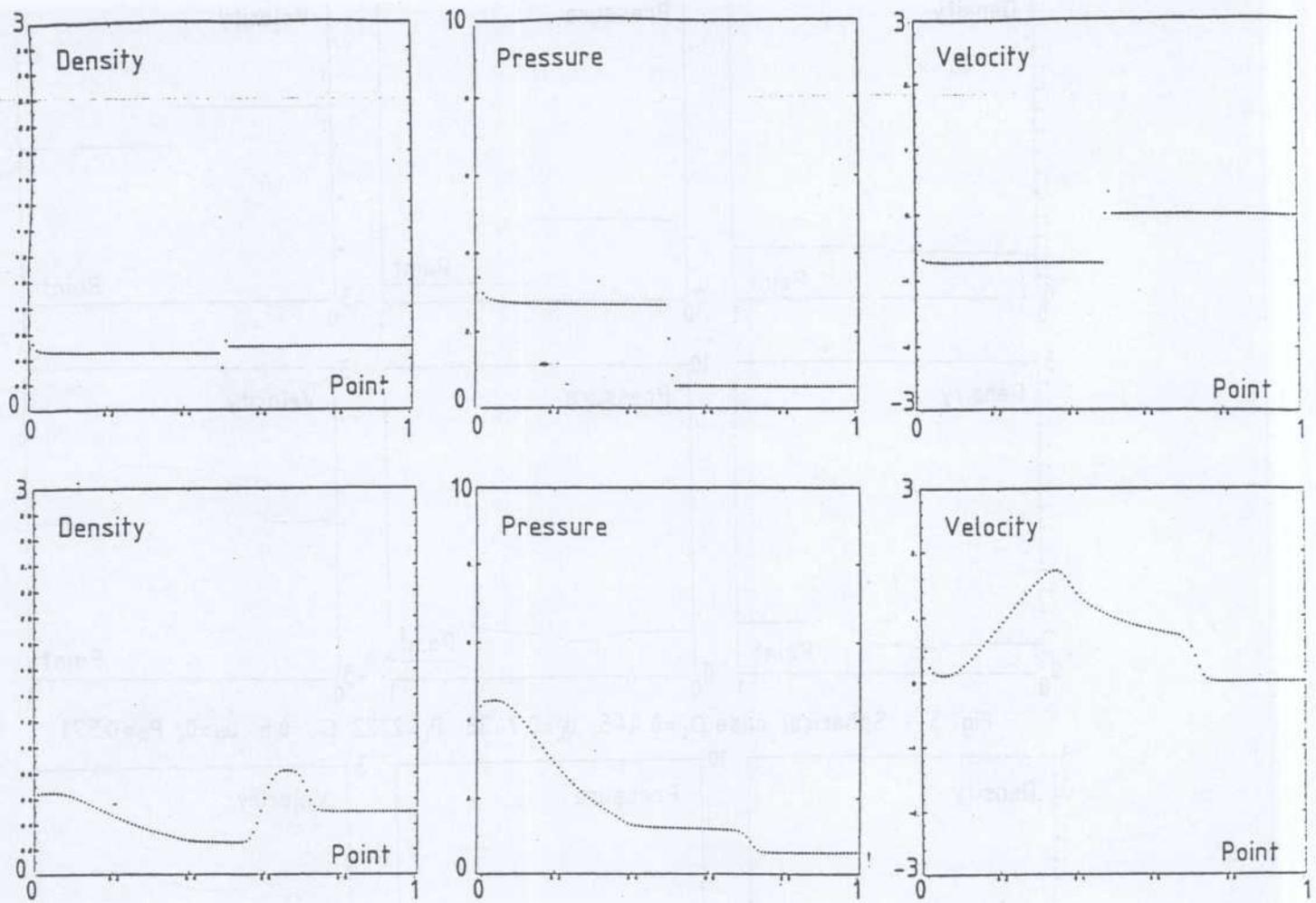
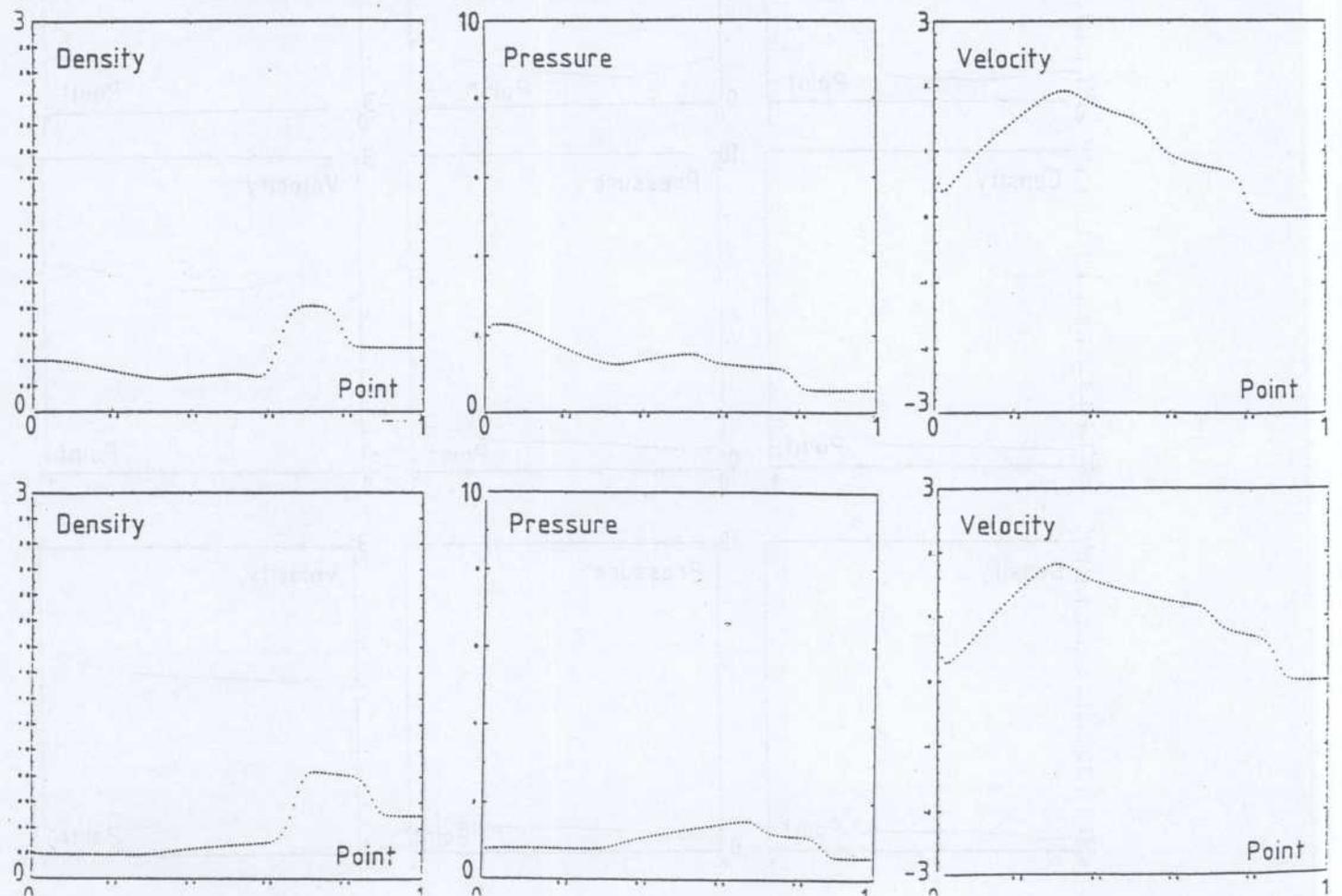


Fig. 6 - Cylindrical case  $\rho_L=0.445$ ,  $u_L=-0.7438$ ,  $P_L=2.722$ ,  $\rho_R=0.5$ ,  $u_R=0$ ,  $P_R=0.571$



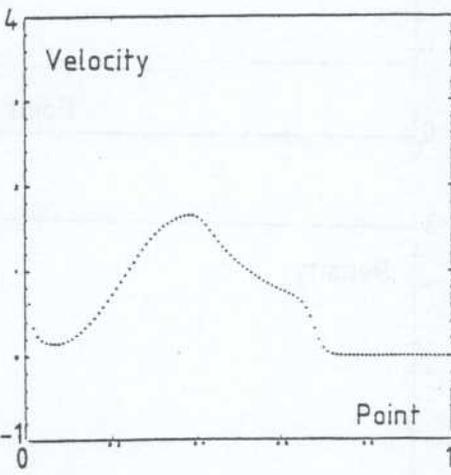
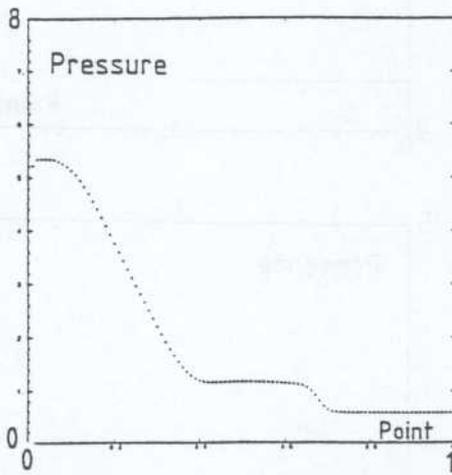
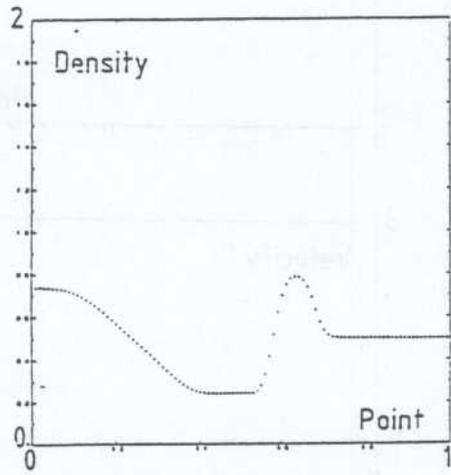
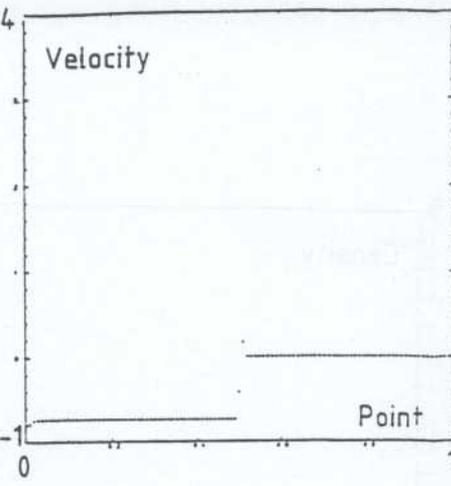
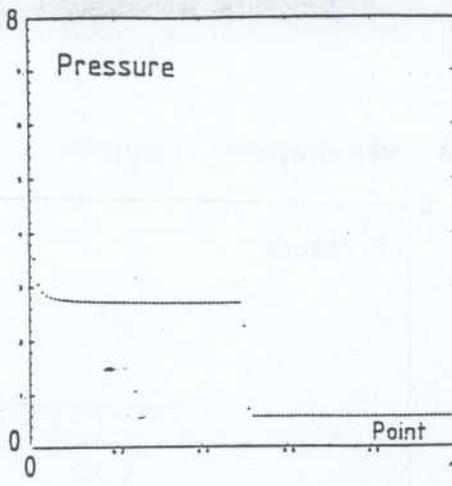
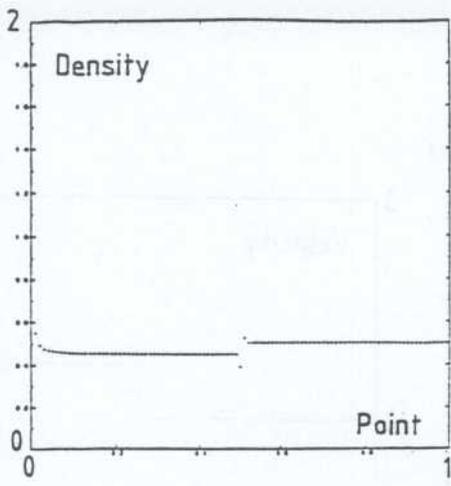
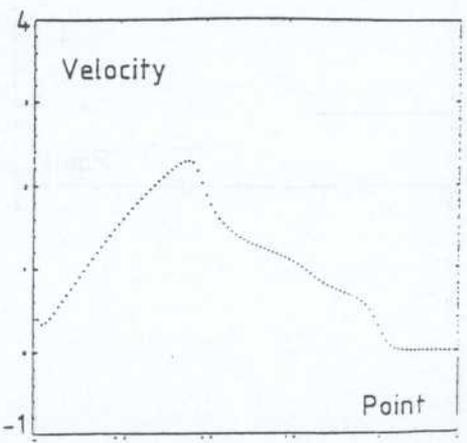
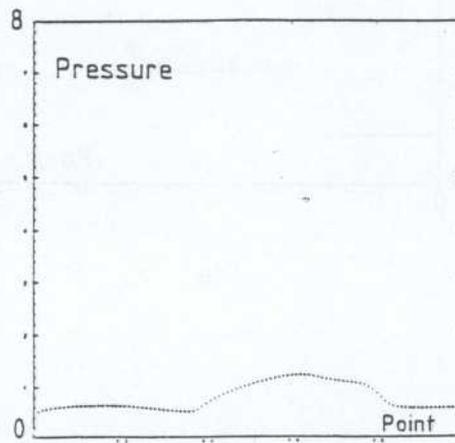
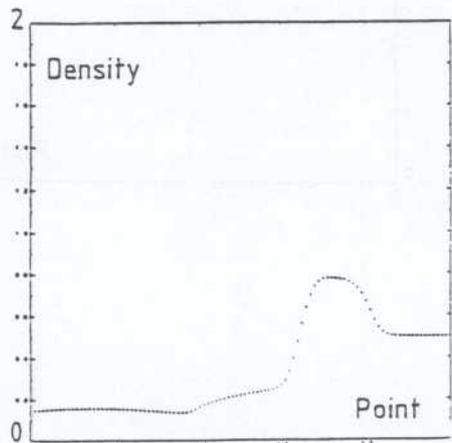
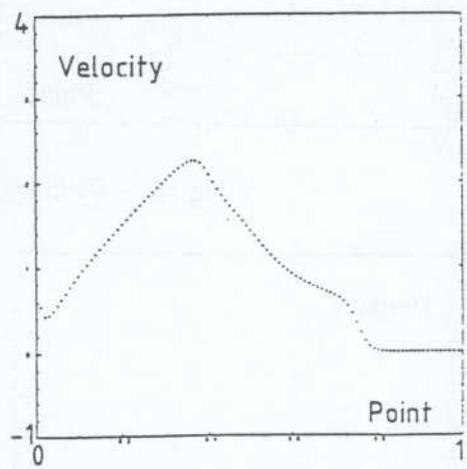
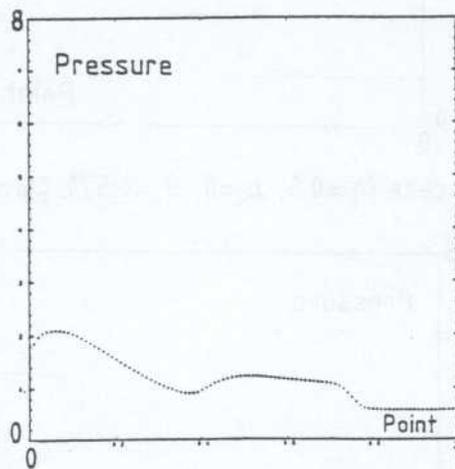
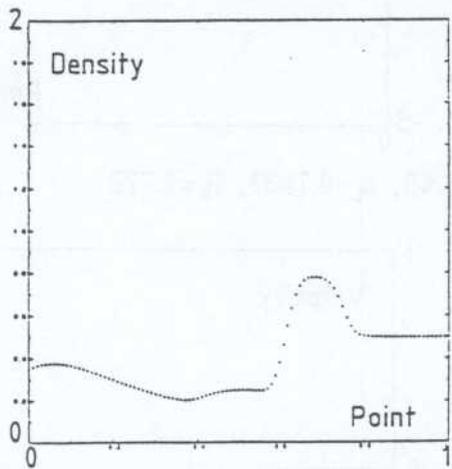


Fig. 7 - Spherical case  $\rho_L = 0.445, u_L = -0.7438, P_L = 2.722, \rho_R = 0.5, u_R = 0, P_R = 0.571$



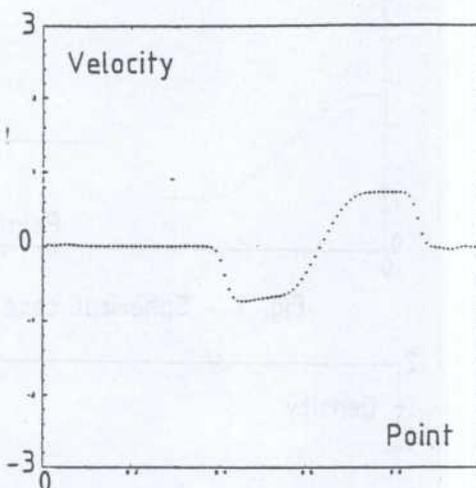
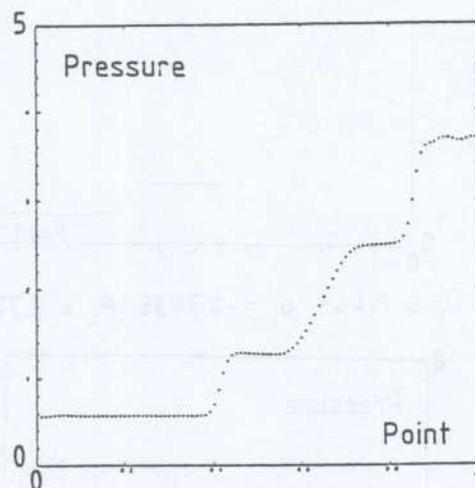
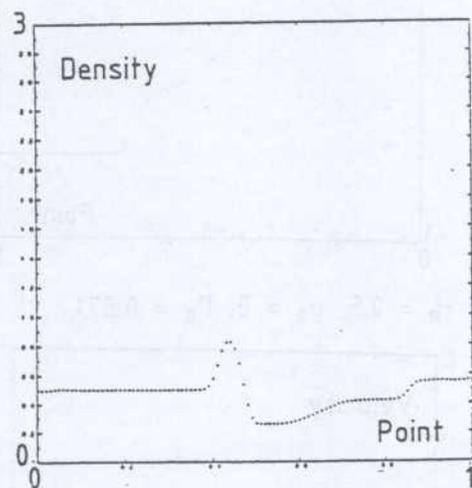
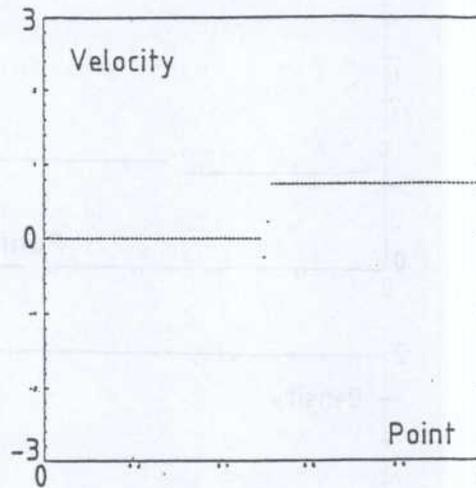
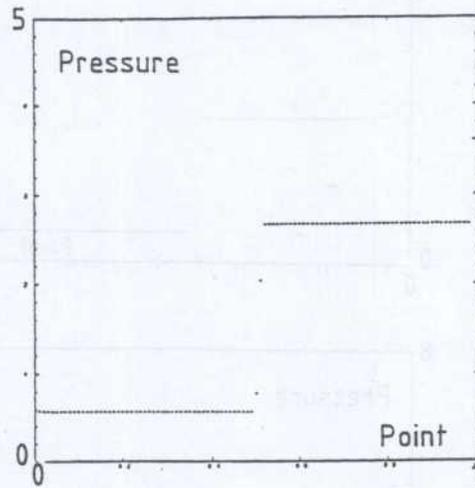
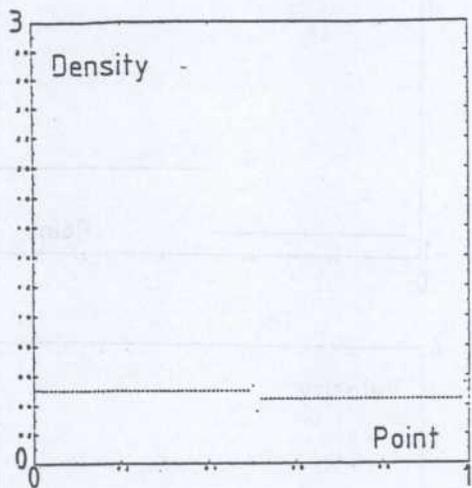
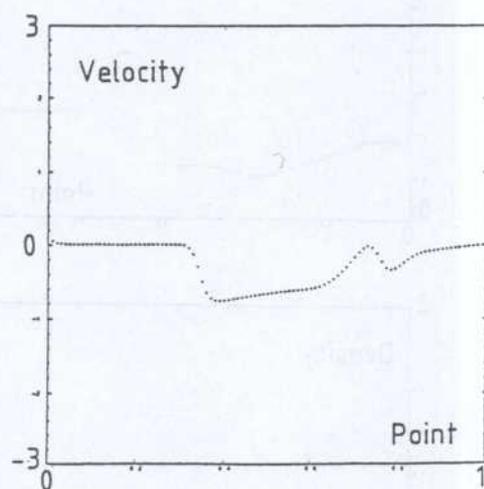
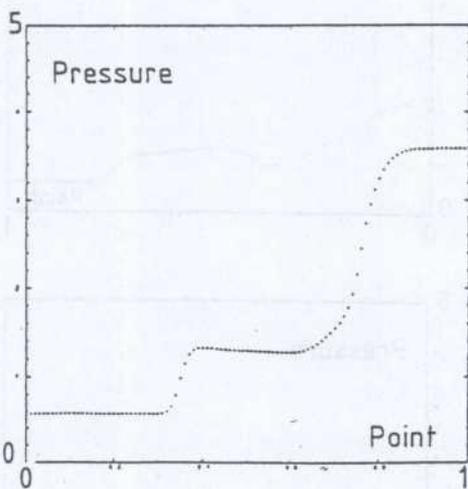
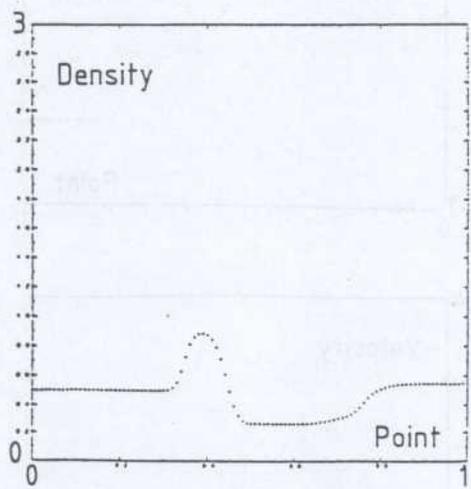


Fig. 8 - Cylindrical case  $\rho_L=0.5$ ,  $u_L=0$ ,  $P_L=0.571$ ,  $\rho_R=0.445$ ,  $u_R=0.7438$ ,  $P_R=2.722$



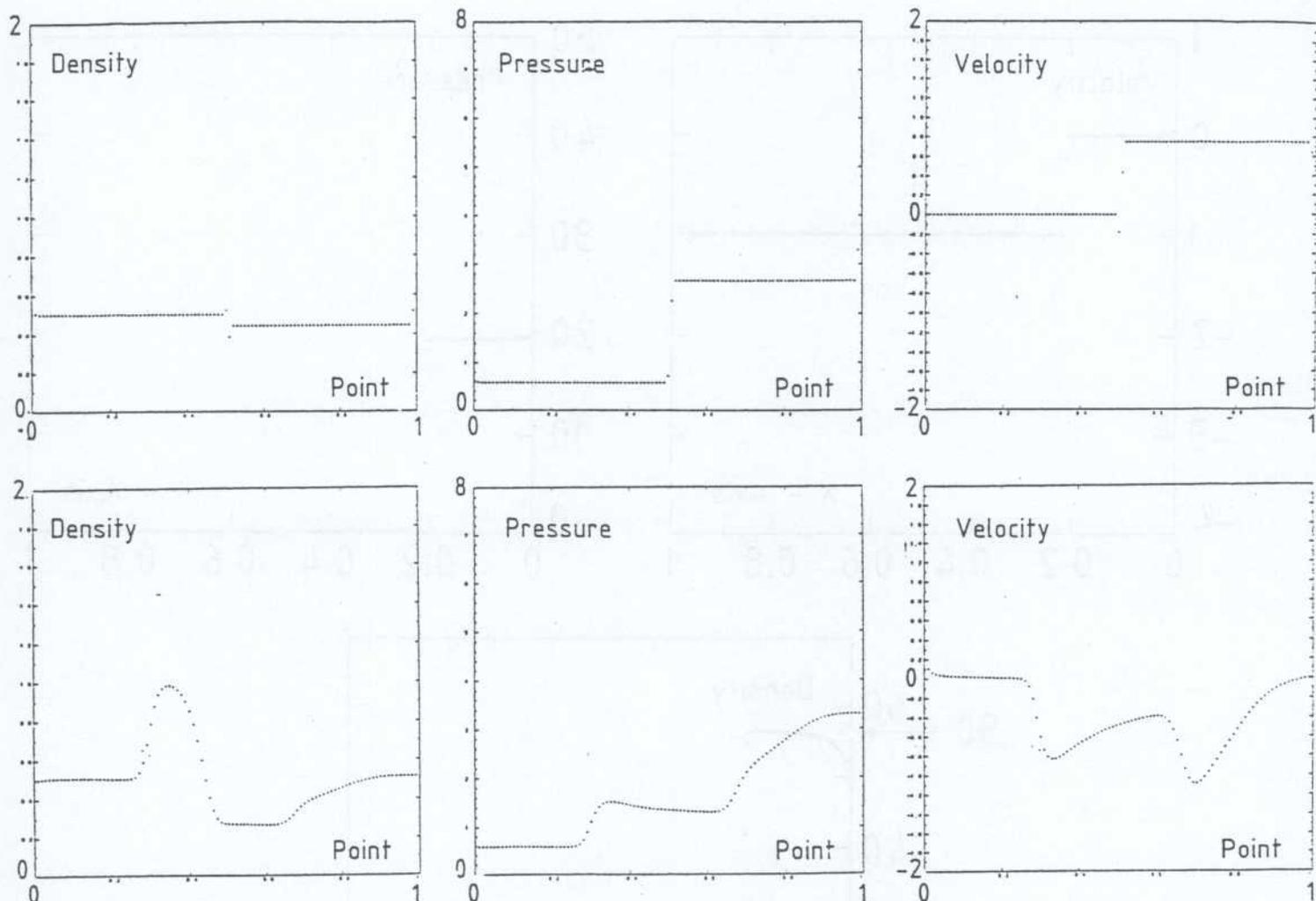
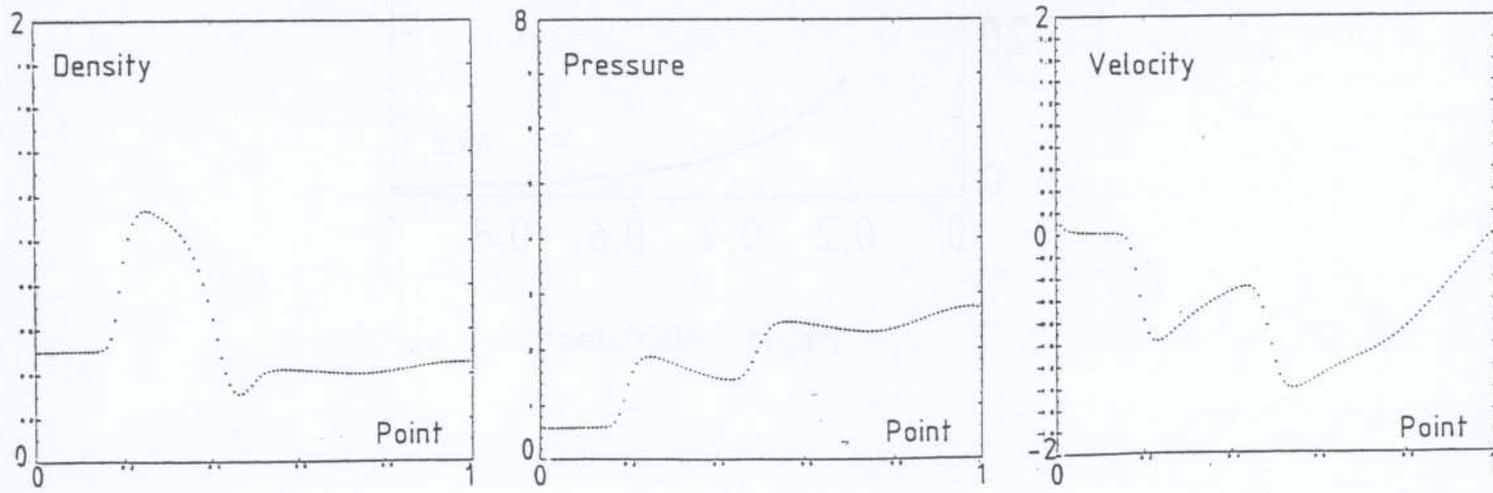


Fig. 9 - Spherical case  $\rho_L = 0.5$ ,  $u_L = 0$ ,  $P_L = 0.571$ ,  $\rho_R = 0.445$ ,  $u_R = 0.7428$ ,  $P_R = 2.722$



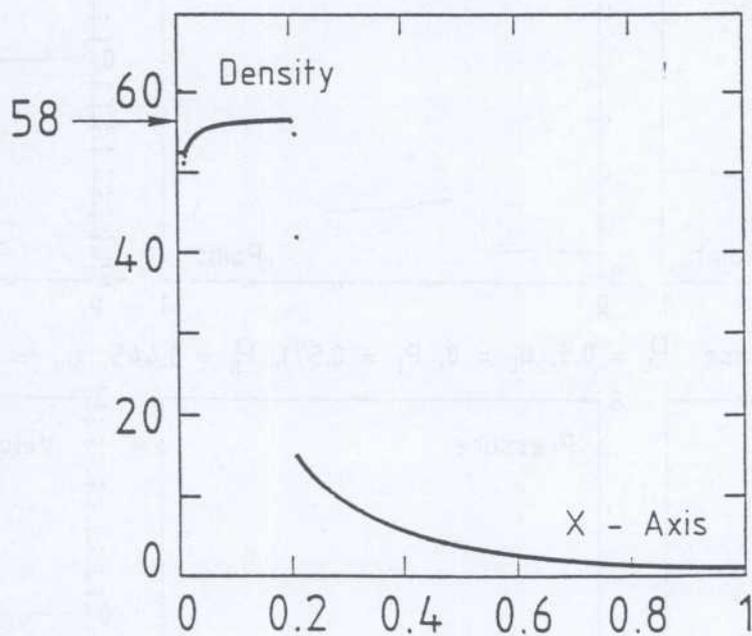
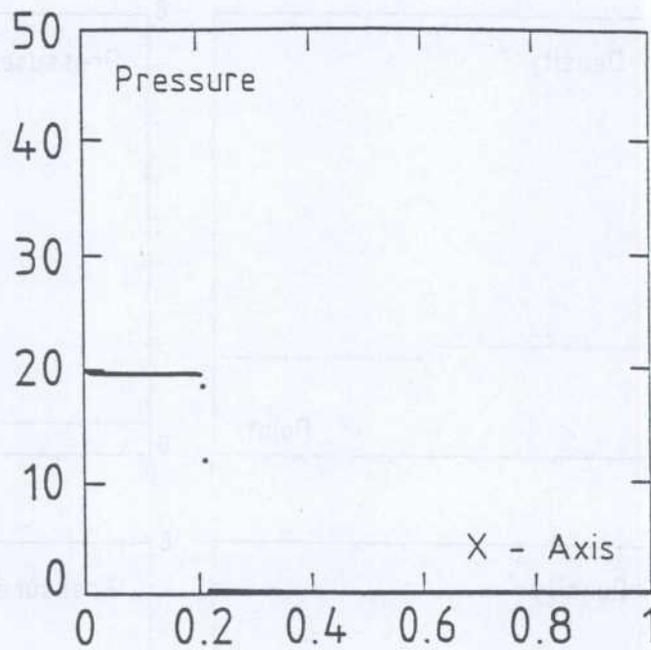
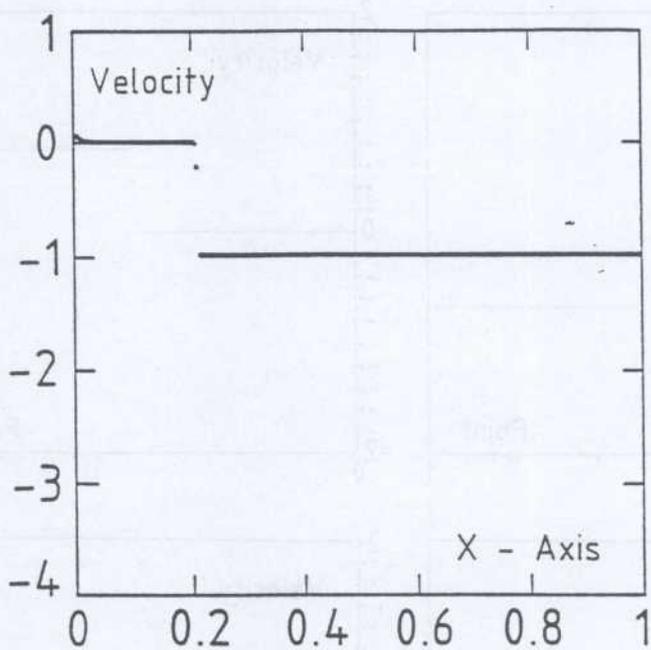


Fig. 10 - Noh' test

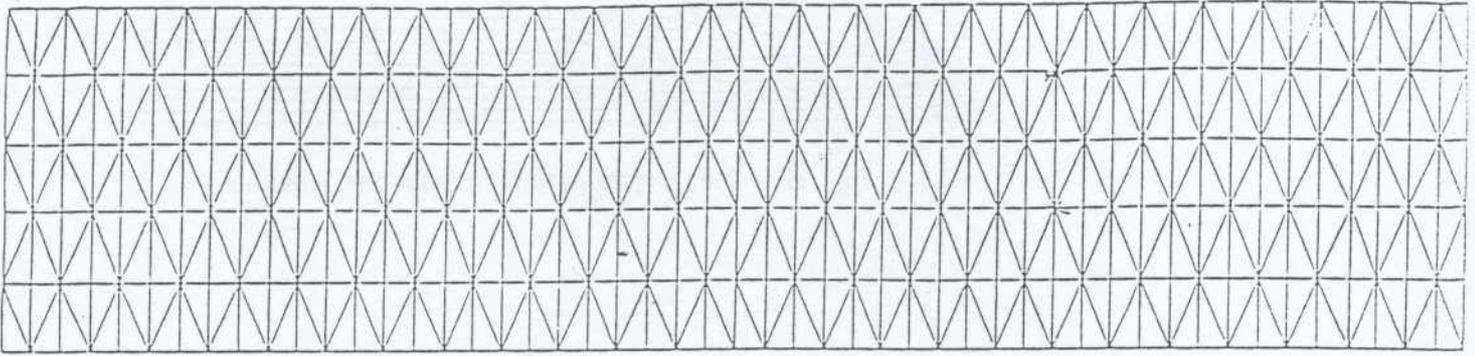


Fig. 11 - Mesh for shock tube

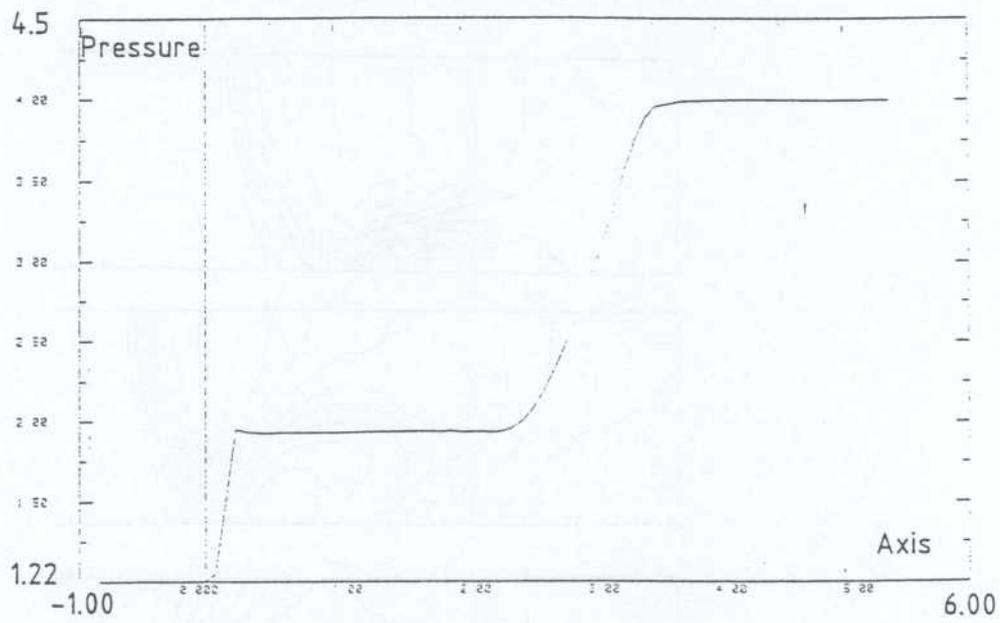
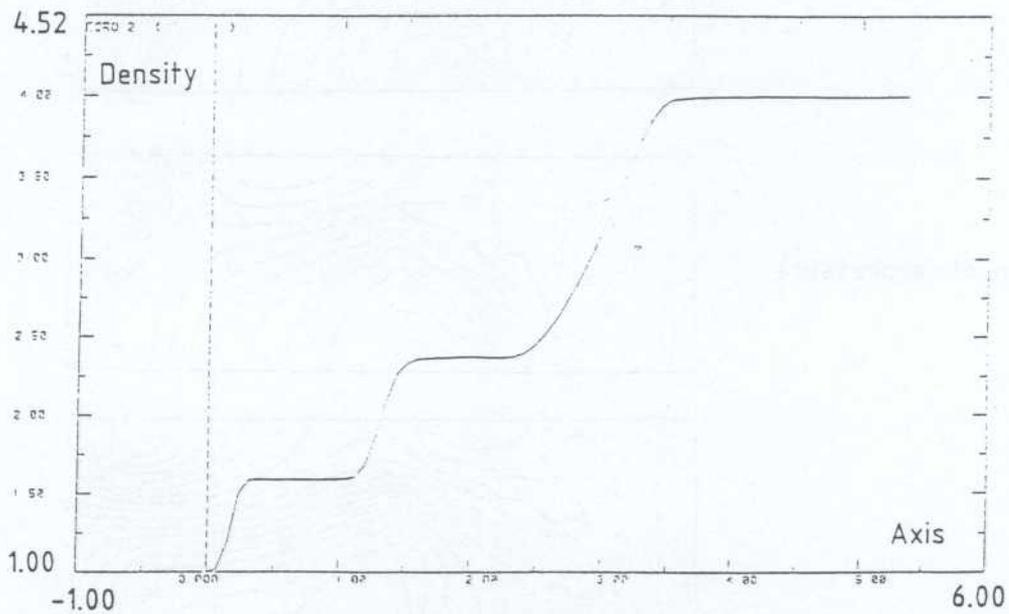


Fig. 12 - Shock tube test



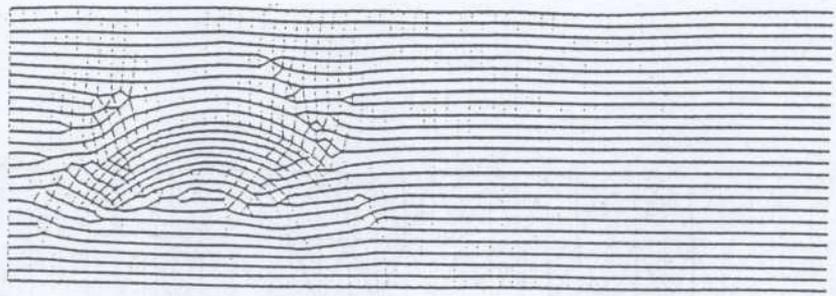


Fig. 13 - Mesh generation in subsonic channel

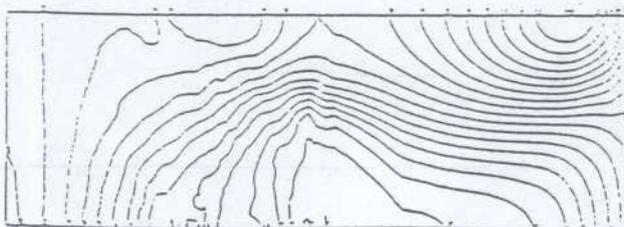
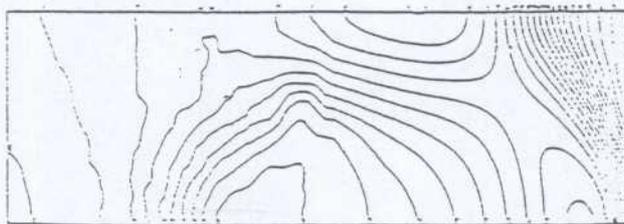
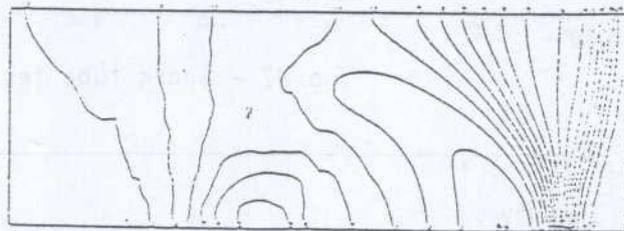
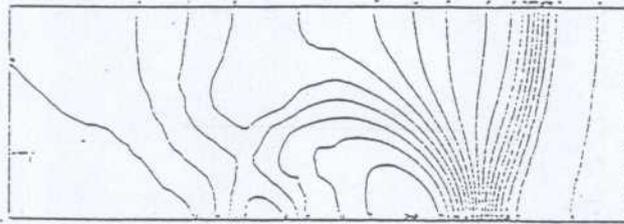
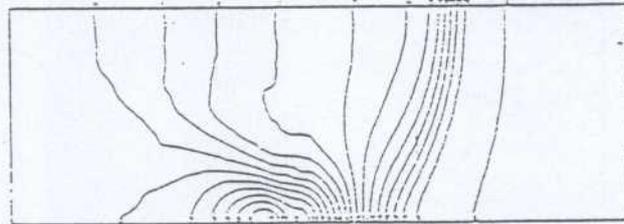
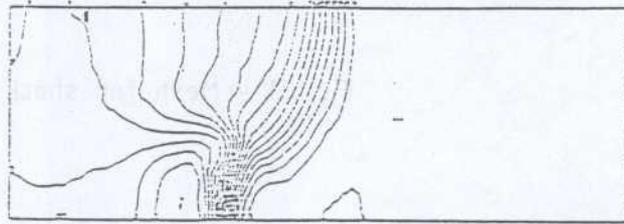


Fig. 14 - Evolution of isopressure

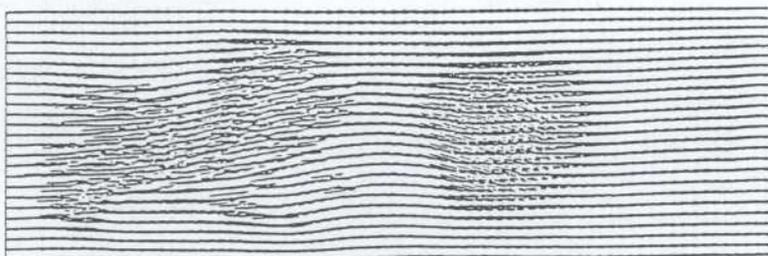
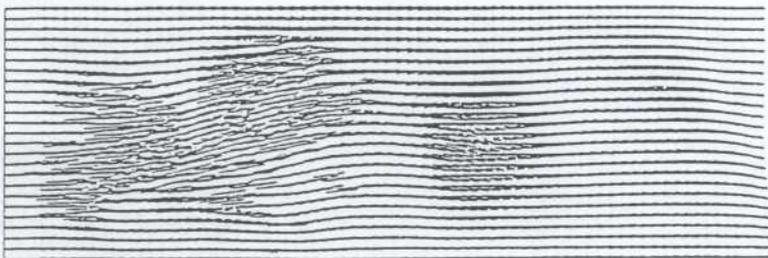
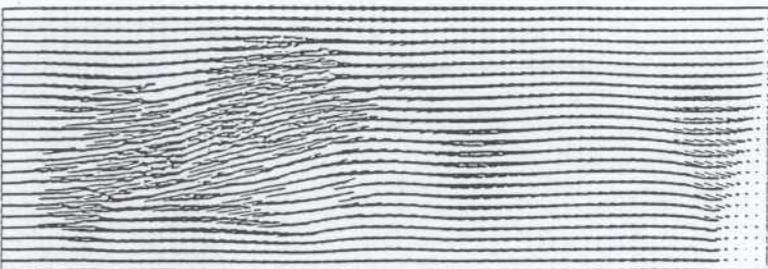
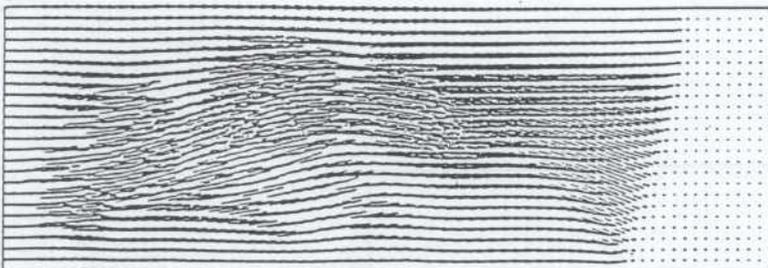
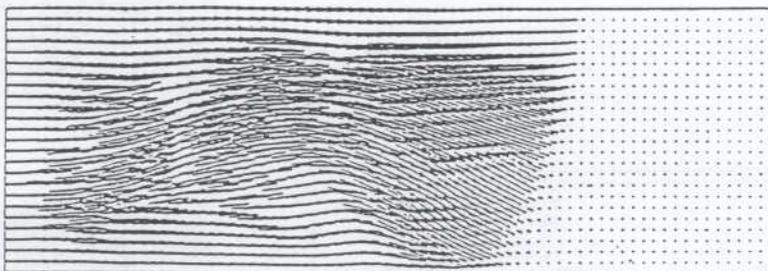
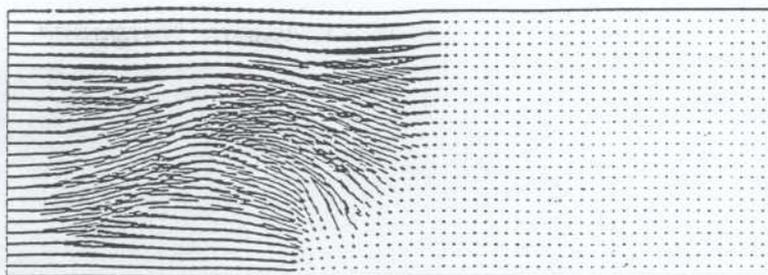
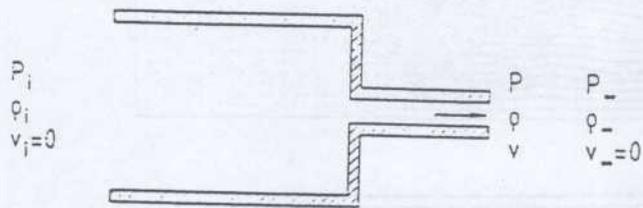
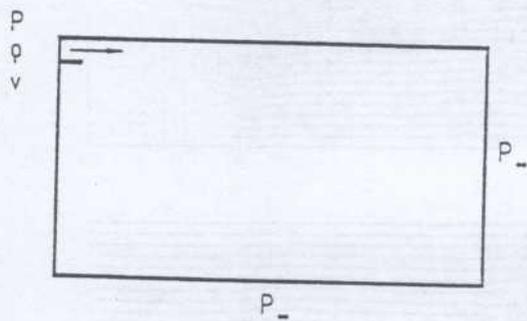


Fig. 15 - Evolution of the velocity in a subsonic channel



Modélisation



$$\rho_i/\rho_- = P_i/P_- = 10$$

$$M = 1.0$$

$$\gamma = 1.4$$

Then  $P/P_- = 5.22$

$$\rho/\rho_- = 6.29$$

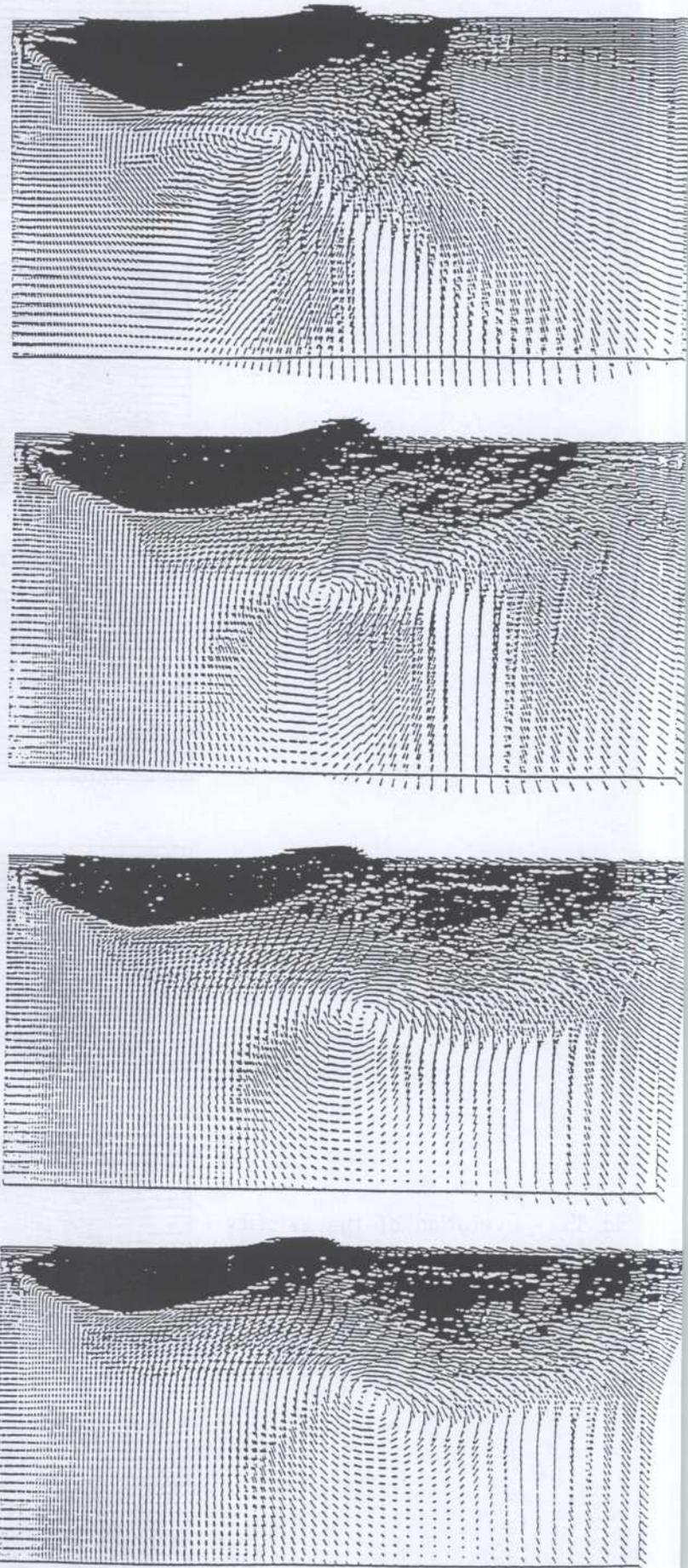


Fig. 16 - Evolution of a supersonic free-jet

INJECTION DATA Ambient chamber pressure: 0.5 bar

$GP_1$

Stagnation pressure  $P_i$  : 4 bar

Stagnation temperature  $T_i$  : 60 K

Mach number : 1.7

Axial velocity

$GP_2$

Stagnation pressure  $P_i$  : 25 bar

Stagnation temperature  $T_i$  : 2370 K

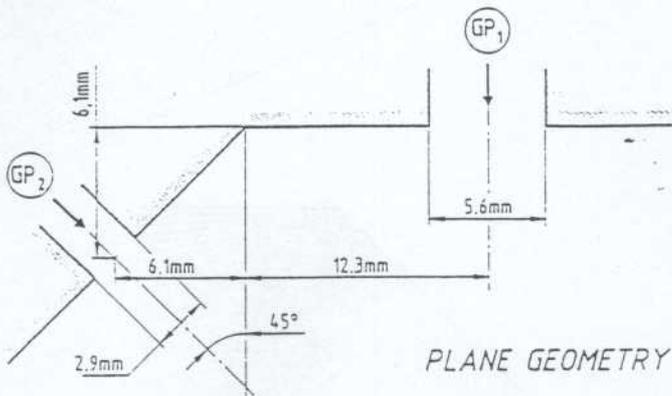
Mach number : 1.1

Velocity at  $45^\circ$  angle

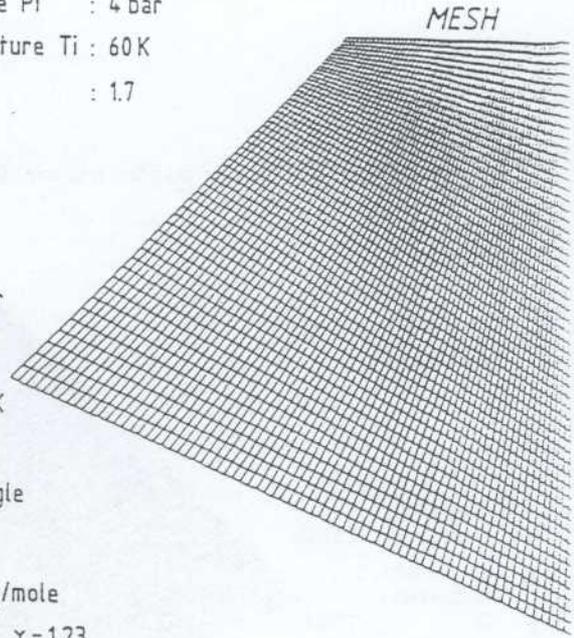
Gas properties:

Molar weight : 22.7 g/mole

Specific heat ratio  $\gamma = 1.23$



PLANE GEOMETRY



MESH

Fig. 17 - Geometry for interaction of two supersonic jets.

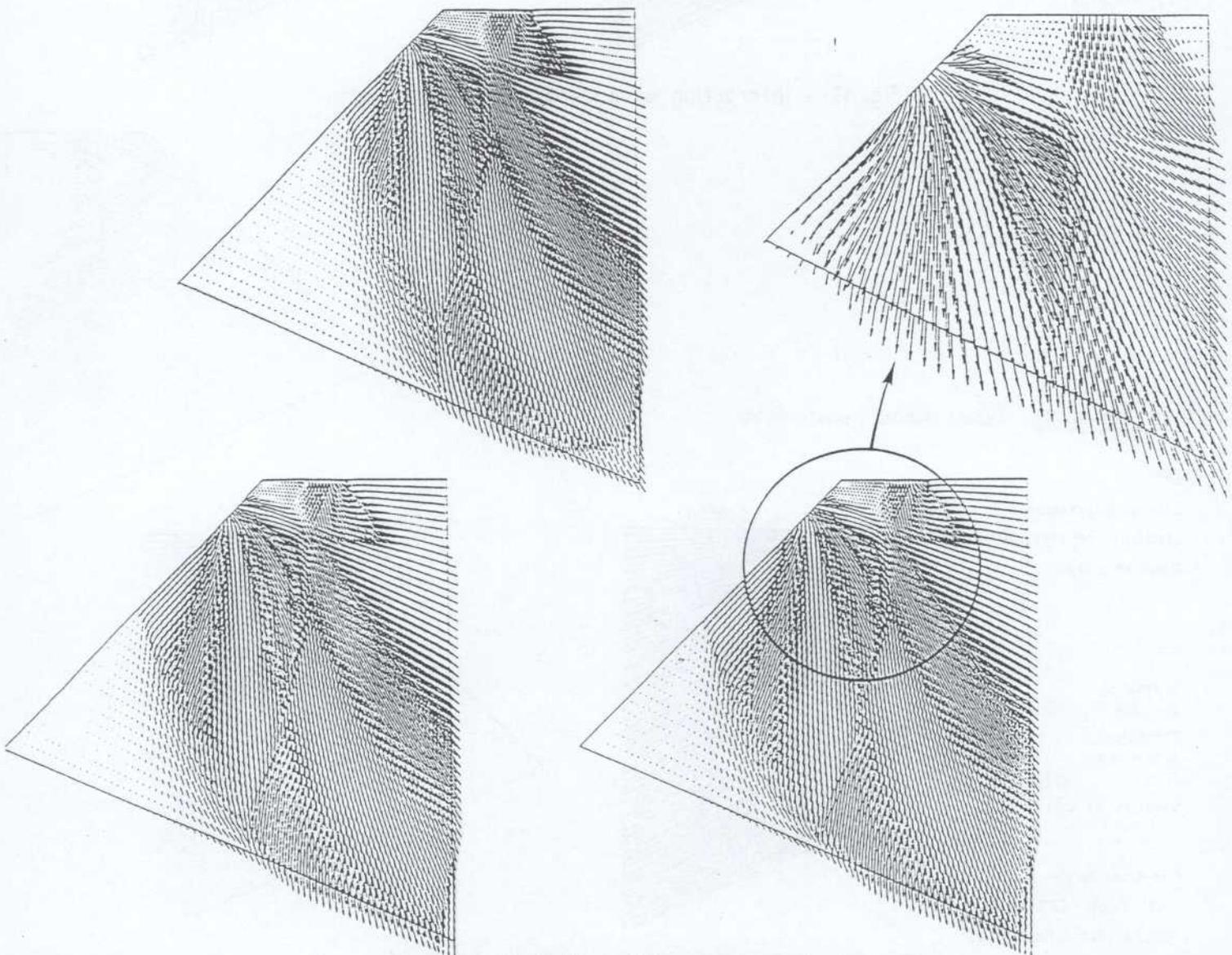


Fig. 18 - Evolution of two supersonic jets

INJECTION DATA Ambient chamber pressure: 0.5 bar

$GP_1$

Stagnation pressure  $P_i$  : 4 bar

Stagnation temperature  $T_i$  : 60K

Axial velocity

$GP_2$

Stagnation pressure  $P_i$  : 2.5 bar

Stagnation temperature

$T_i$  : 2370K

Mach number: 1.1

Velocity at 45° angle

Gas properties:

Molar weight: 22.7g/mole

Specific heat ratio  $\gamma=1.23$

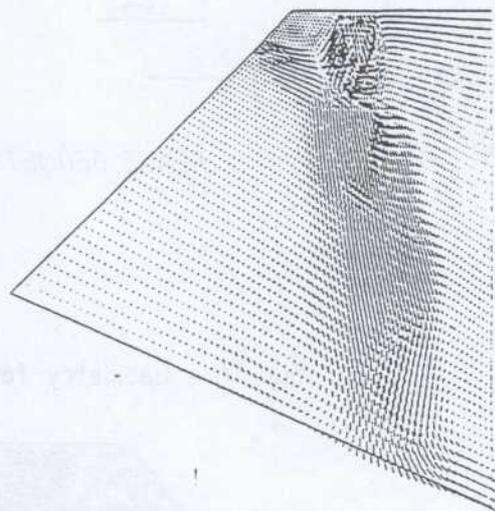
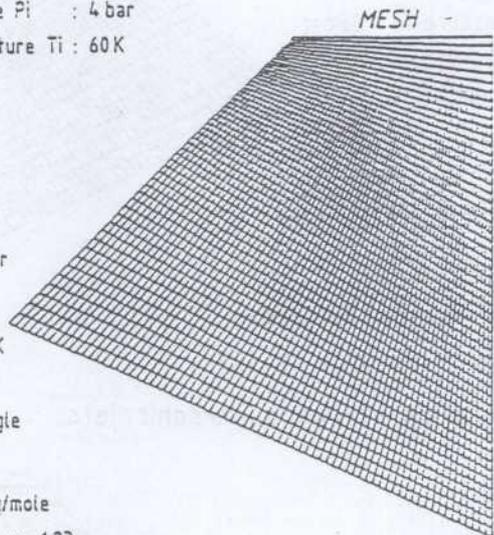


Fig. 19 - Interaction of supersonic subsonic jets

INJECTION DATA Ambient chamber pressure: 0.5 bar

$GP_1$

Stagnation pressure  $P_i$  : 1.5 bar

Stagnation temperature  $T_i$  : 60K

Axial velocity

$GP_2$

Stagnation pressure  $P_i$  : 1.0 bar

Stagnation temperature

$T_i$  : 2370K

Velocity at 45° angle

Gas properties:

Molar weight: 22.7g/mole

Specific heat ratio  $\gamma=1.23$

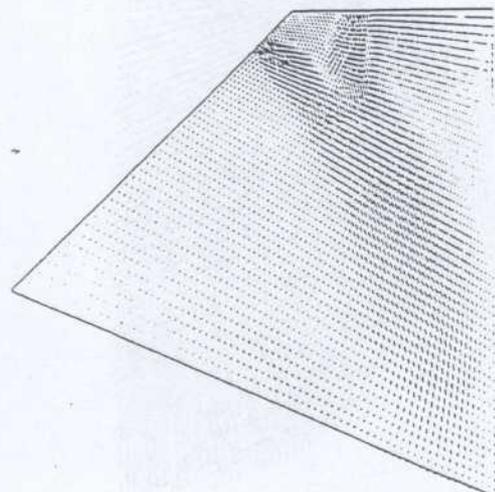
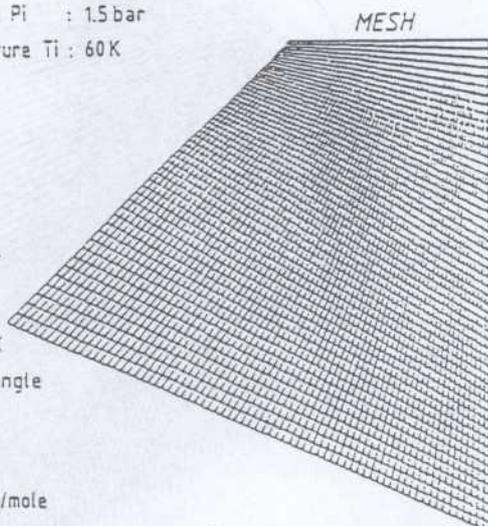


Fig: 20 - Interaction of two subsonic jets

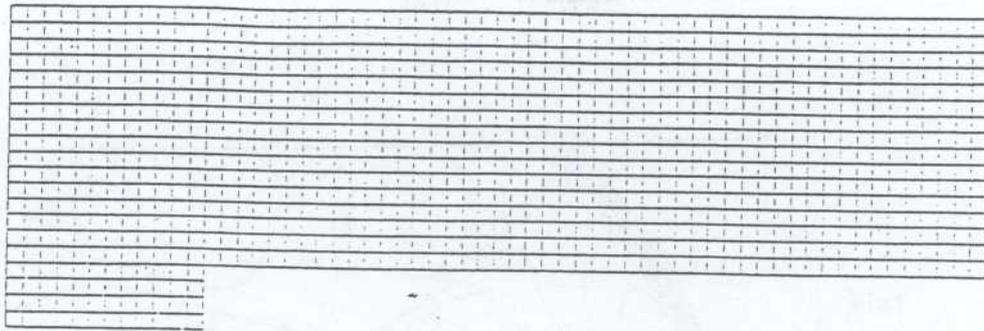
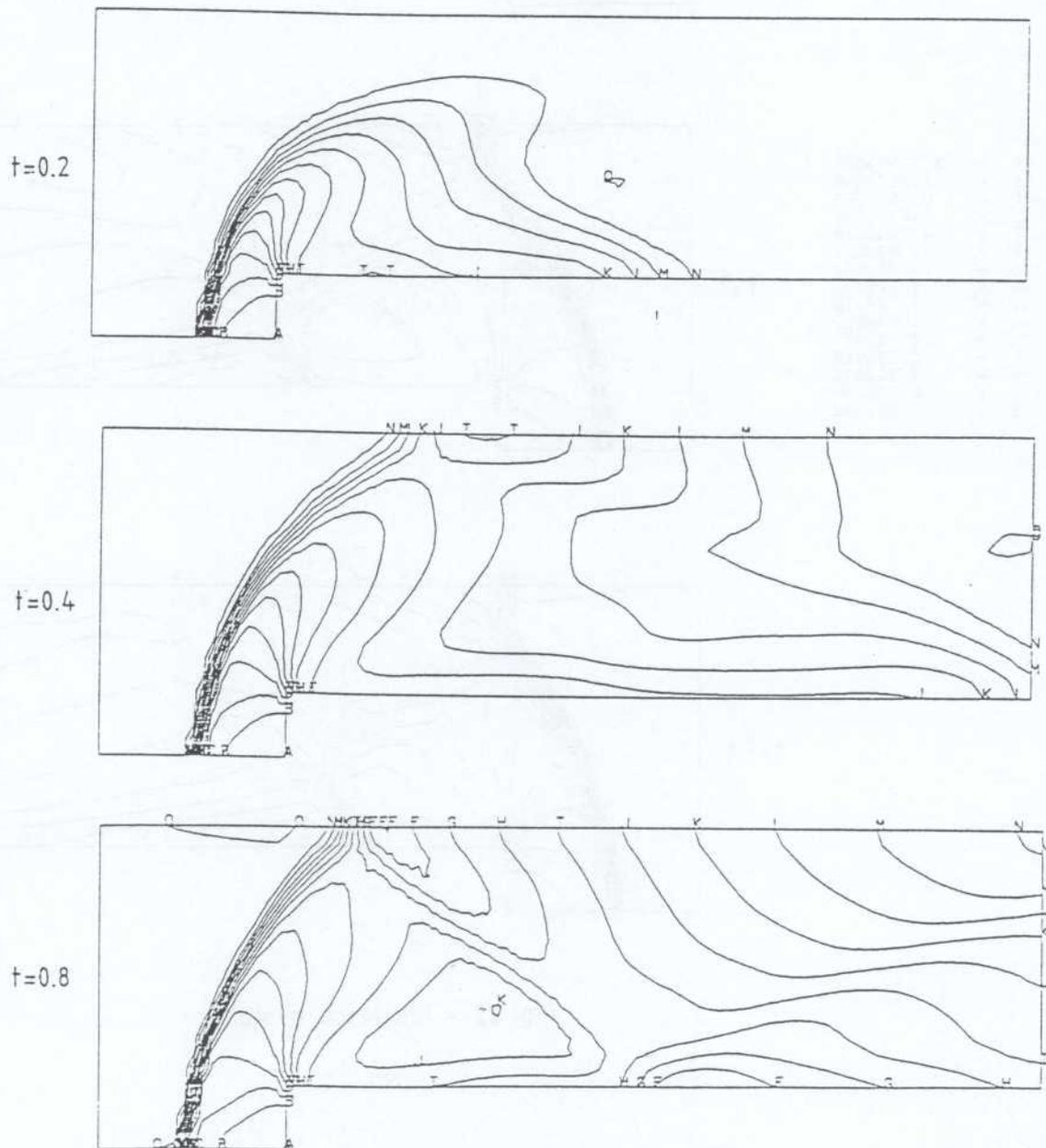
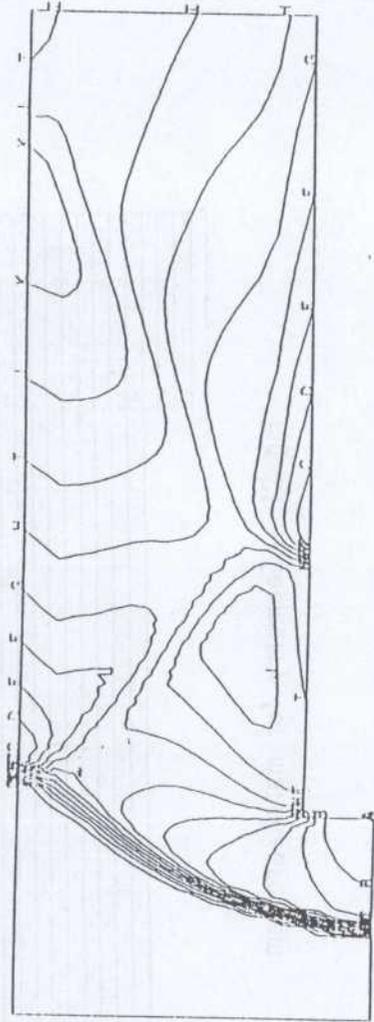
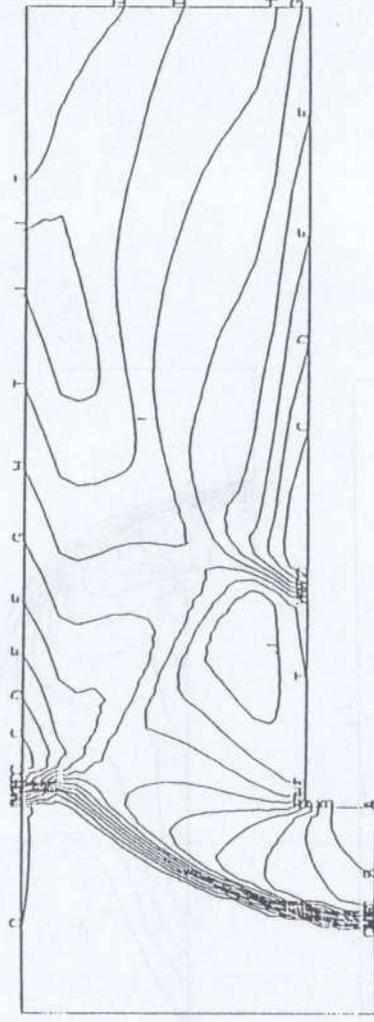


Fig. 21 - Geometry for march-problem

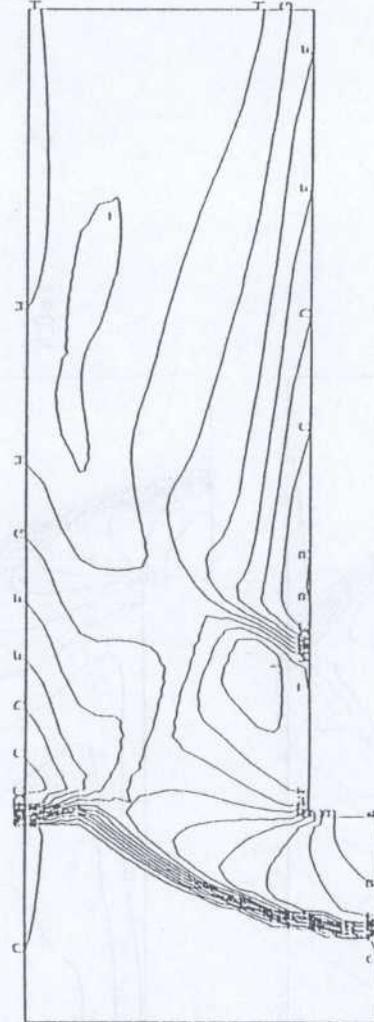




t=1.6



t=2



t=2.6

```

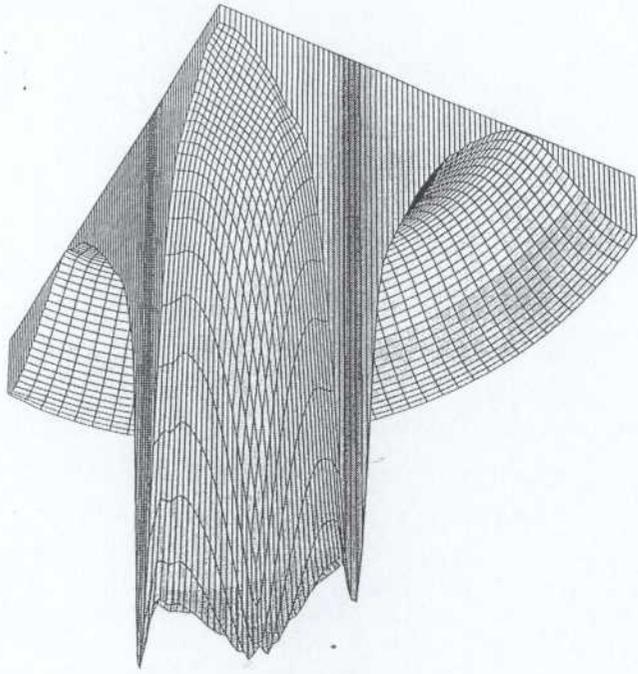
0.383368E-1
0.2584060
0.4624583
0.6735105
0.8865629
1.088615
1.310668
1.522720
1.734772
1.946825
2.158877
2.370929
2.582982
2.795034
3.001148

```

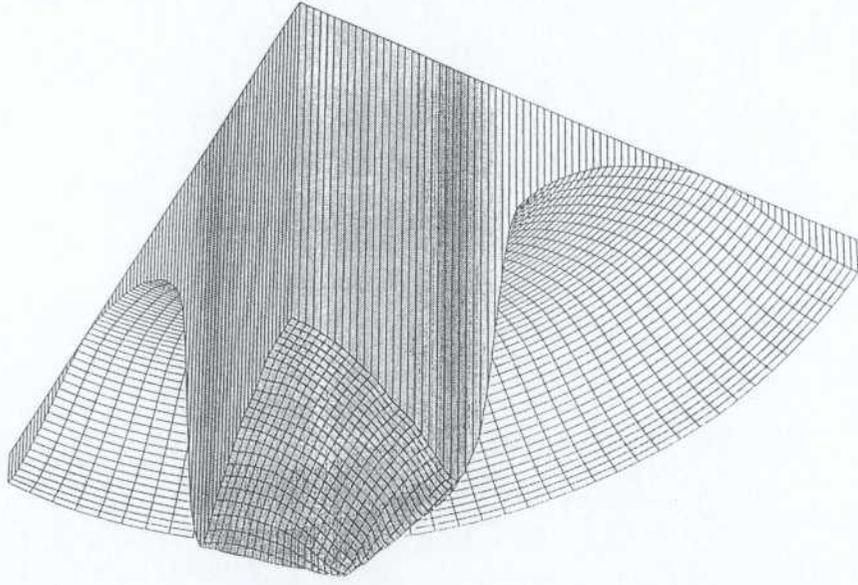
A B C D E F G H I J K L M N O

Fig. 22 - Iso Mach evolution

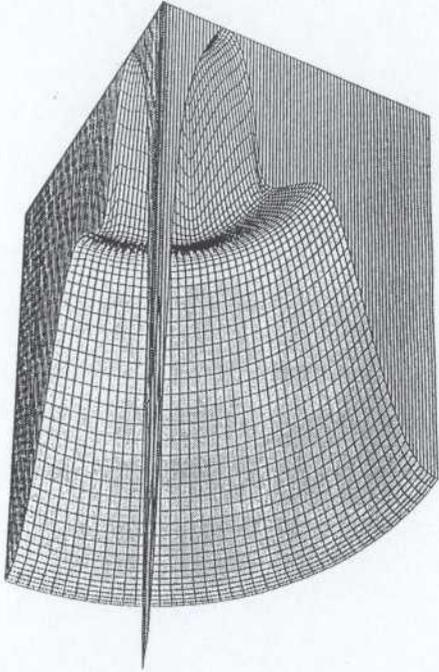
A 3.0  
 B 3.2  
 C 3.3  
 D 3.4  
 E 3.6  
 F 3.7  
 G 3.8  
 H 3.9  
 I 4.1  
 J 4.2  
 K 4.3  
 L 4.5  
 M 4.6  
 N 4.7



A 2.8  
 B 3.0  
 C 3.2  
 D 3.5  
 E 3.7  
 F 3.9  
 G 4.1  
 H 4.4  
 I 4.6  
 J 4.8  
 K 5.1  
 L 5.3  
 M 5.5  
 N 5.7



A 2.3  
 B 2.5  
 C 2.8  
 D 3.0  
 E 3.2  
 F 3.4  
 G 3.6  
 H 3.9  
 I 4.1  
 J 4.3  
 K 4.5  
 L 4.8  
 M 5.0  
 N 5.2



A 2.7  
 B 3.4  
 C 4.0  
 D 4.6  
 E 5.2  
 F 5.8  
 G 6.4  
 H 7.0  
 I 7.6  
 J 8.2  
 K 8.9  
 L 9.5  
 M 10.  
 N 11.





Step Mech3 test  $dx = dy = 1/40$  (4193 nodes).

### 2.3.4 Etude de gaz réels par solveur de RIEMANN

On considère un gaz type VAN DER WAALS défini par une loi d'état de la forme

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \quad (2.13)$$

pour simuler le comportement de la vapeur d'eau.

#### Planches 1,2,3 et 4

On a pris comme conditions initiales:

$$\rho = 5 \text{ kg/m}^3, P = 10^6 \text{ Pa}, T = 433.36 \text{ K}$$

( $\gamma = 1.329$  pour le gaz parfait) dans le domaine 1 et:

$$\rho = 2.5 \text{ kg/m}^3, P = 0.510^6 \text{ Pa}, T = 433.36 \text{ K}$$

dans le second domaine.

Le maillage est constitué de 100 mailles identiques. Dans notre cas, pour le gaz de Van Der Waals,

$$a = 1684.54, b = 1.69210^{-3}, r = 461.5, C_V = 1401.88$$

Dans le cas considéré, le schéma gaz parfait et le schéma gaz de Van der Waals donnent les mêmes résultats.

Pour information,  $\alpha$  et  $\gamma$  sont donnés sur la planche 2: on voit qu'ils varient très faiblement. On rappelle qu'ils sont définis par

$$\begin{cases} \alpha = 1 + \frac{P}{\rho E} \\ \gamma = \frac{\rho c^2}{P} \end{cases} \quad (2.14)$$

Sur les planches 3 et 4, on a pris des volumes plus proches du volume critique et l'on voit apparaître des différences sensibles de comportement.

Pour le gaz de Van Der Waals, le palier de pression est plus bas. Les paliers de densité sont moins hauts. L'onde de choc va moins vite que l'onde de détente. On peut penser que cela est associé à la réalité des gaz. Sur la planche 4, sont présentées les valeurs de  $\alpha$  et  $\gamma$ . On voit que  $\alpha$  est plus grand après le choc et que  $\gamma$  est plus petit après la détente.

Sur le schéma des isothermes:

B l'état stationnaire 1

C l'état intermédiaire 2

D l' état droit.

Ces trois états sont dans la phase gazeuse, les conditions initiales:

$$\rho = 200\text{kg/m}^3 \quad P = 3510^6\text{Pa}$$

$$\rho = 117\text{kg/m}^3 \quad P = 19.510^6\text{Pa}$$

#### Planches 5 et 6

Dans cette étude, on a pris un volume plus petit que le volume critique pour l' un des tubes:

$$\rho = 250\text{kg/m}^3 \quad P = 35966778\text{Pa}$$

$$\rho = 166.6\text{kg/m}^3 \quad P = 27114795\text{Pa}$$

Les mêmes remarques faites être faites que pour les planches précédentes mais les différences sont accentuées.

#### Planches 7-8 et 9

On présente ici un cas où le schéma a du mal à converger , l' état intermédiaire 1 se trouvant dans la zone critique à la frontière entre la phase liquide et la phase gazeuse.

On peut noter qu 'en raffinant le maillage le résultat converge.

$$\rho = 333\text{kg/m}^3 \quad P = 55011358\text{Pa}$$

$$\rho = 111\text{kg/m}^3 \quad P = 21770768\text{Pa}$$

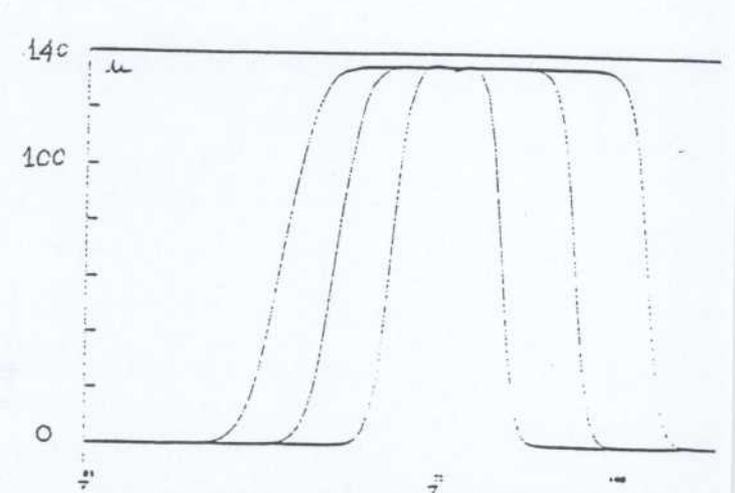
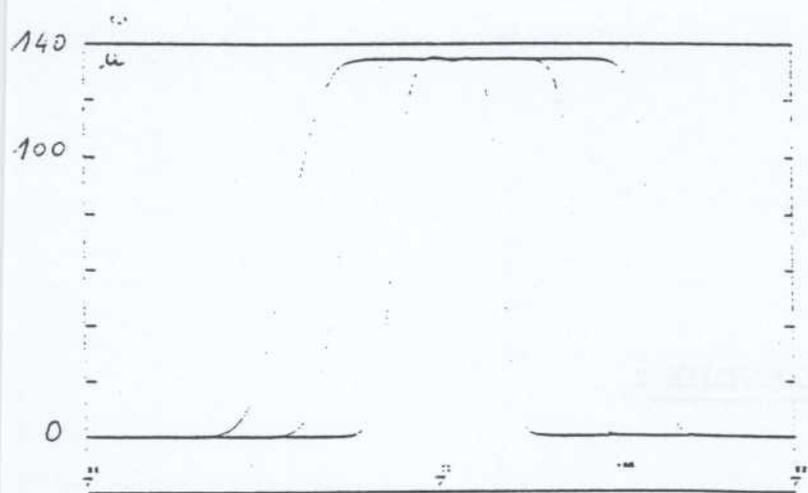
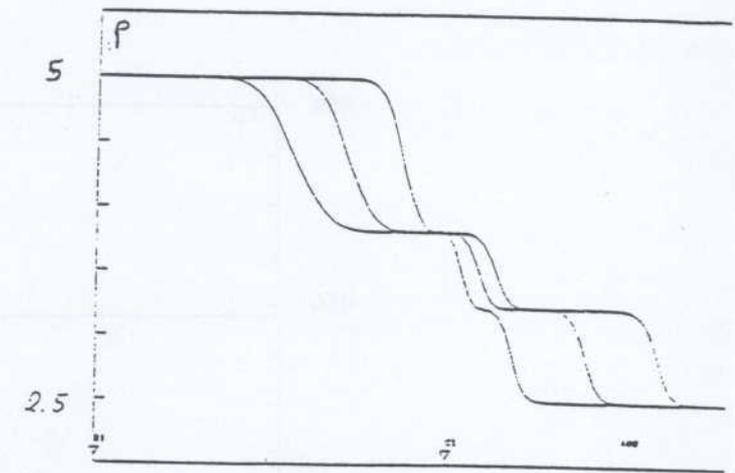
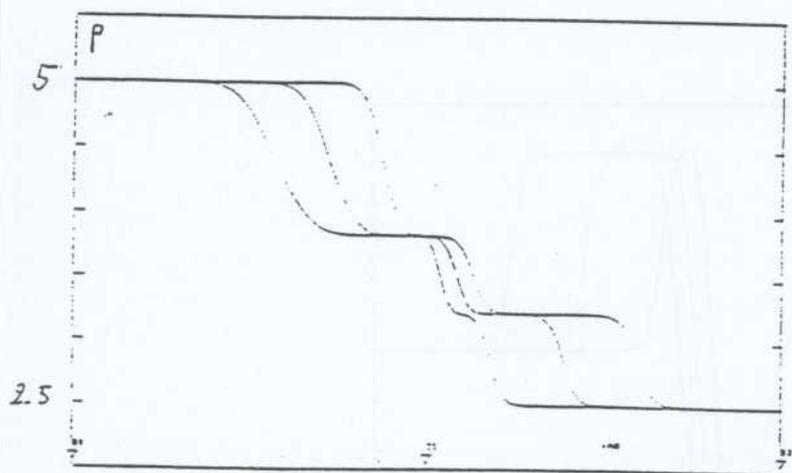
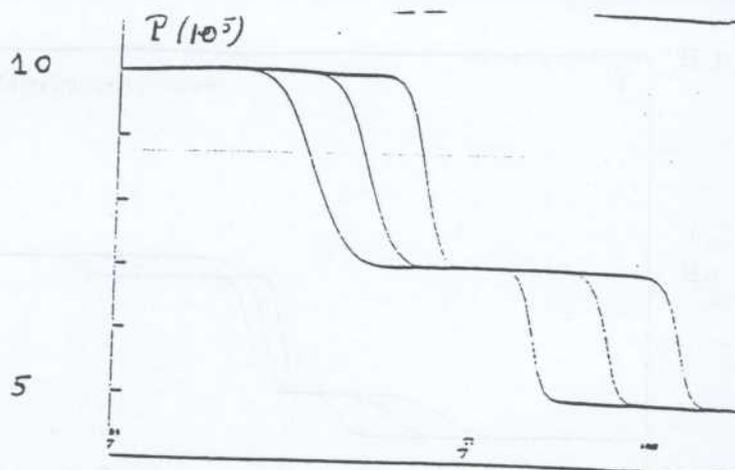
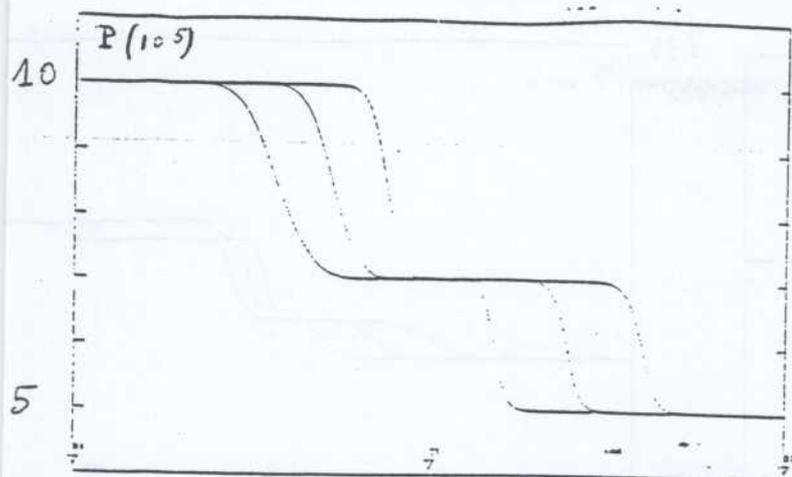
#### Planches 10 et 11

Cette fois, l' état intermédiaire 1 est dans la phase liquide .On compare la pression et la densité avec 100 et 1000 mailles. Dans ce cas , même pour le maillage le plus fin, il reste des fortes oscillations sur la pression qui s' atténuent lorsque le temps croit.

Les conditions initiales sont:

$$\rho = 333\text{kg/m}^3 \quad P = 37311358\text{Pa}$$

$$\rho = 111\text{kg/m}^3 \quad P = 21770768\text{Pa}$$



EAU TRAITEE en gaz  
parfait  
TCPU = 95.67 sec

EAU TRAITEE en gaz de  
VAN DER WAALS  
TCPU = 136.33 sec

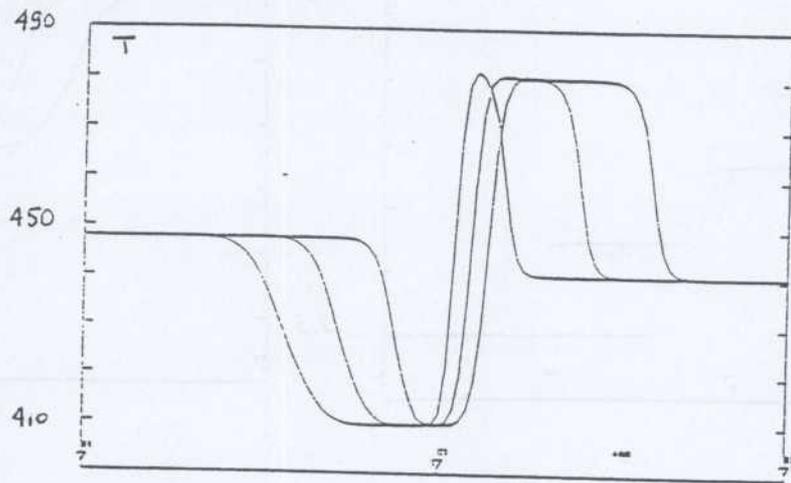
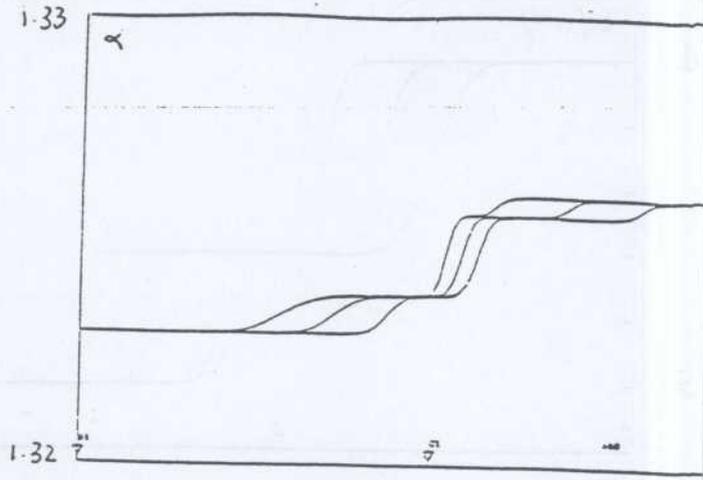
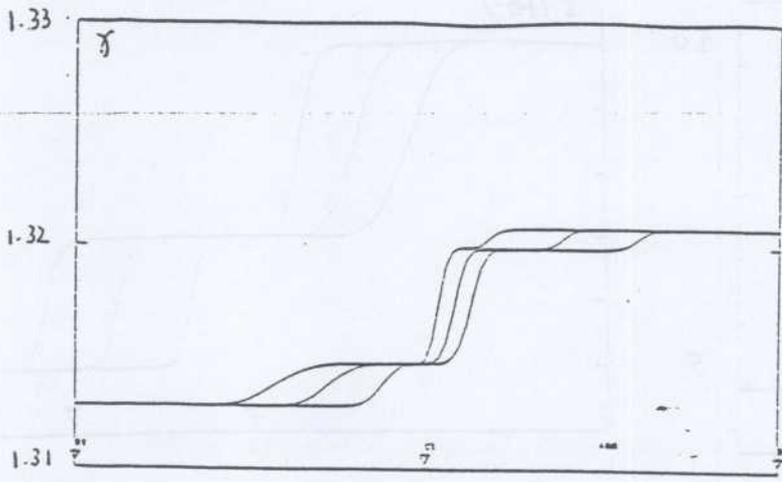
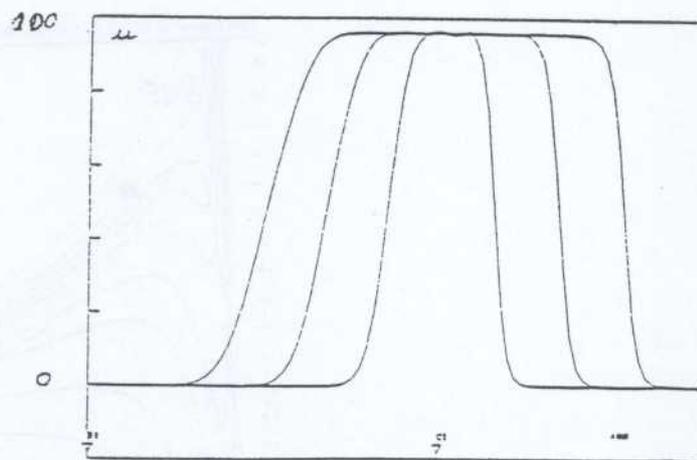
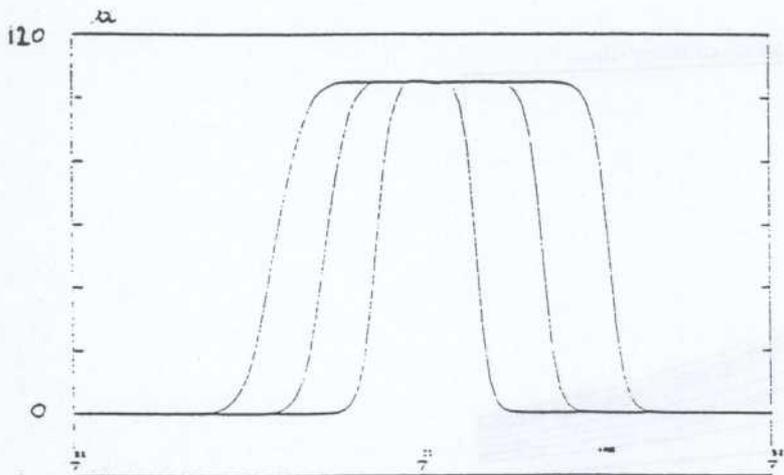
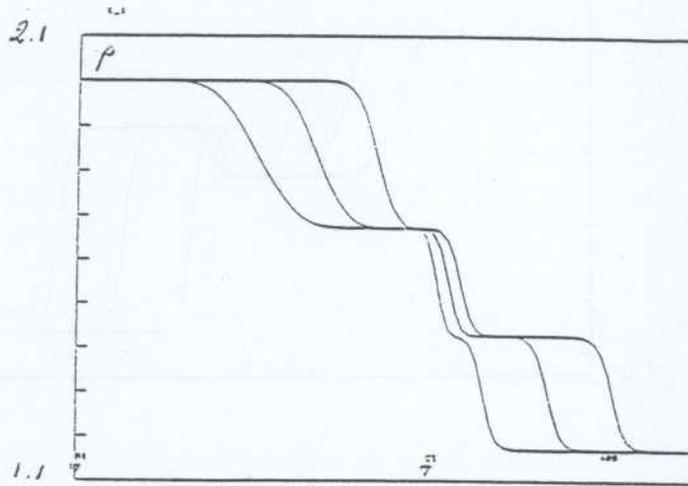
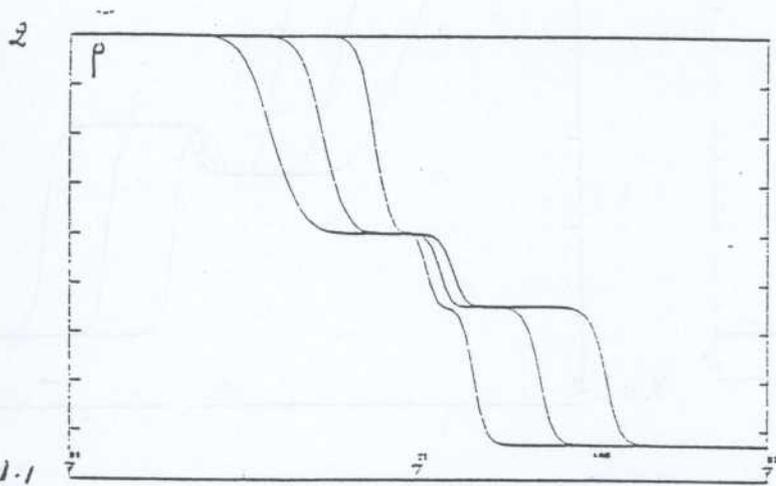
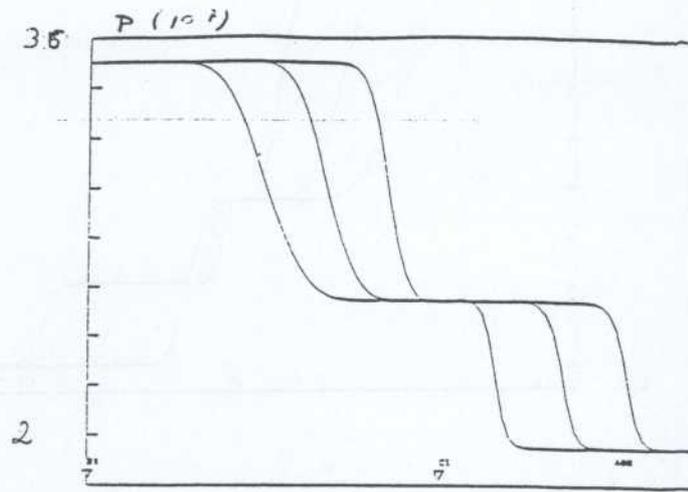
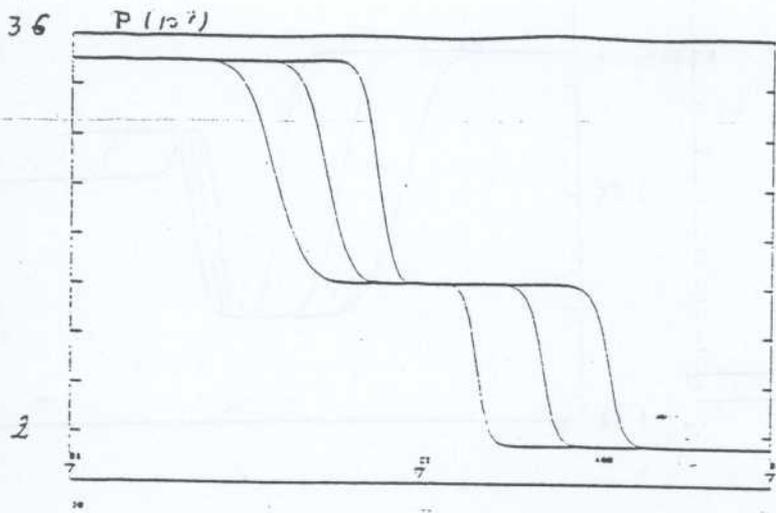


PLANCHE 2



VAPEUR D'EAU TRAITÉE en gaz  
parfait  
TCPU = 98.06 sec

VAPEUR D'EAU TRAITÉE en gaz  
de VAN DER WAALS  
TCPU = 137.92 sec

PLANCHE 3

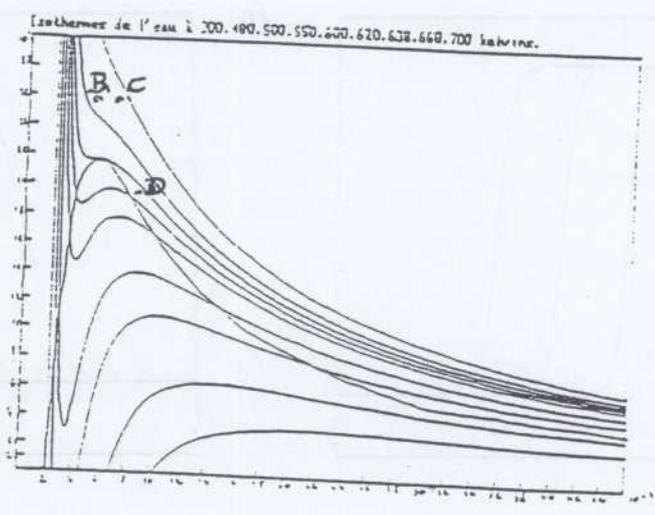
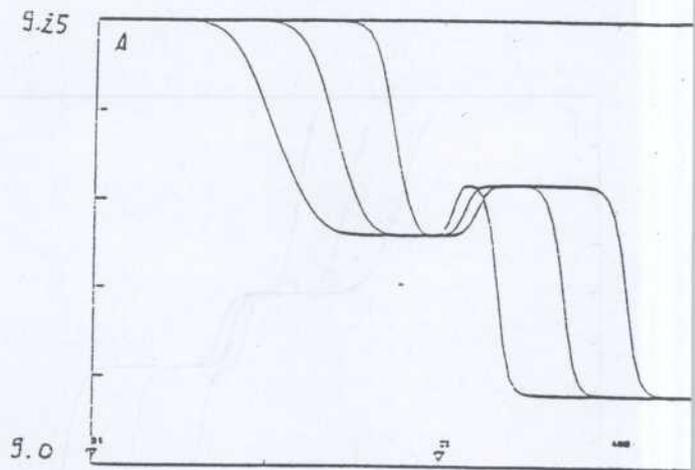
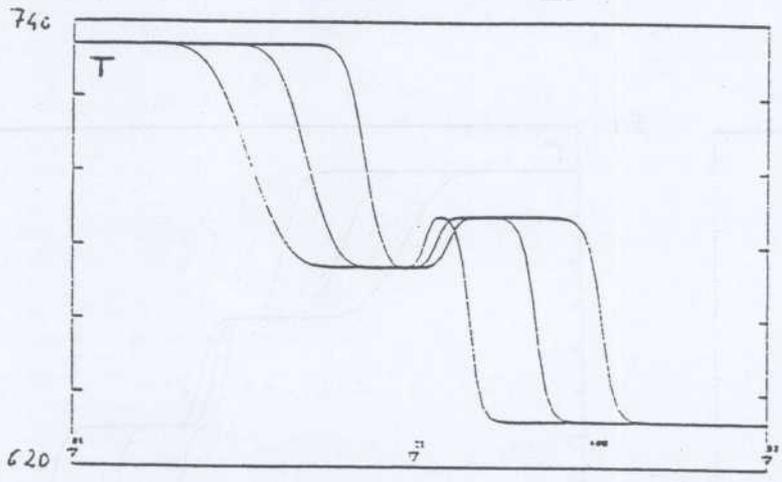
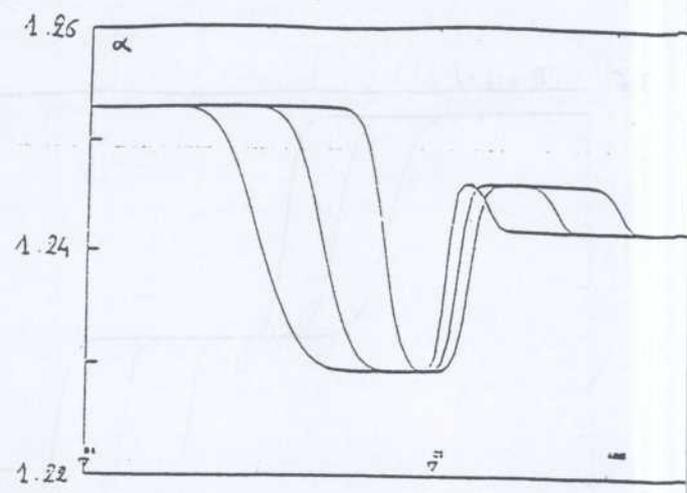
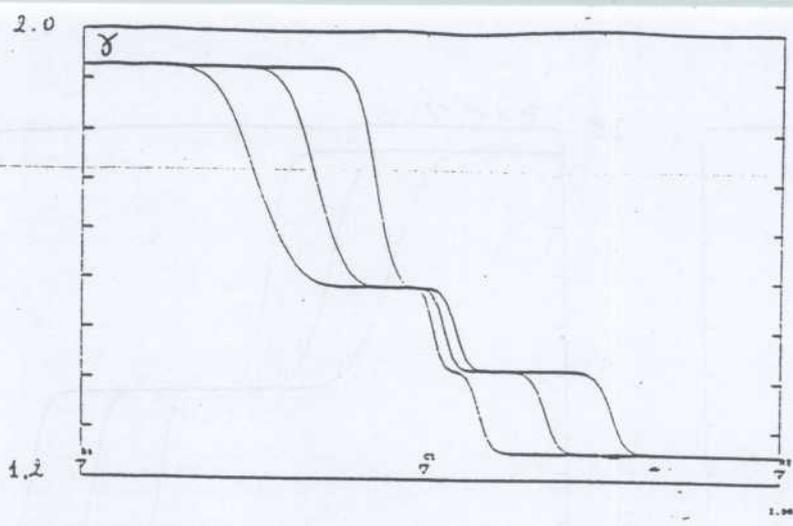
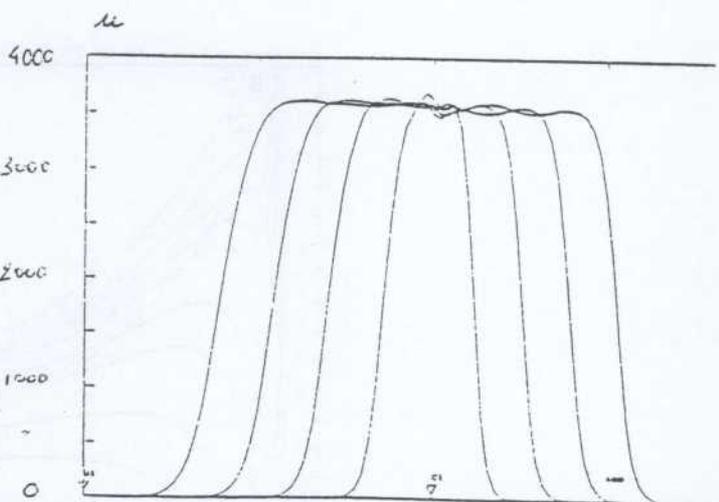
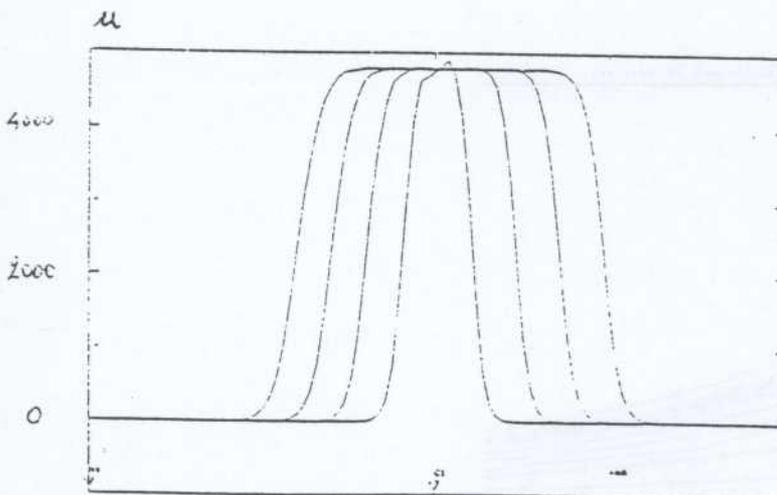
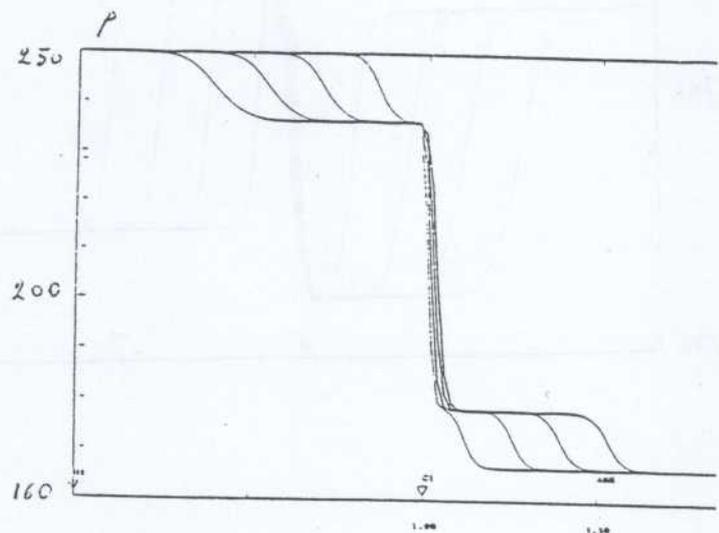
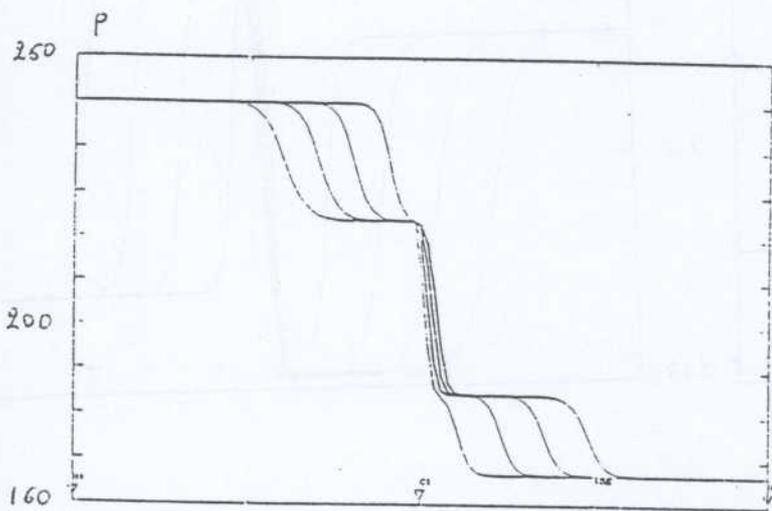
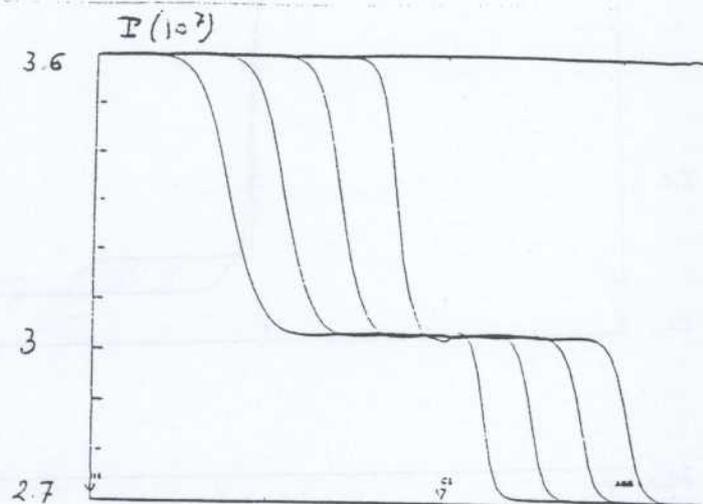
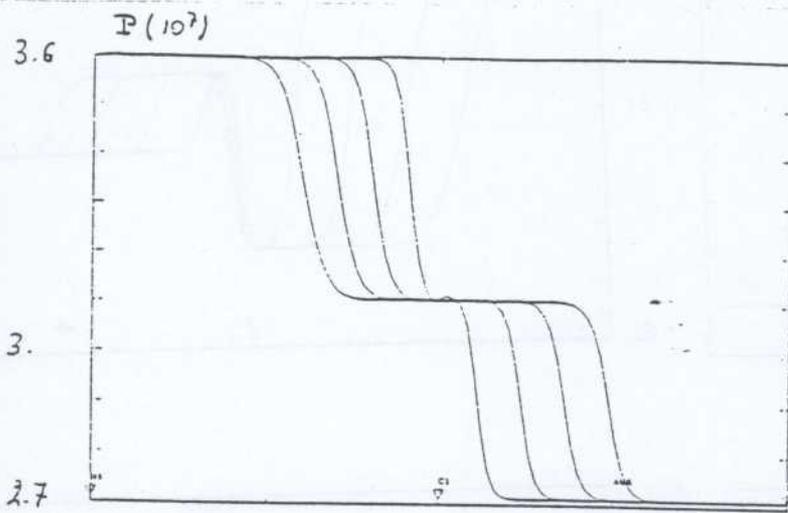


PLANCHE 4



EAU TRAITÉE en gaz parfait

EAU TRAITÉE en gaz de VAN DER WAALS

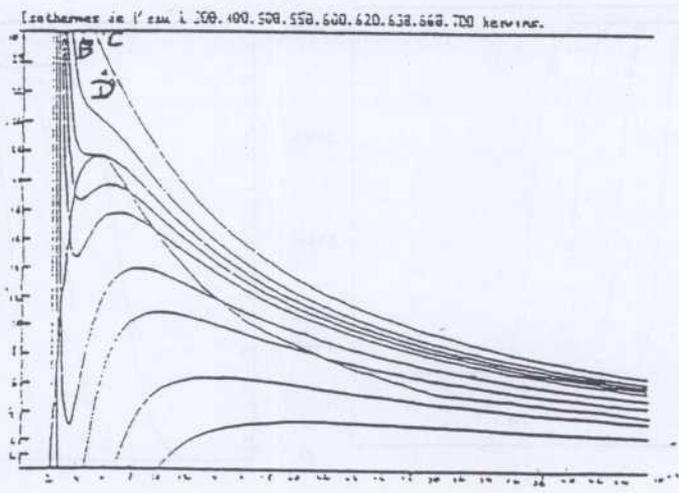
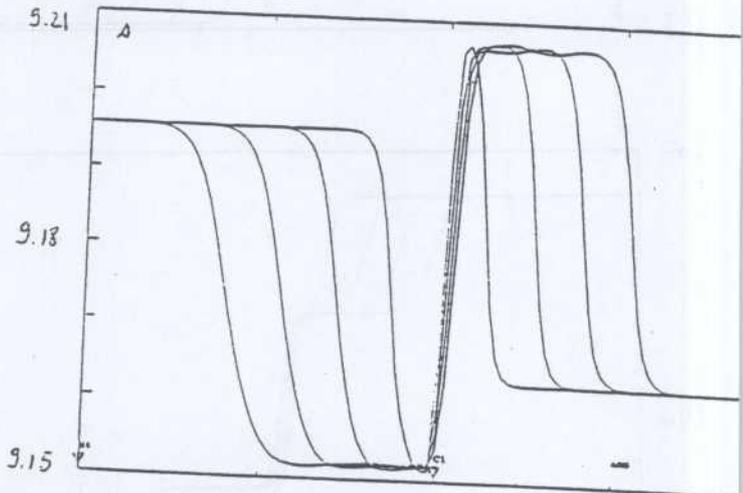
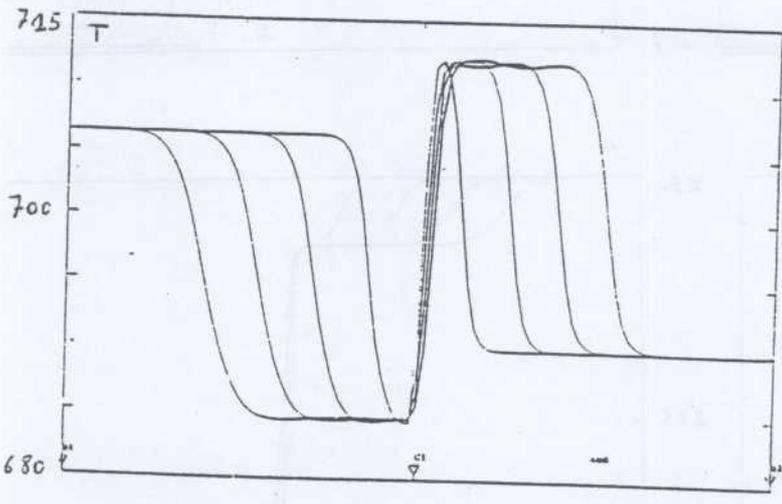
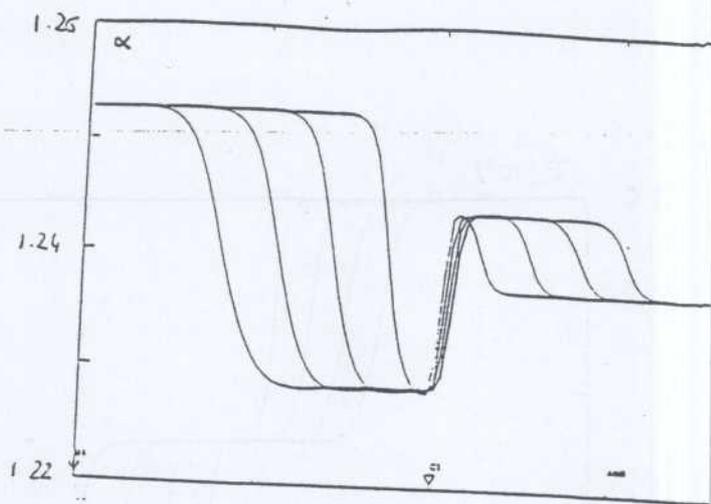
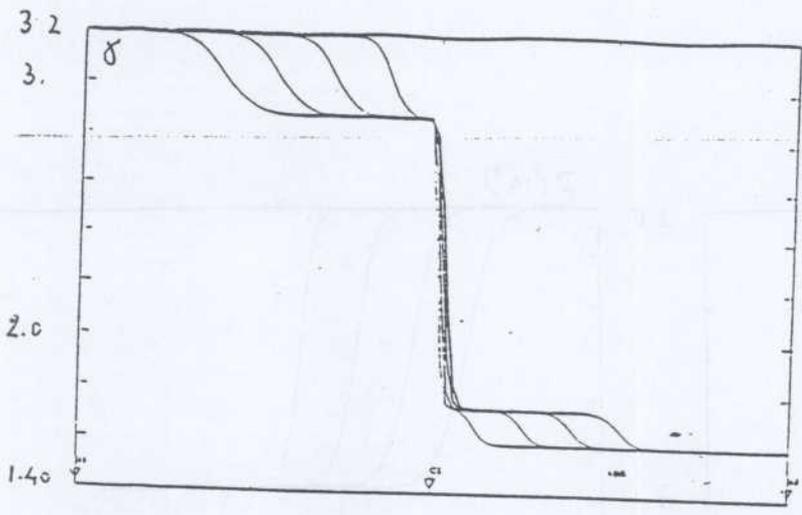
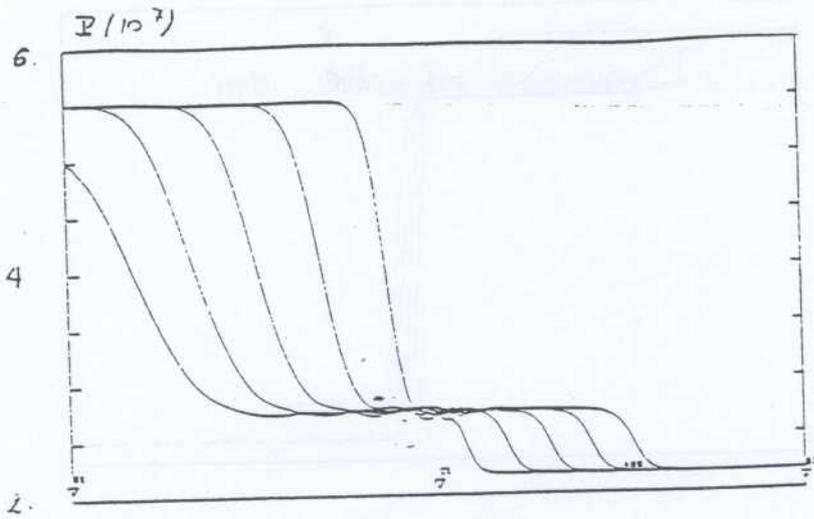
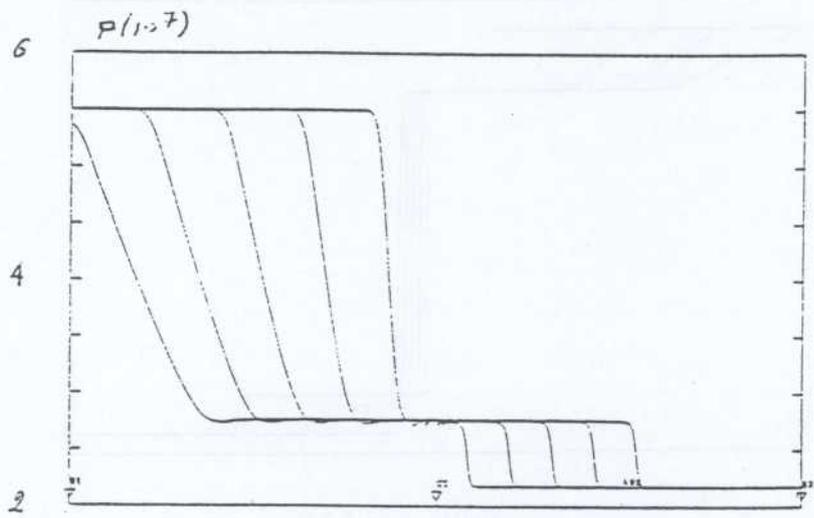


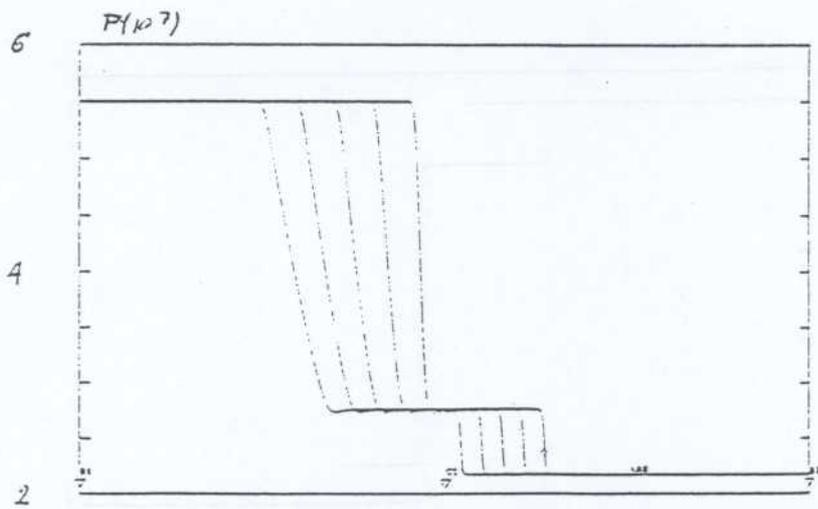
PLANCHE 6



100 mailles

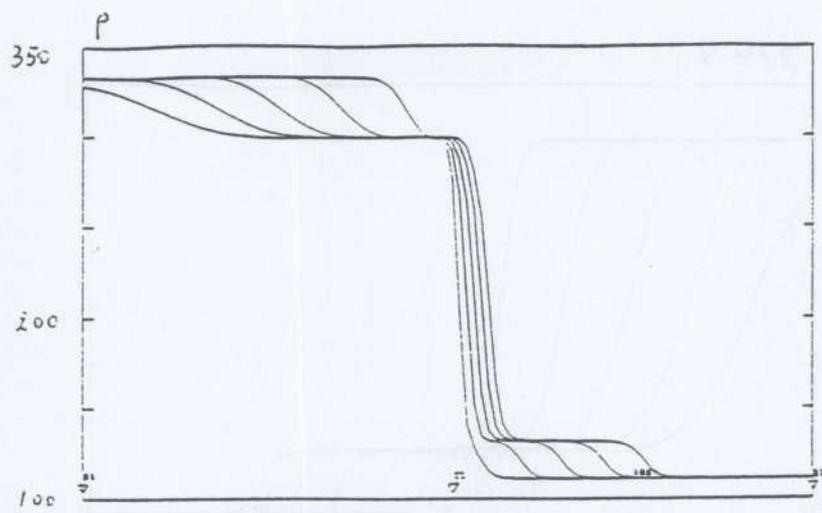


500 mailles

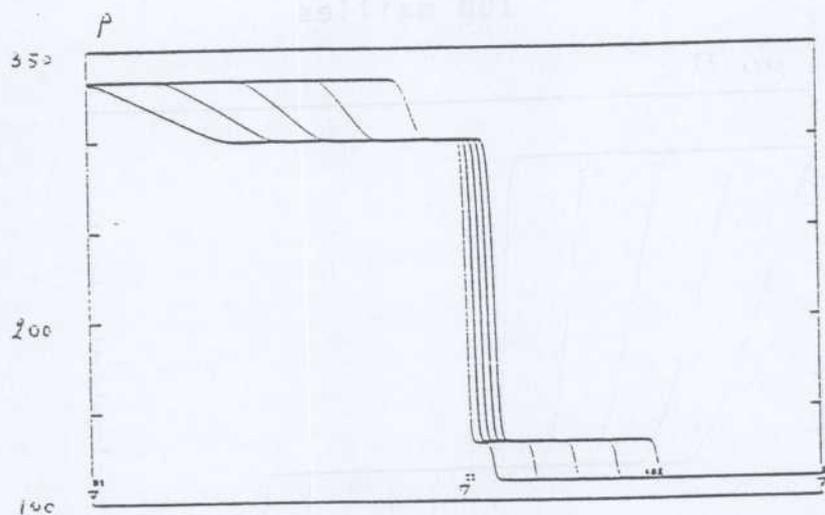


1000 mailles

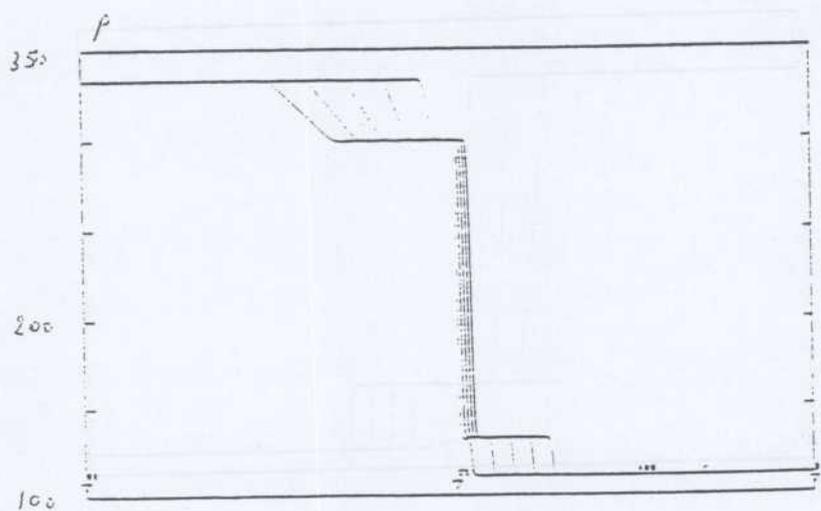
PLANCHE 7



100 mailles



500 mailles



Mille mailles TCPU 1315 sec.

PLANCHE 8

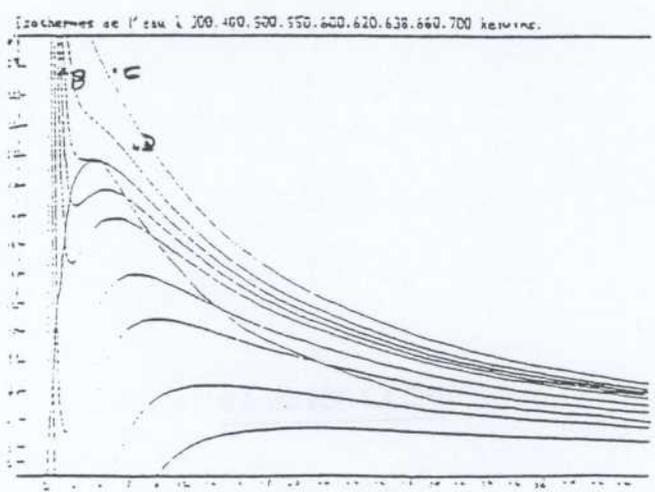
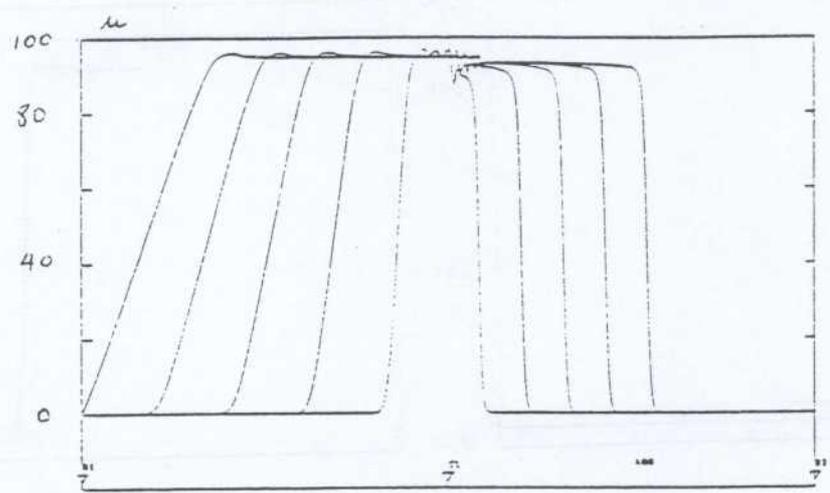
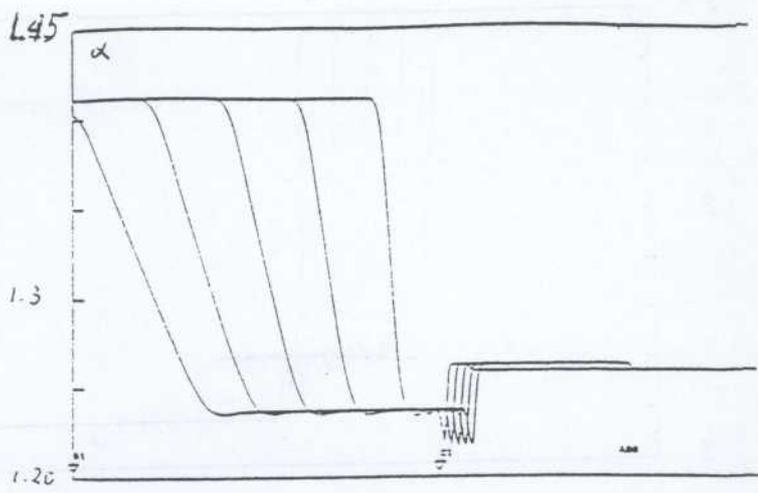
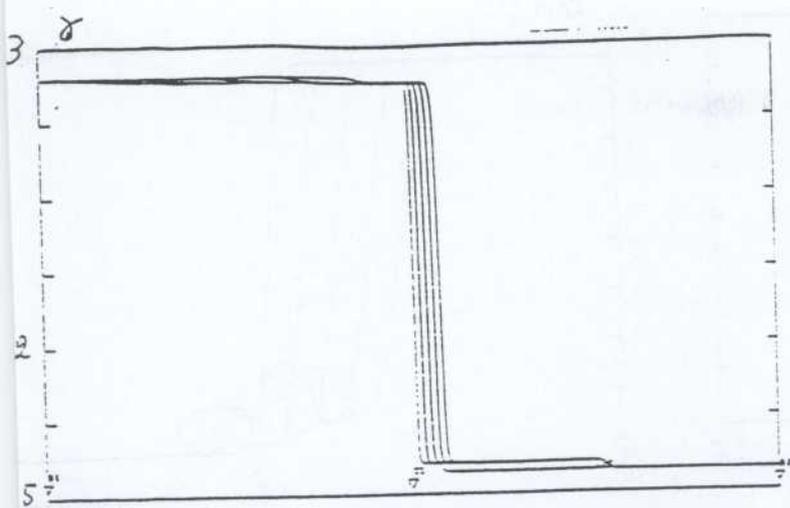


PLANCHE 9

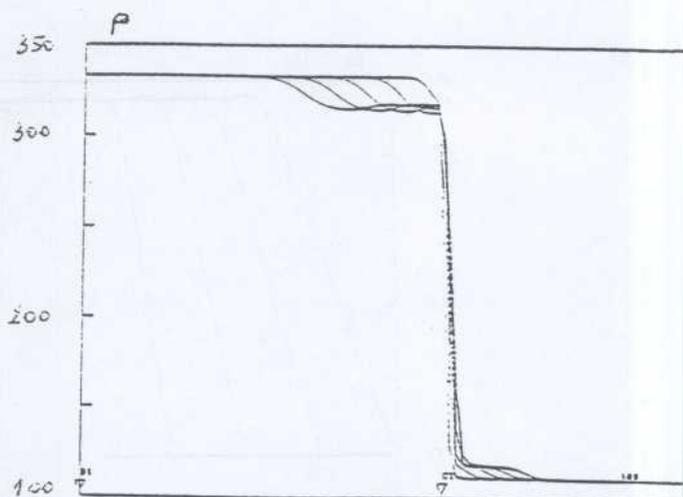
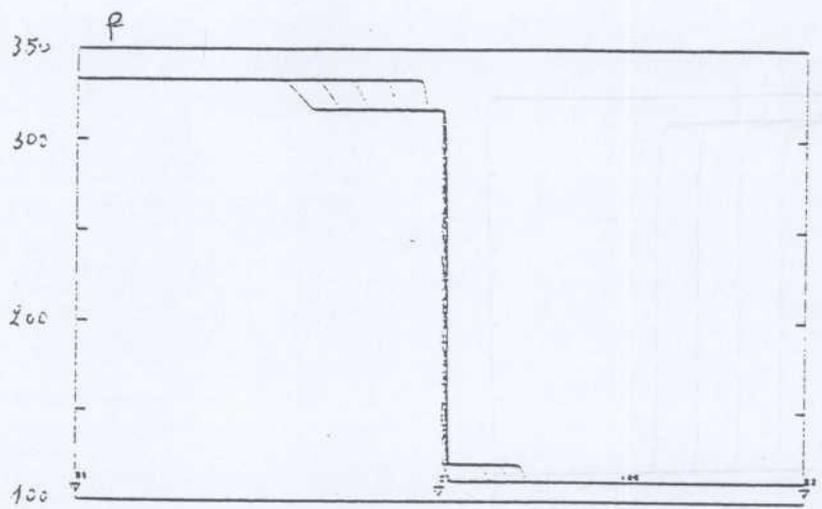
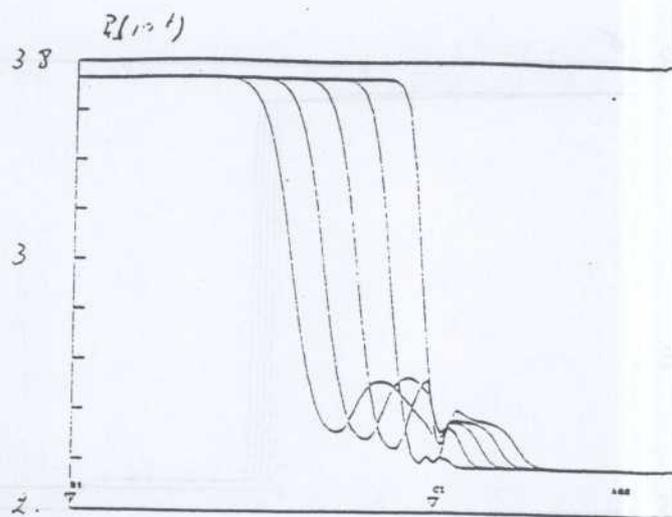
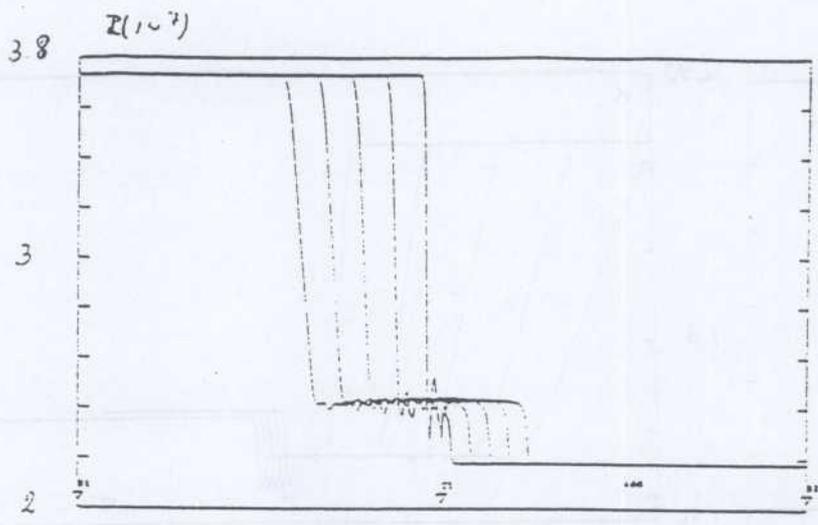


PLANCHE 10

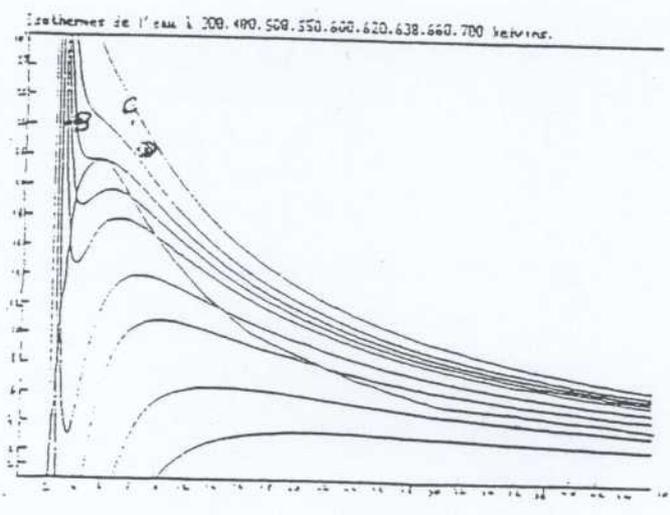
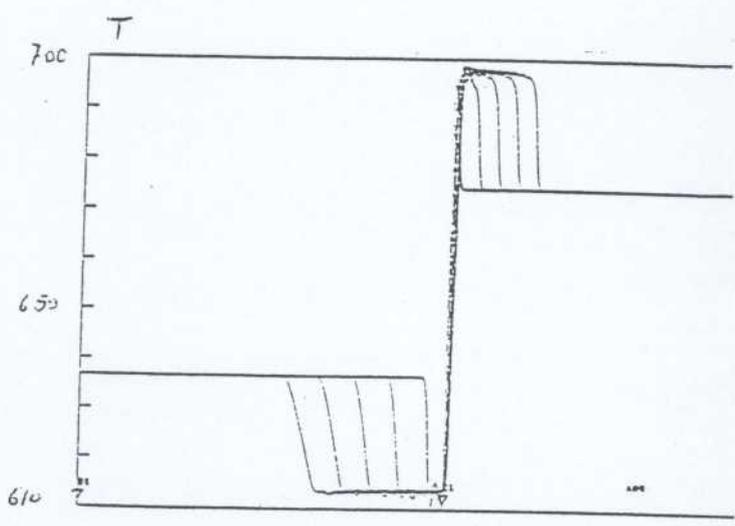
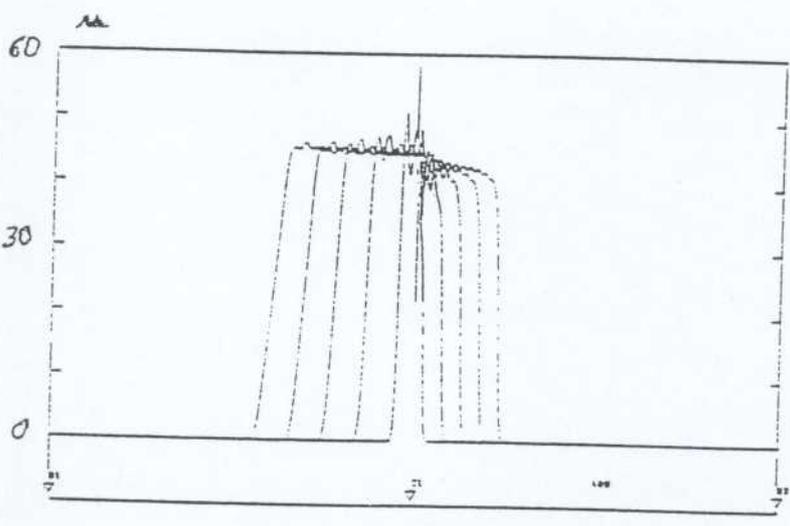
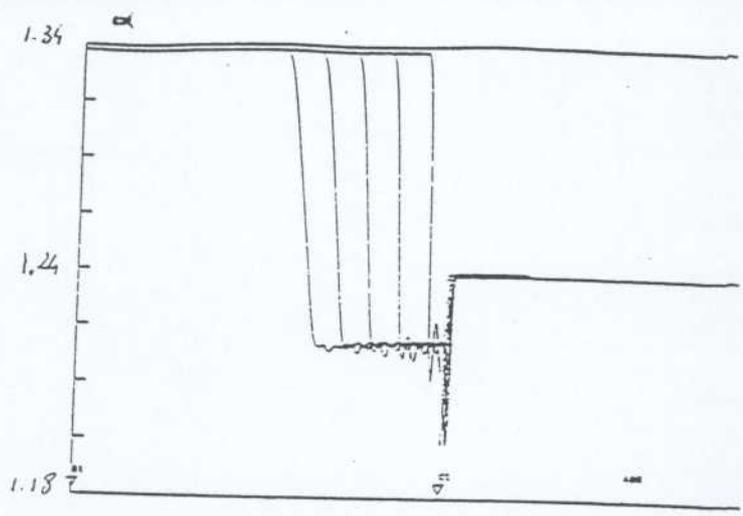
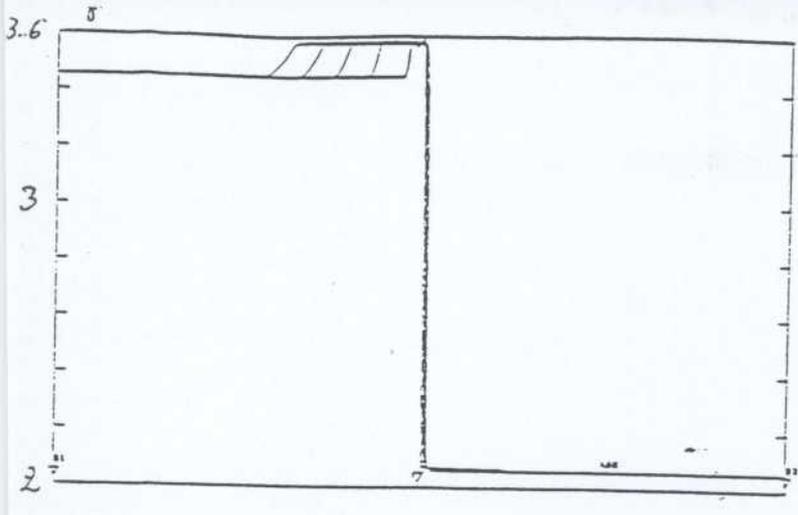


PLANCHE 11

## Chapitre 3

# Etudes compressibles avec réaction chimique

### 3.1 Etude Lagrangienne

Il s'agit de résultats concernant la propagation d'ondes chimiques liées à la détonation hydrogène dans une géométrie confinée.

#### 3.1.1 Calculs monodimensionnels

Dans le cadre 1D, la théorie des ondes de choc peut être appliquée qui permet de calculer dans le cas de fortes propagations la réflexion à une paroi. Soit  $P_1$  la pression en aval de l'onde et  $P_2$  celle en aval. Si on appelle  $P_3$  celle obtenue après réflexion, on obtient :

$$P_3 = P_2 \frac{5\gamma_2 + 1 + \sqrt{17\gamma_2^2 + 2\gamma_2 + 1}}{4\gamma_2} \quad (3.1)$$

où  $\gamma_2$  est le coefficient polytropique après réaction.

Pour variation de  $\gamma_2$  de 1 à  $+\infty$ , le quotient  $\frac{P_3}{P_2}$  varie de 2.6 à 2.3, soit si  $\gamma_2 \simeq 1.6$ ,

$$\frac{P_3}{P_2} \simeq 2.54.$$

Le calcul représente la propagation d'une onde de détonation dans un tube fermé où la détonation est amorcée à une extrémité dans une maille.

Les figures 1 montrent la propagation dans le tube et on peut noter que dans ce cas, pour une température initiale  $T_0 \simeq 326K$ ,  $P_0 \simeq 1.63$  bar et une température seuil  $T_s = 342K$  soit 169C, on observe que la pression de CHAPMANN  $P_\infty \simeq 20$ bars et que la pression  $P_1$  définissant la pression initiatrice est  $\simeq 9$  bars ce qui donne comme rapport  $\frac{P_1}{P_\infty} \simeq 2.22$  ce qui correspond à la valeur théorique

attendu de 2.17. De plus, à la réflexion  $P_3 \simeq 51$  bar et donc  $P_3/P_2 \simeq 2.55$ , en accord avec le calcul analytique.

Les figures 2 représentent l'allure de l'onde en 5 points donnés du tube pour deux allers et retours de l'onde de détonation. Il est à noter un très fort amortissement ( le point 1 est le point initiateur, le point 50 le point médian et le point 100 l'autre extrémité).

### 3.1.2 Calculs axisymétriques

Les mêmes paramètres ont été choisis que dans le cas monodimensionnels. On suppose donc qu'un cylindre est initié à la détonation, lui-même contenu dans un cylindre de rayon 100 fois plus grand.

La propagation de l'onde présente de pics cohérents avec les résultats de la littérature.

Les figures 3 présentent le profil à différents instants de l'onde.

Les figures 4 traduisent elles l'historique de la pression en différents points ; il est à noter que les points à l'extérieur de l'axe ont un profil semblable au cas monodimensionnel, par contre le point sur l'axe n'a pas du tout le même profil que dans le cas monodimensionnel. Les réflexions sur l'axe sont donc plus importantes que la propagation de l'onde de détonation elle-même. Les définitions des points sont les mêmes que dans le cas plan.

## 3.2 Calculs bidimensionnels

Afin d'effectuer un calcul plus réaliste, un algorithme lagrangien a été développé en éléments finis. La position de la source joue un rôle fondamental.

Le maillage est représenté en figure 5 et l'historique des pressions à la paroi dans le cas où la source est sur l'axe à la base puis au milieu de la géométrie sont respectivement présentés en figure 6 et 7.

La figure 8 trace l'évolution de l'onde de détonation en cas d'initiation au centre. Si les points situés sur la paroi subissent la même évolution, par contre au sommet une différence importante est à noter. Il y a un facteur d'environ 2.5 entre les maxima dans les deux cas. Cela peut s'interpréter comme un effet de souffle lié à des considérations géométriques.

Une seconde étude a donc été entreprise en mettant en contact un milieu détonant situé dans la partie supérieure de la géométrie et un milieu inerte dans la partie basse. On suppose que la source de détonation est située à la base de la zone détonante afin de se placer dans des configurations pessimistes à la lumière de l'étude précédente.

La figure 10 présente le maillage associé et la figure 11 l'historique de la pression aux mêmes points que dans le calcul précédent.

Les figures 12 montrent la propagation de l'onde et les figures 13 les déformées du maillage.

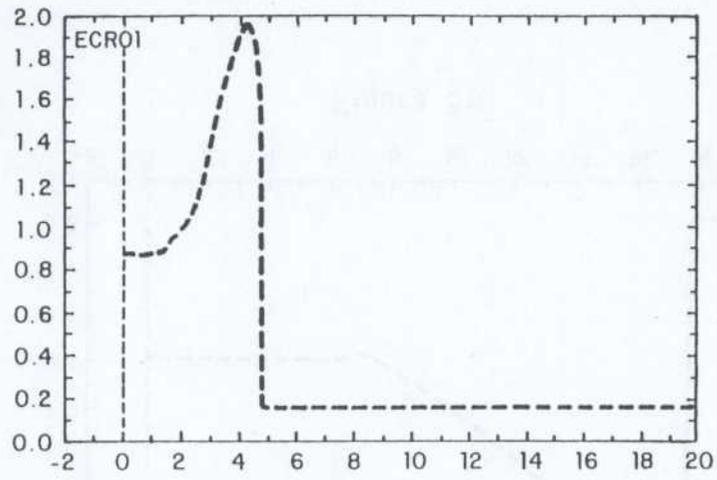


Figure 1a

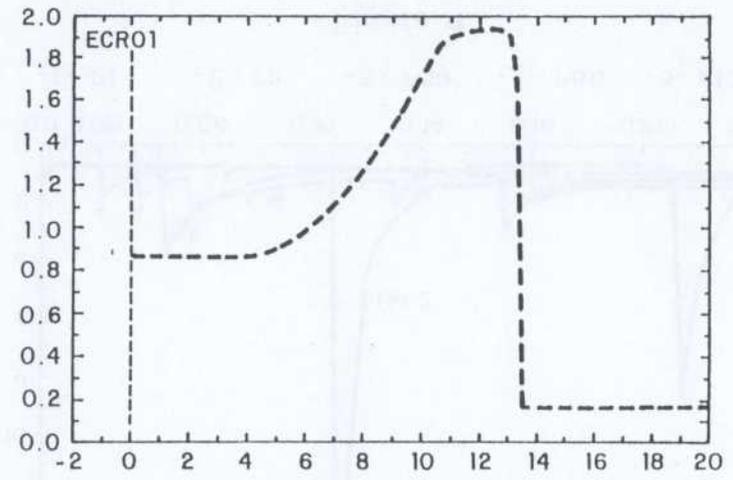


Figure 1b

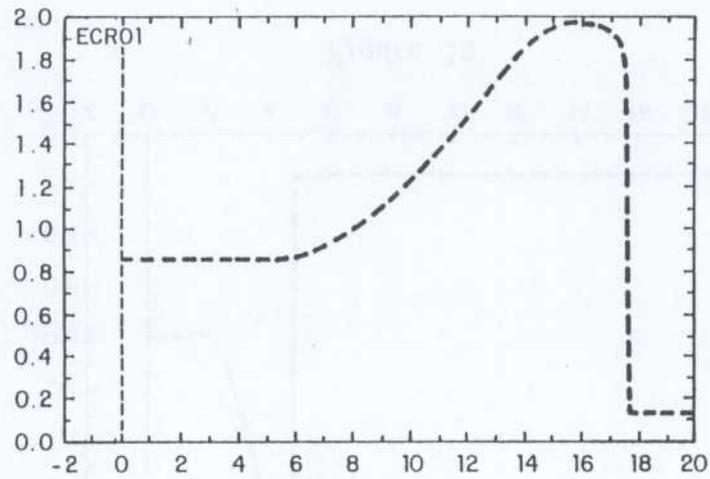


Figure 1c

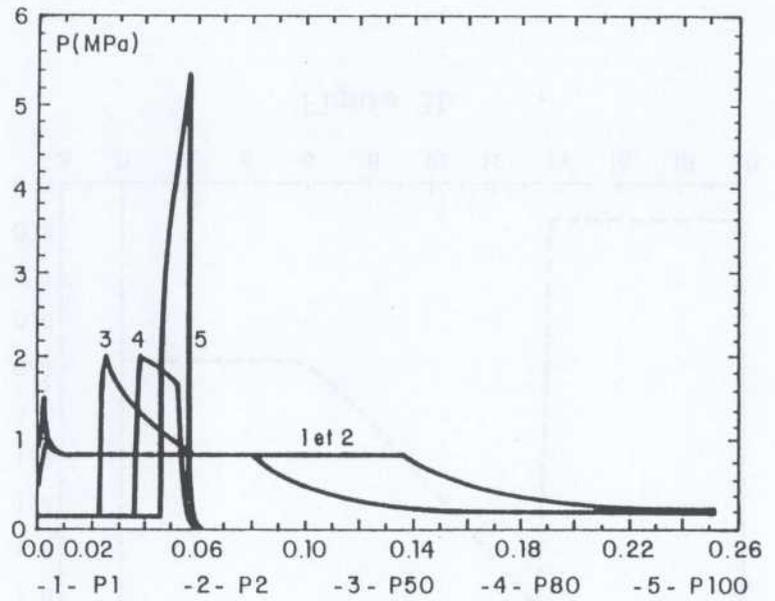


Figure 2

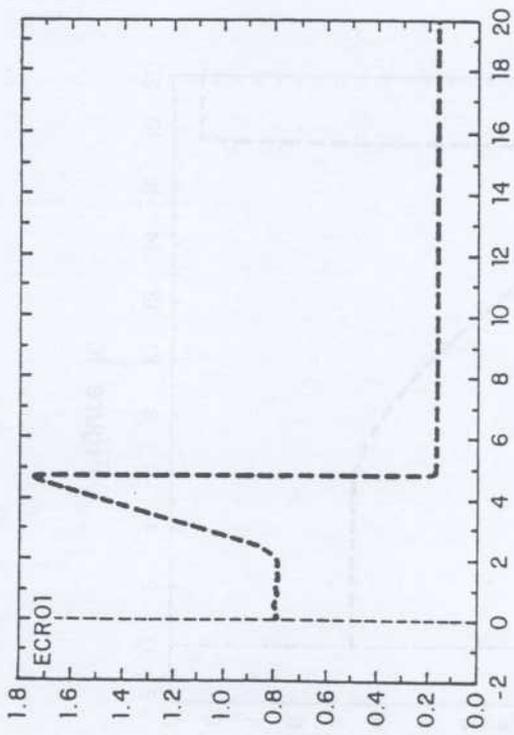


Figure 3a

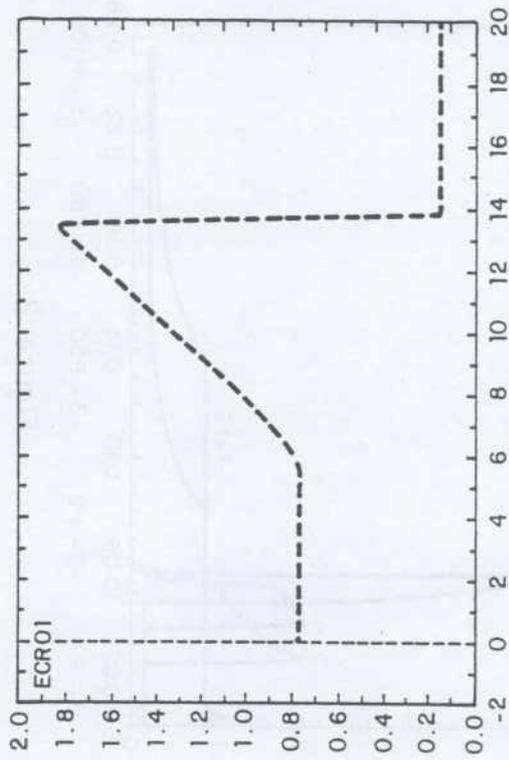


Figure 3b

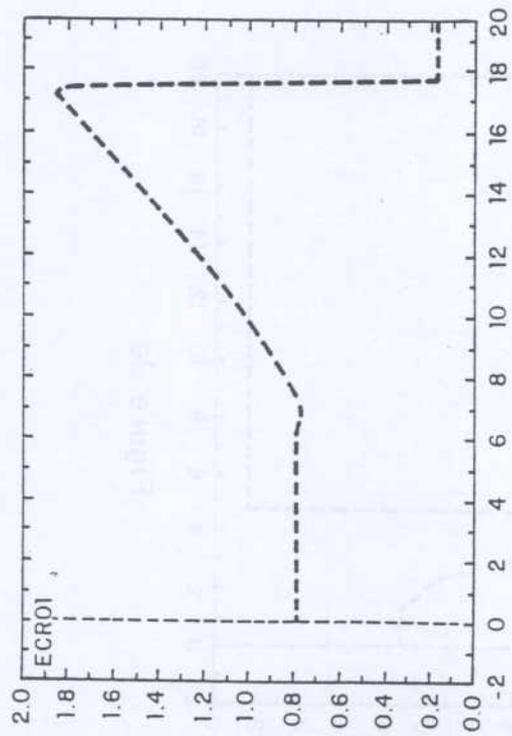


Figure 3c

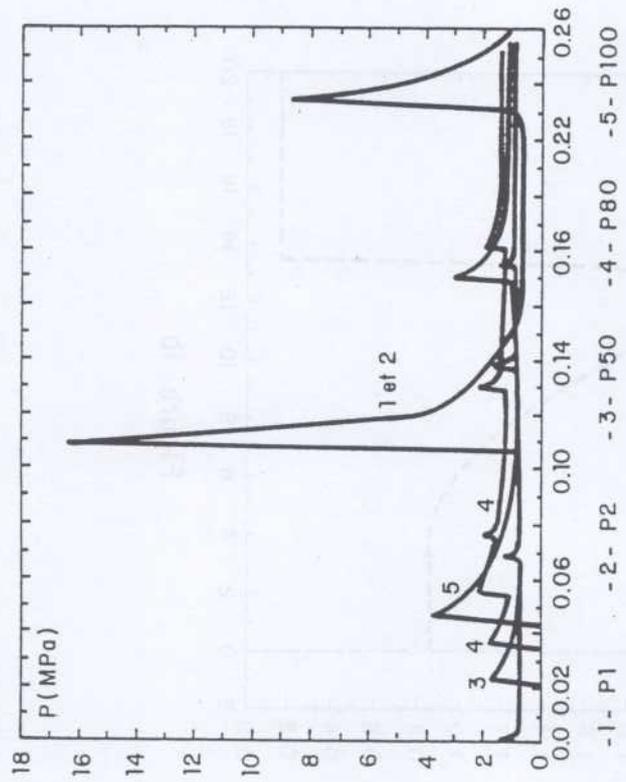


Figure 4

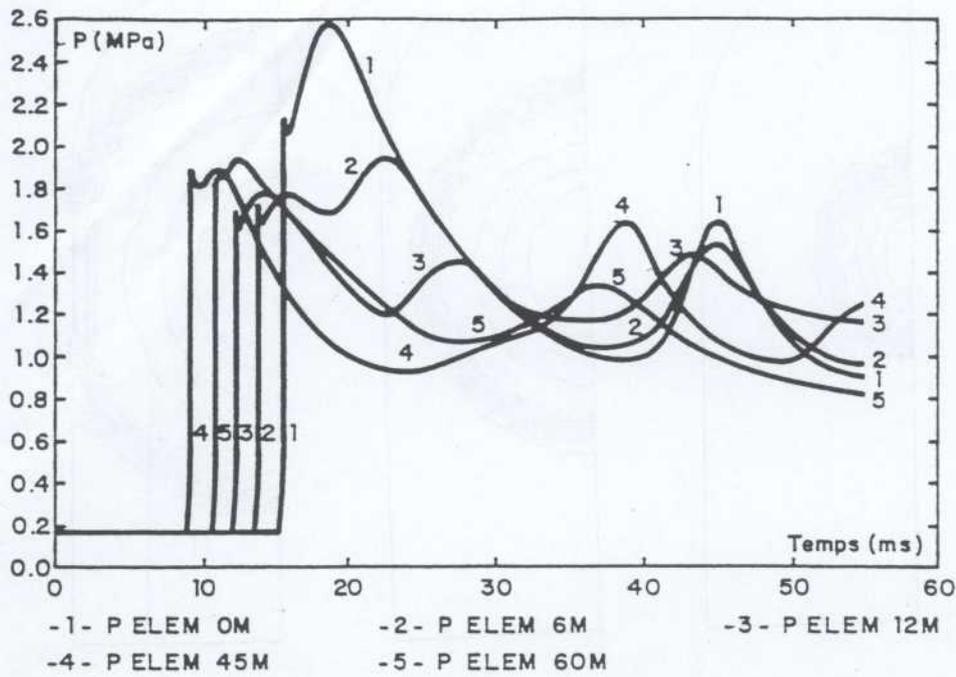


Figure 6 - Détonation d' $H_2$  dans l'enceinte (source à 35M).

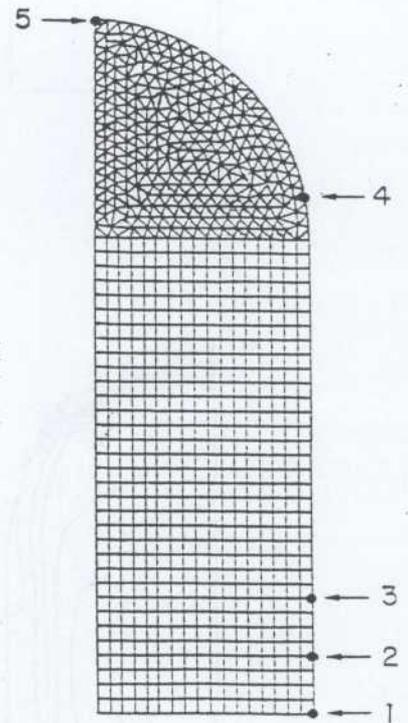


Figure 5

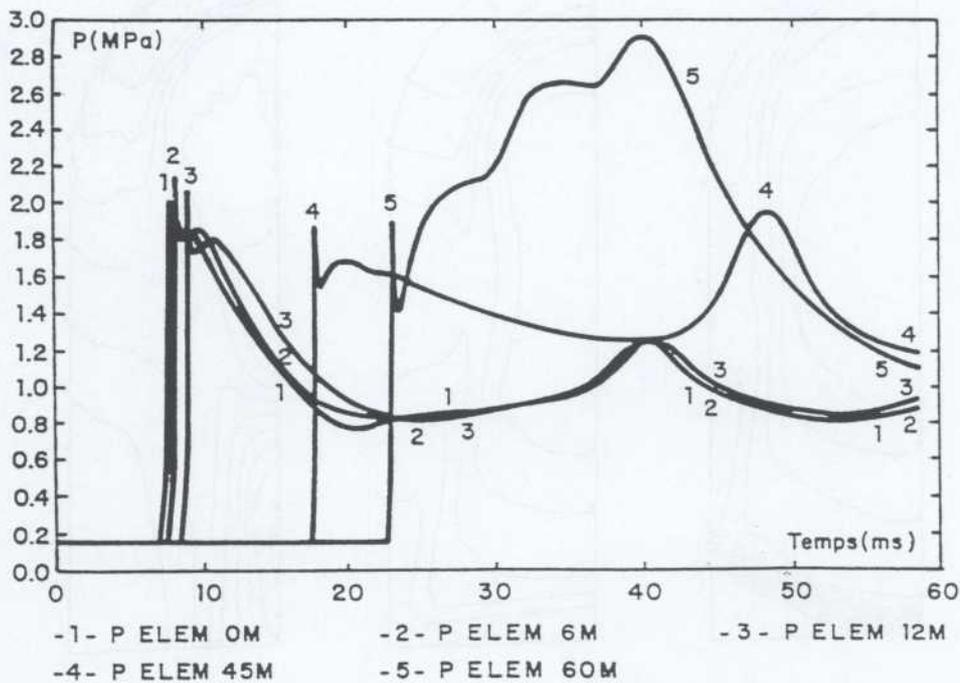


Figure 7 - Détonation  $H_2$  enceinte initiation à la base.

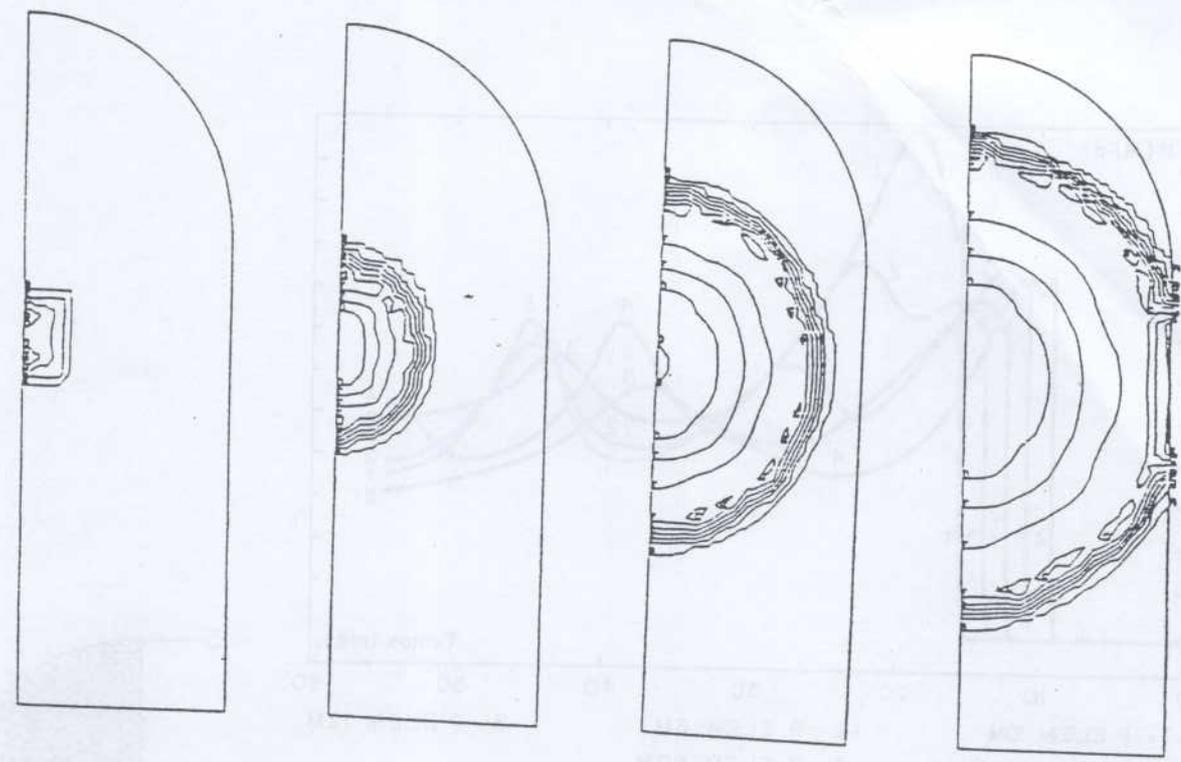


Figure 6. Distortion of the disturbance (source 5.5M)

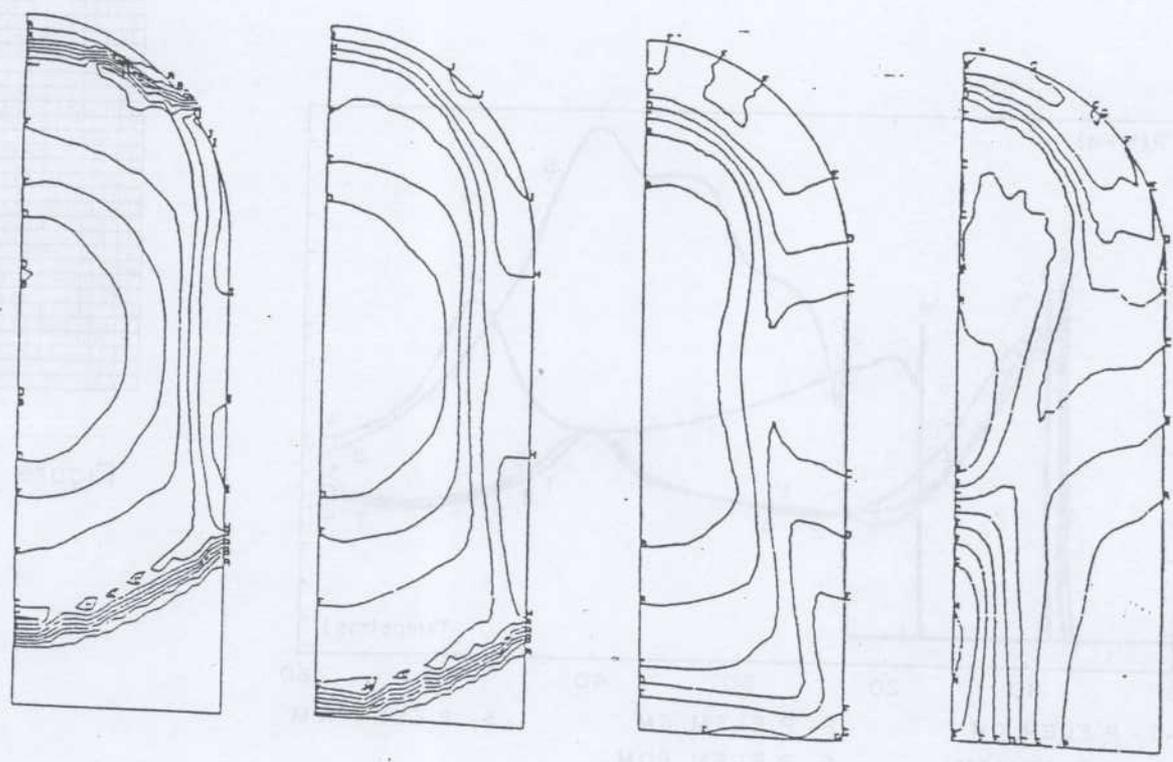


Figure 7. Distortion of the disturbance (source 5.5M)

Figure 8

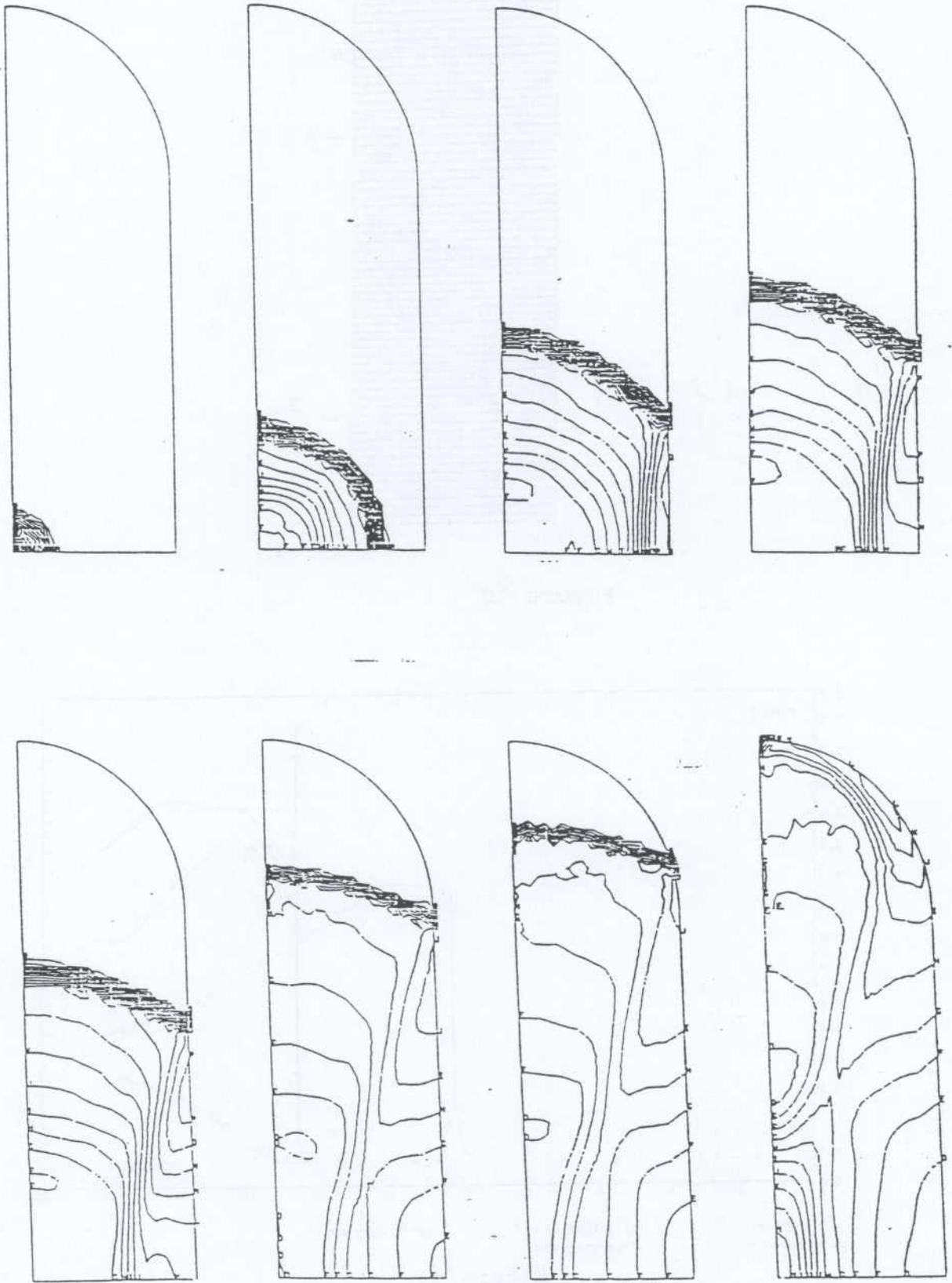


Figure 9

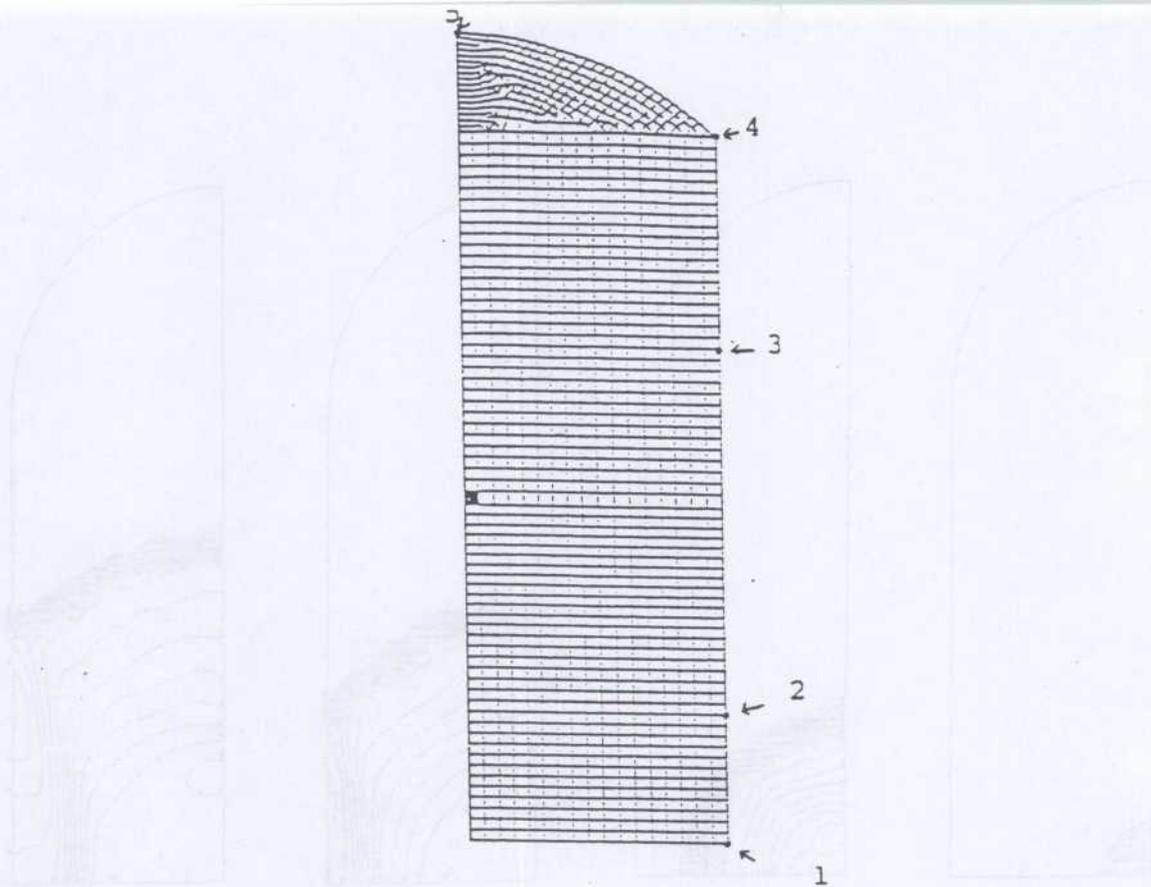


Figure 10

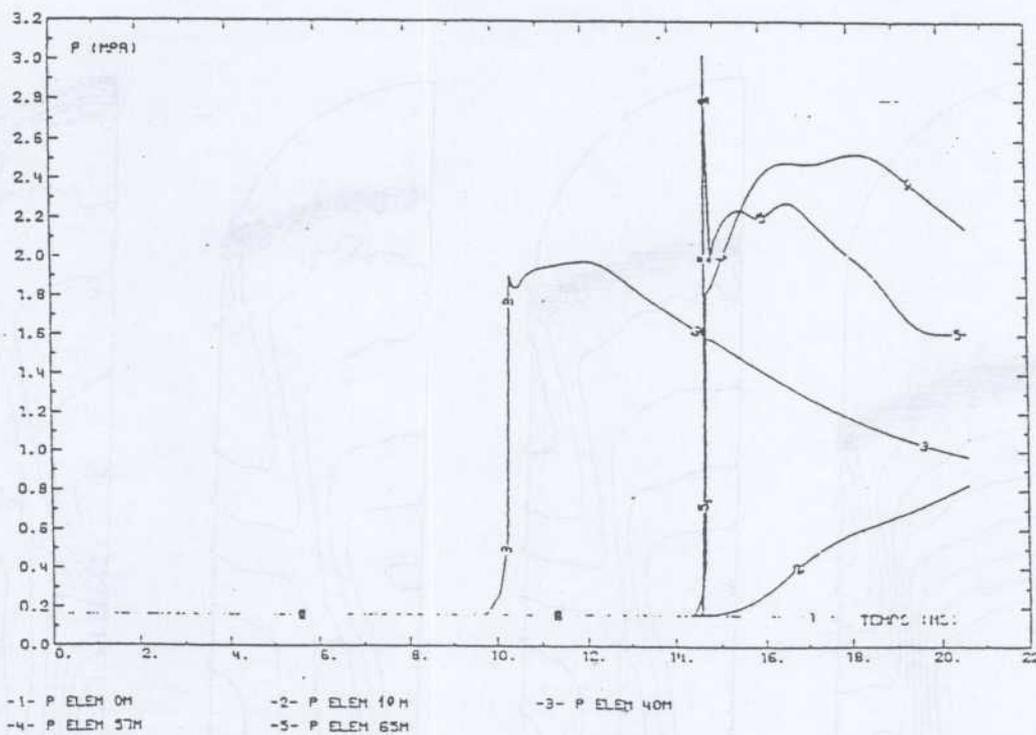


Figure 11

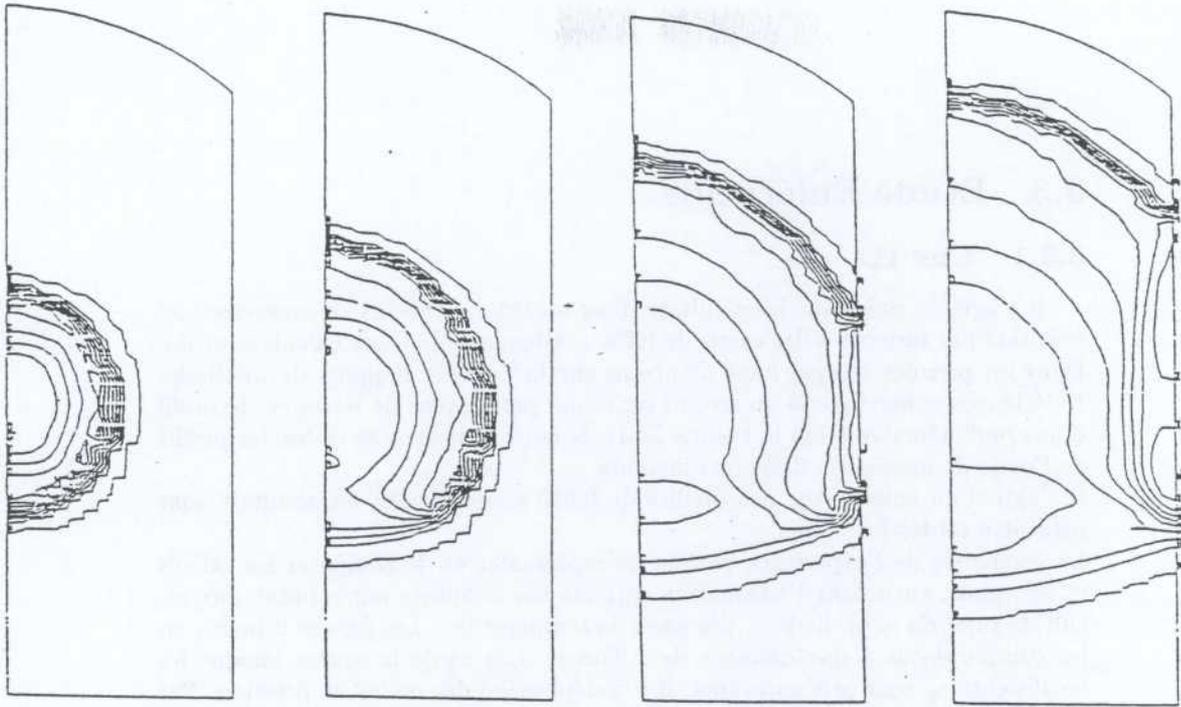


Figure 12

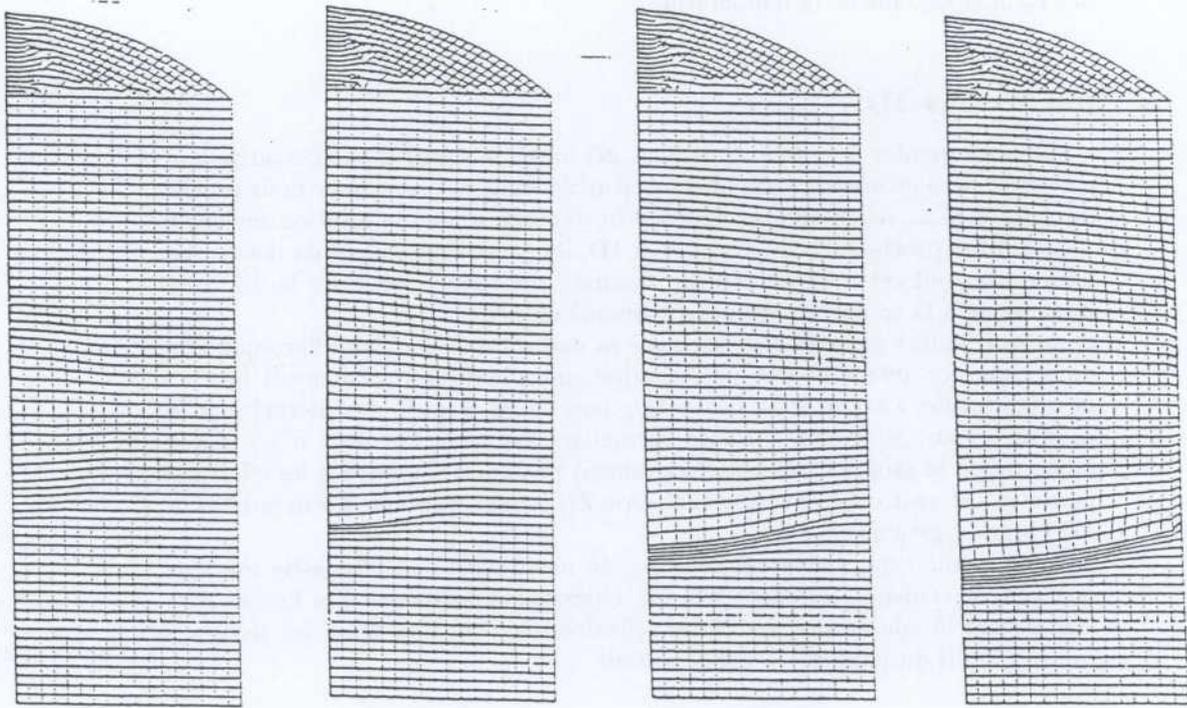


Figure 13

### 3.3 Etude Eulérienne

#### 3.3.1 Cas 1D

Il s'agit de présenter les résultats dans un tube à choc et de comparer ces résultats par rapport à des essais de KFK ( Allemagne ) et aux calculs associés. Dans un premier temps, nous montrons sur la figure 1 l'apport de méthodes Eulériennes conservatives au second ordre qui permettent de retrouver le profil d'une onde réactive selon la théorie ZND. Sont donnés dans ce cadre, les profils de l'onde de pression à différents instants.

Il s'agit d'un calcul avec des mailles de 0.025 m de coté et les résultats sont présentés toutes les 0.5ms.

La géométrie de l'expérience permet de représenter et de comparer les calculs et les essais, en notant l'adéquation correcte des résultats par rapport aux résultats mesurés si on lie le  $c_p$  des gaz à la température.. Les figures 2 montrent les comparaisons à une distance de 1.25m et 3.25 m de la source lorsque les coefficients  $c_p$  sont pris constants. Il y a déphasage des ondes de pression. Par contre comme le montrent les figures 3 et 4 à 6m, 7m, 10m et 12m lorsque les  $c_p$  dépendent de la température, on retrouve bien les résultats expérimentaux. Sur le même graphique, on peut trouver les résultats numériques obtenus pour des  $c_p$  indépendant de la température.

#### 3.3.2 Cas 2D

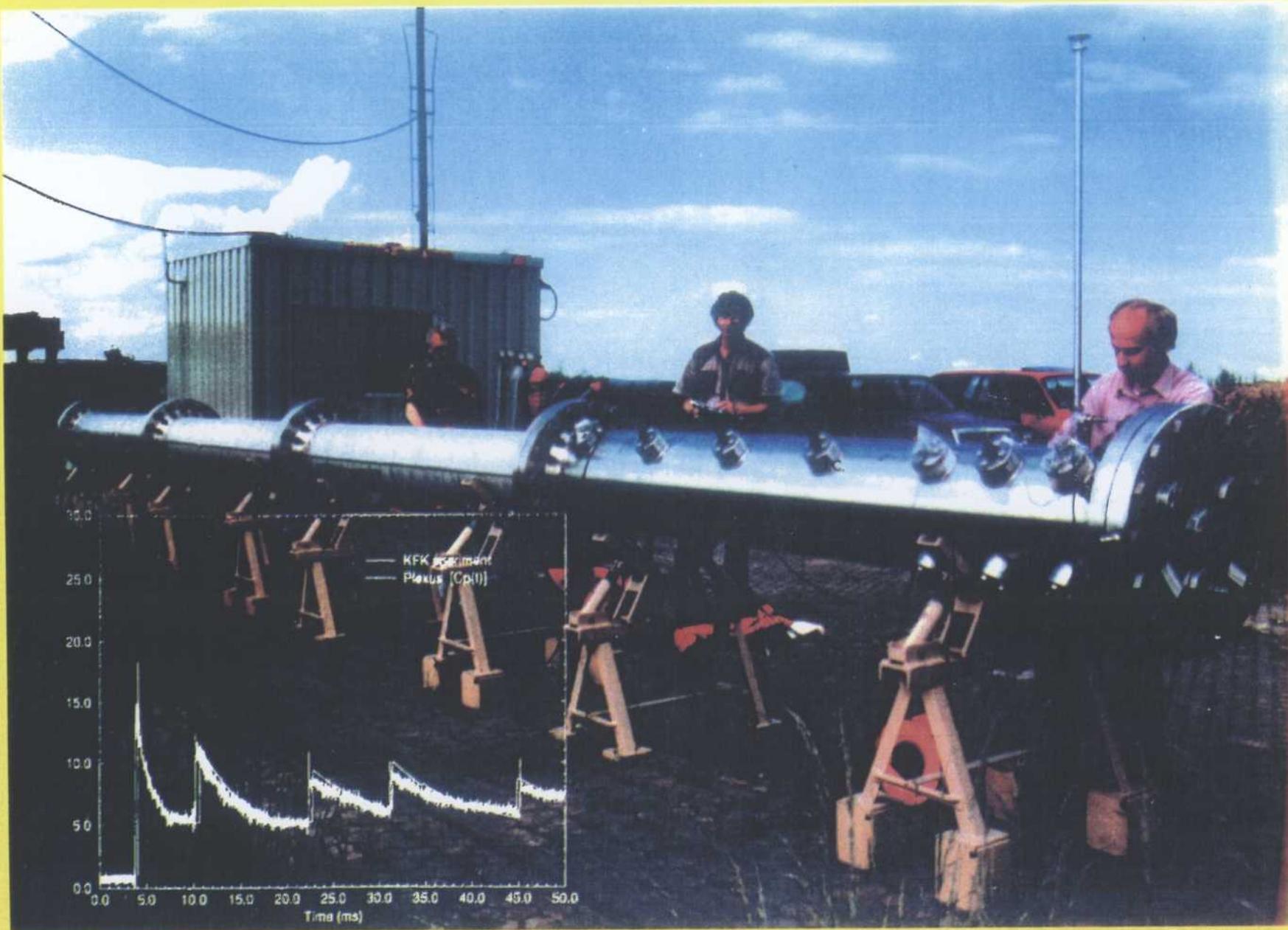
Afin de monter les effets réellement 2D initiés à partir d'une perturbation, on choisit une géométrie légèrement perturbée dans la direction  $y$  mais proche du tube à choc. Alors qu'un calcul inerte s'amortit et que la solution revient à une solution proche de celle obtenue en 1D, les effets s'amplifient en réactif. La figure 5 traduit cette apparition de "flamme" mettant en évidence la difficulté intrinsèque à la compréhension des phénomènes mis en jeu.

On peut conduire une réflexion analogue en partant d'un problème "presque 1D" dans lequel on introduit une perturbation sinusoïdale. En écoulement inerte, la perturbation s'atténuerait tandis que dans le cas réactif, cette dernière reste présente, pour peu qu'on y mette le maillage suffisant. On peut noter sur la figure 6 que la propagation est effectivement presque 1D mais que les effets 2D persistent et sont cohérent avec la théorie ZND qui assure que derrière le front 1D les propagations sont 2D.

Dans le même type d'idée, un calcul a été mené dans une géométrie réacteur qui met en évidence les effets liés aux réflexions secondaires. Les figures 6 et 7 montrent l'onde de pression après réflexion avec des pics dans des parties a priori à l'abri du passage de l'onde initiale.



# EXPERIENCE DE DETONATION HYDROGENE



J.C.

# Experiment H2RO4

Location 1.25 m

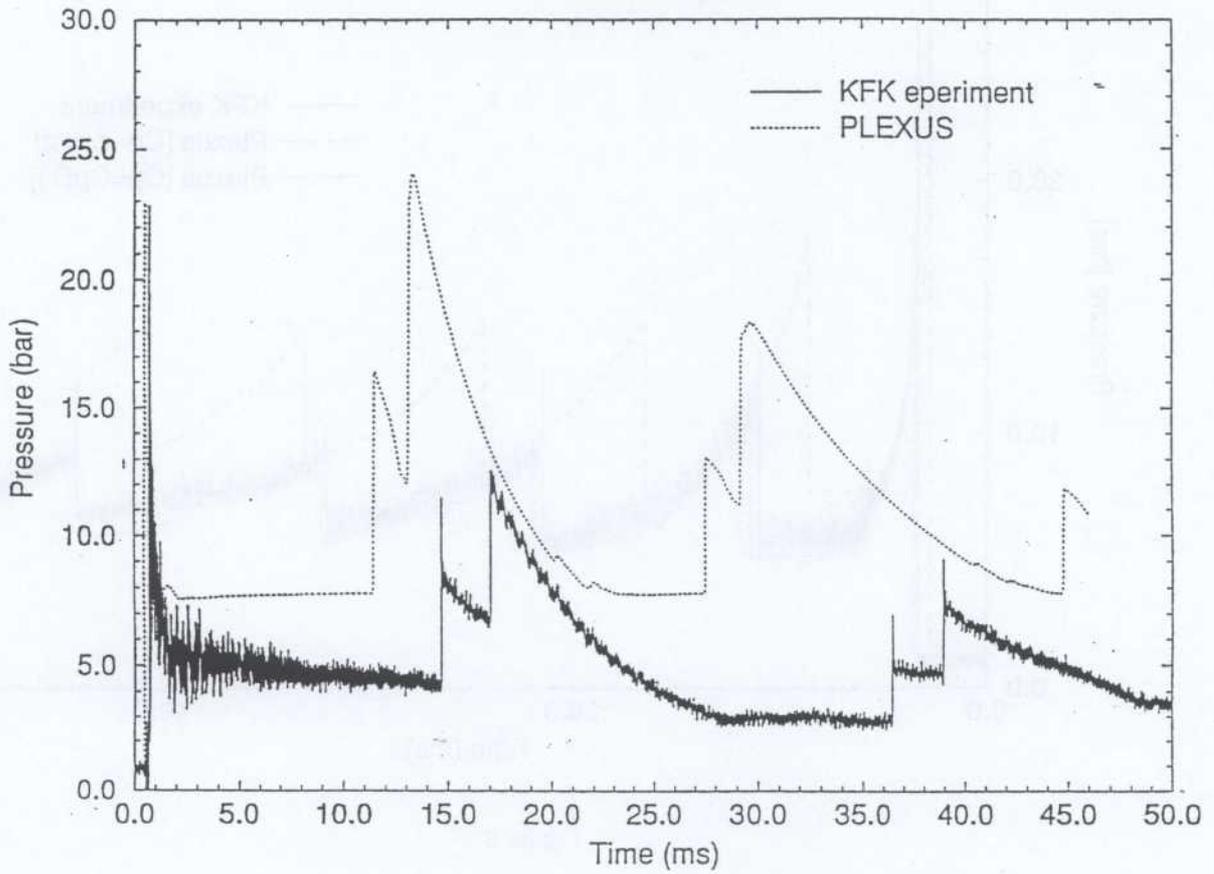
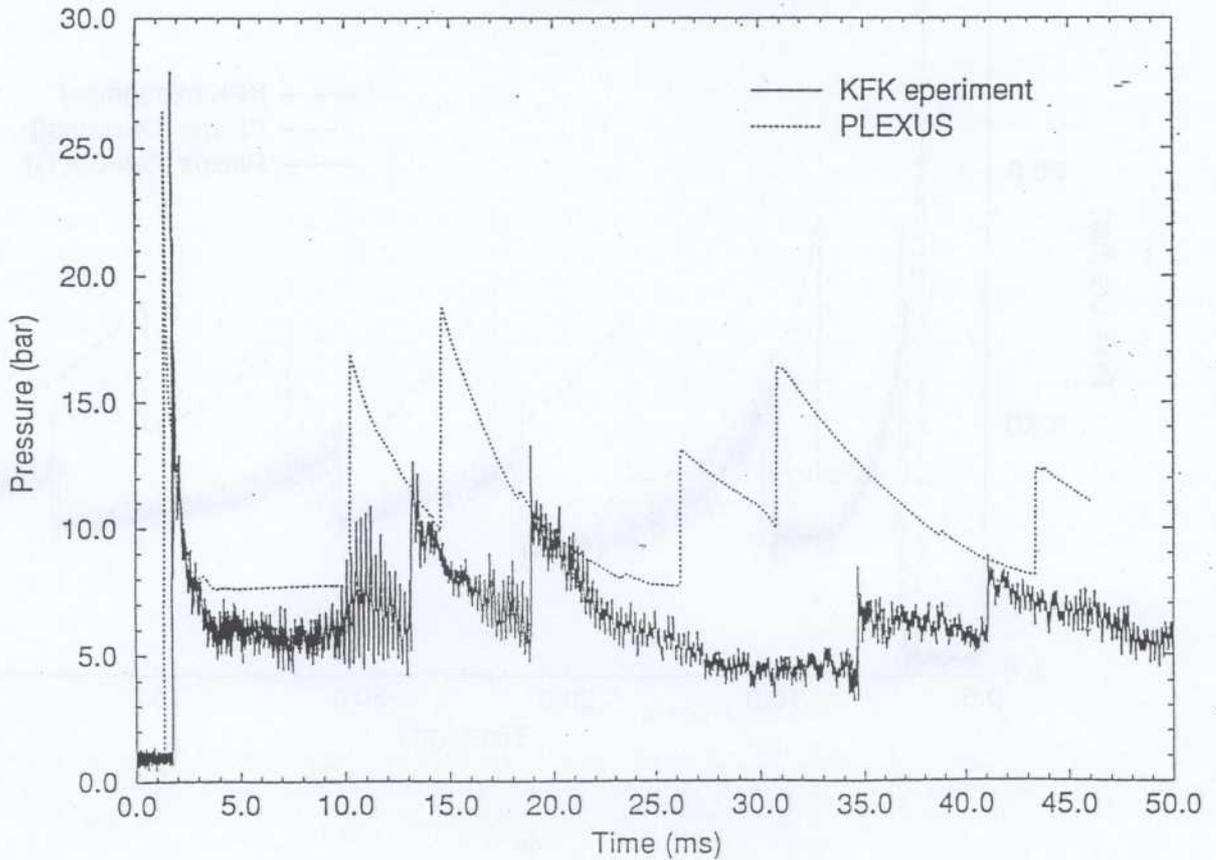


Figure 2

# Experiment H2RO4

Location 3.25 m



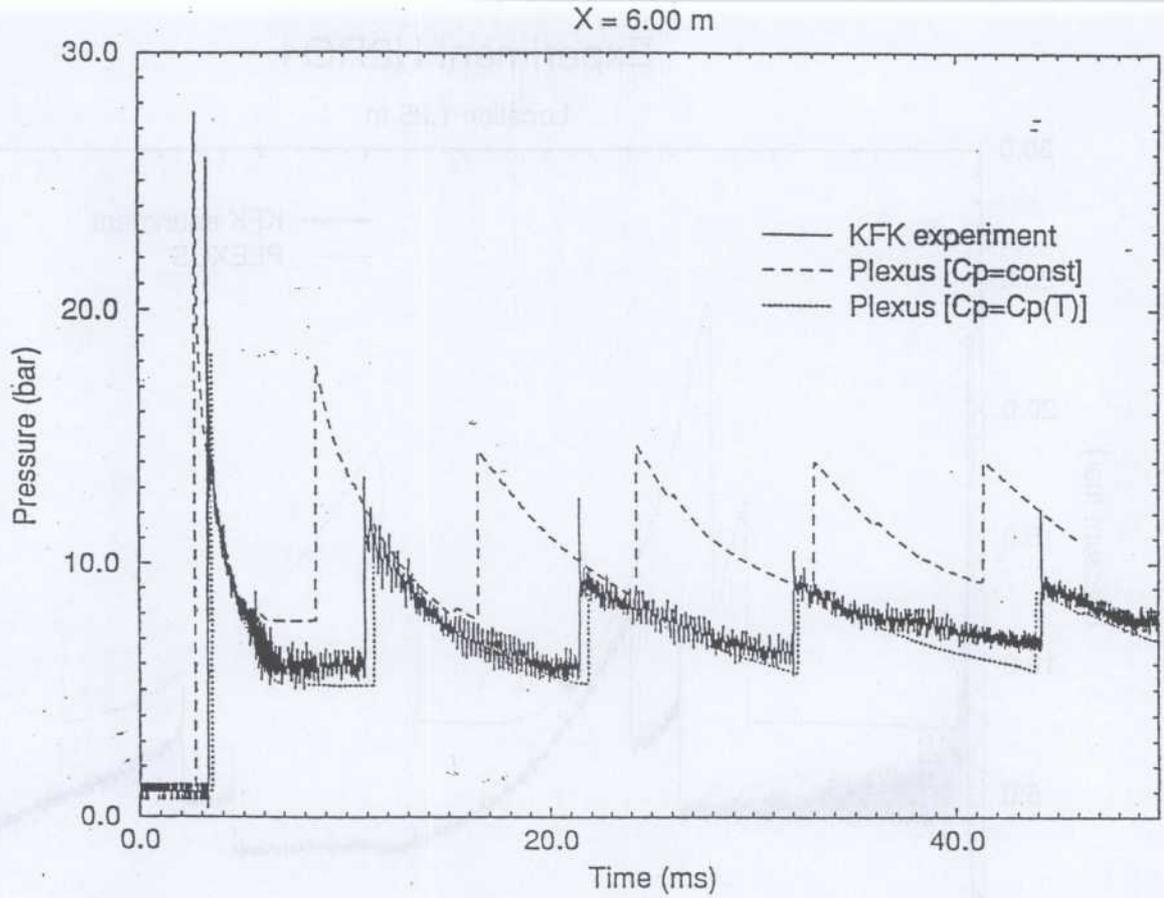
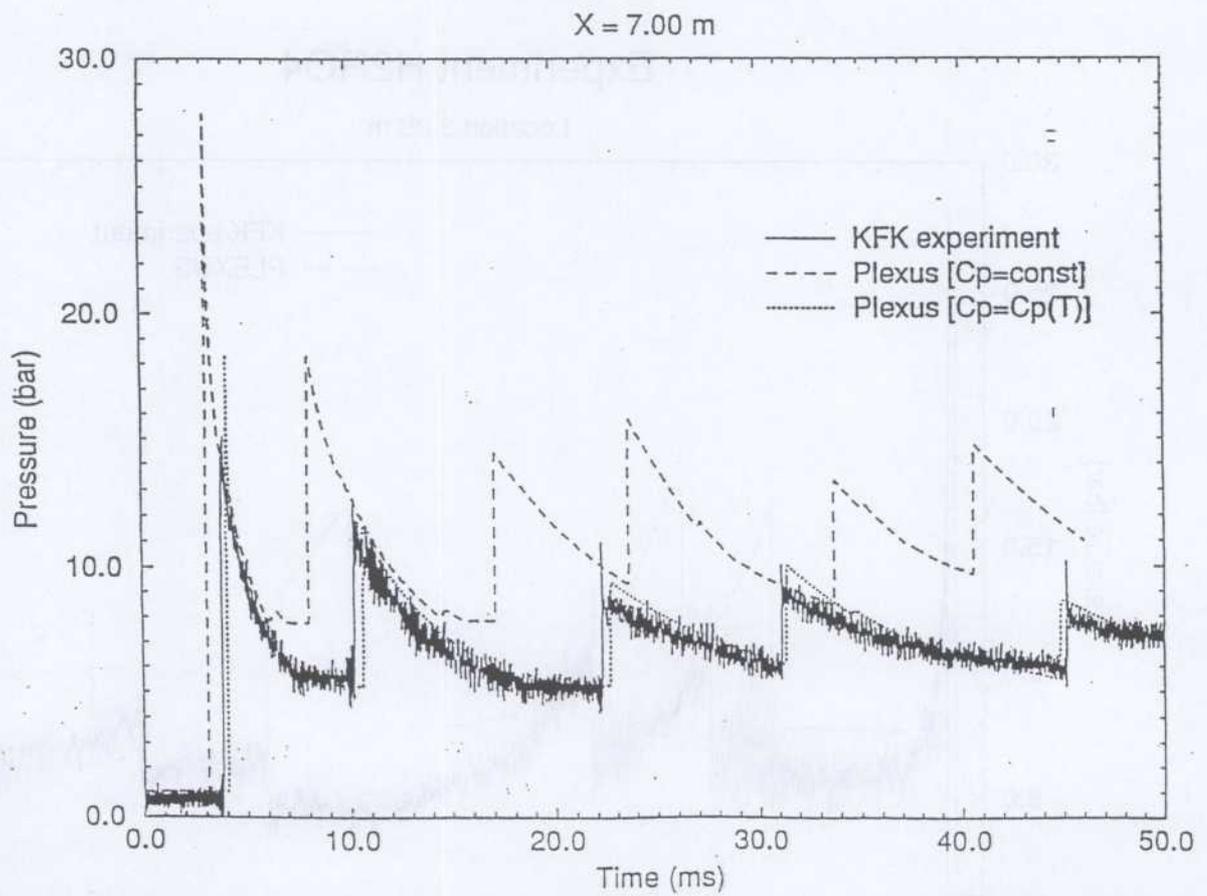


Figure 3

### Experiment H2RO4



# Experiment H2RO4

X = 10.00 m

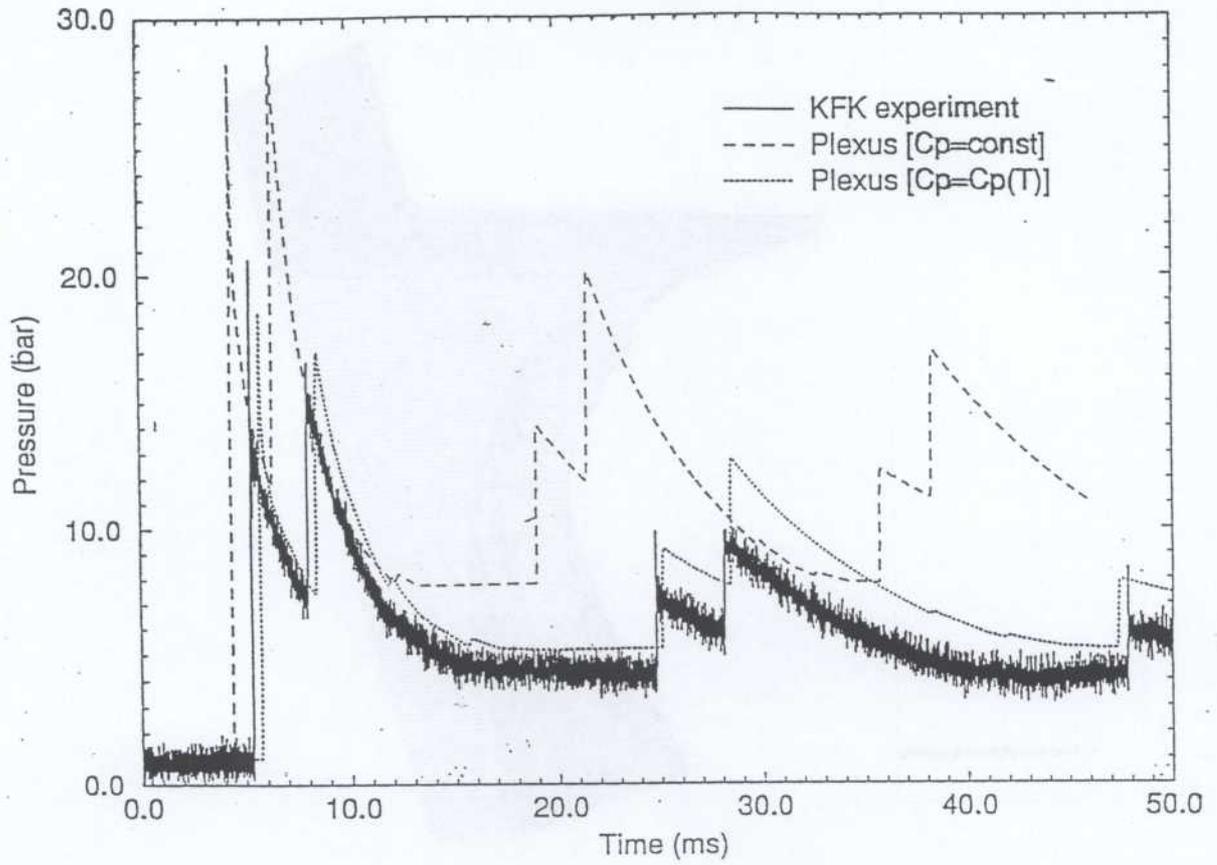
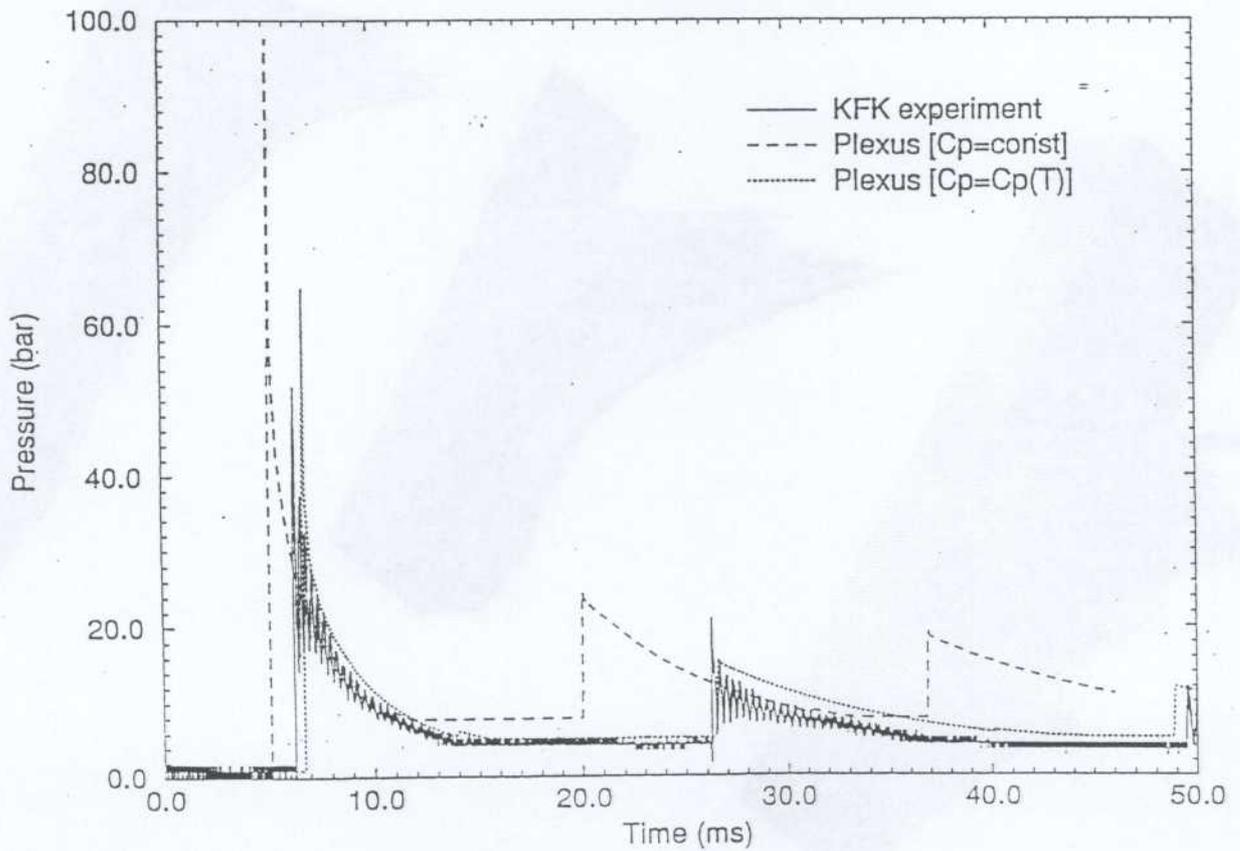


Figure 4

# Experiment H2RO4

X = 12.00 m



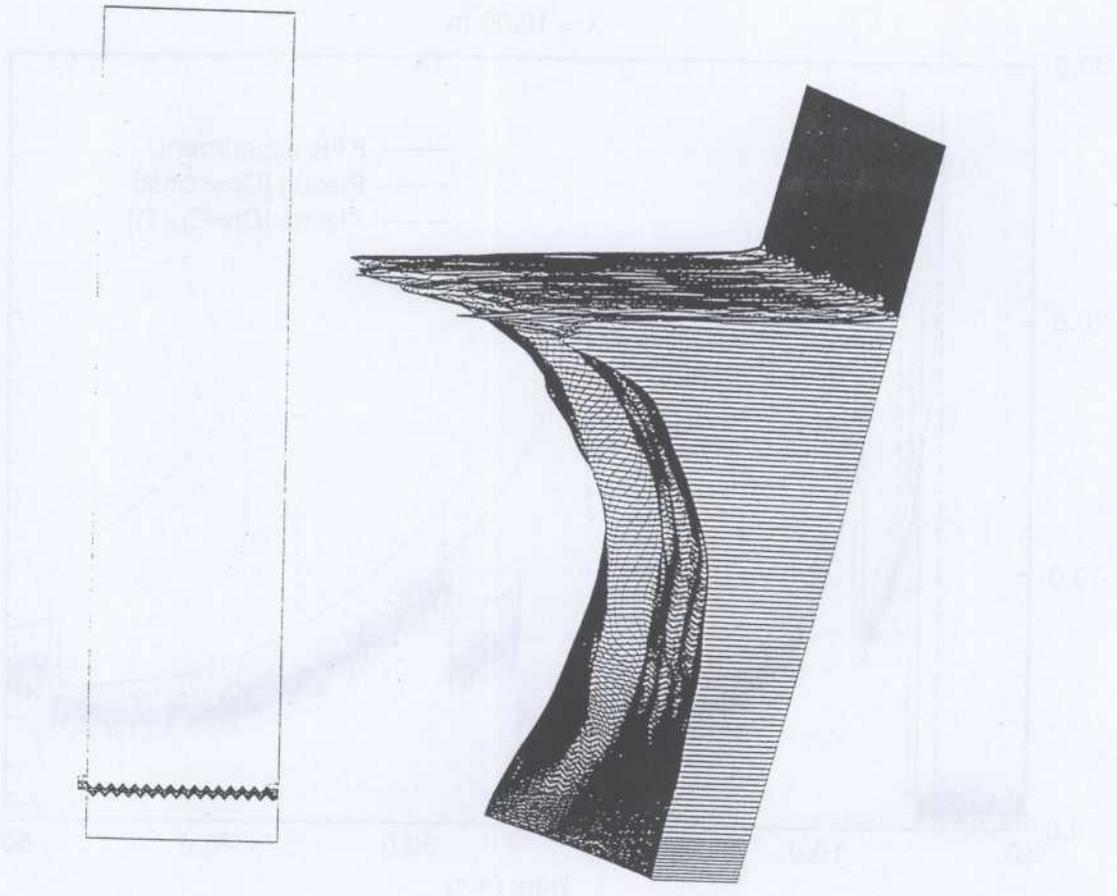
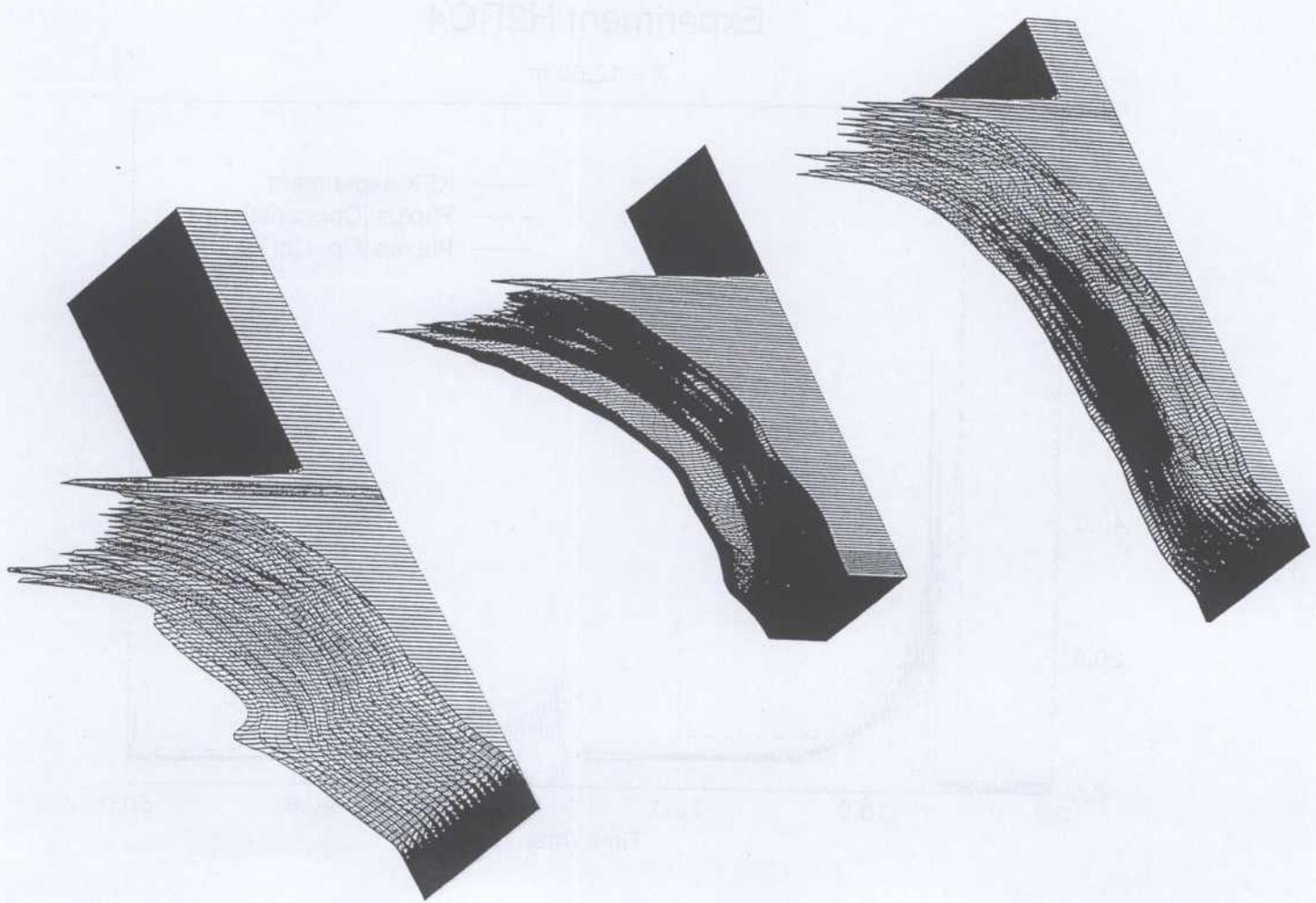


Figure 6



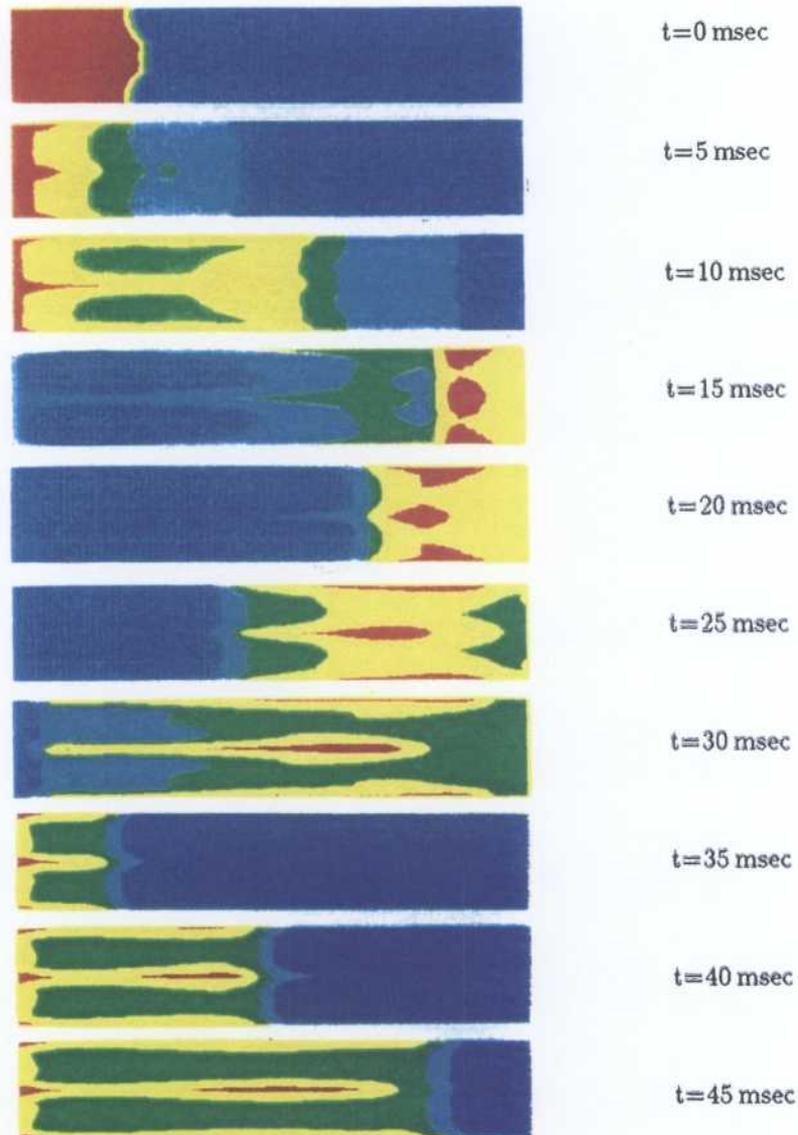
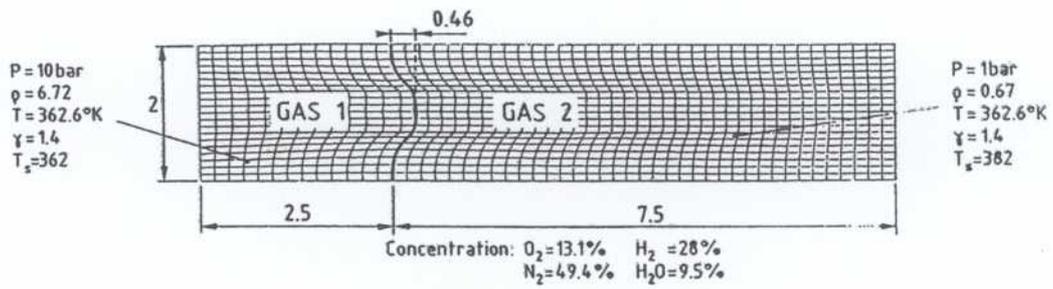
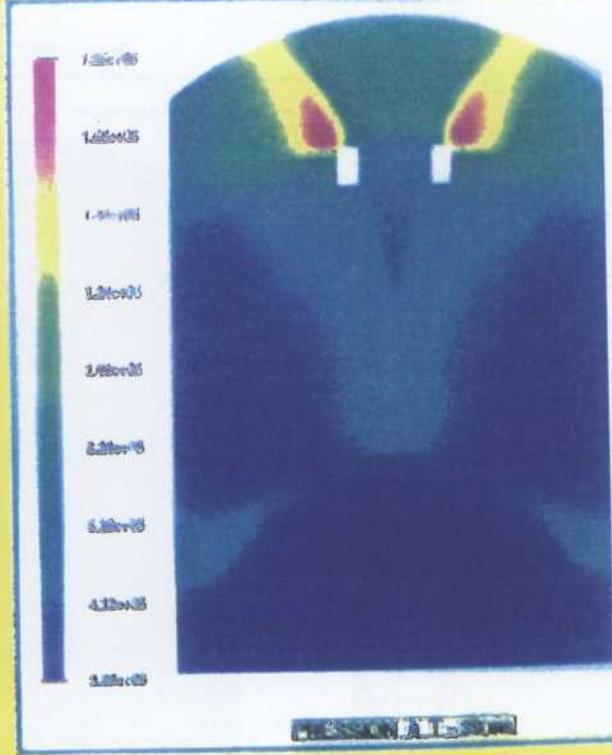
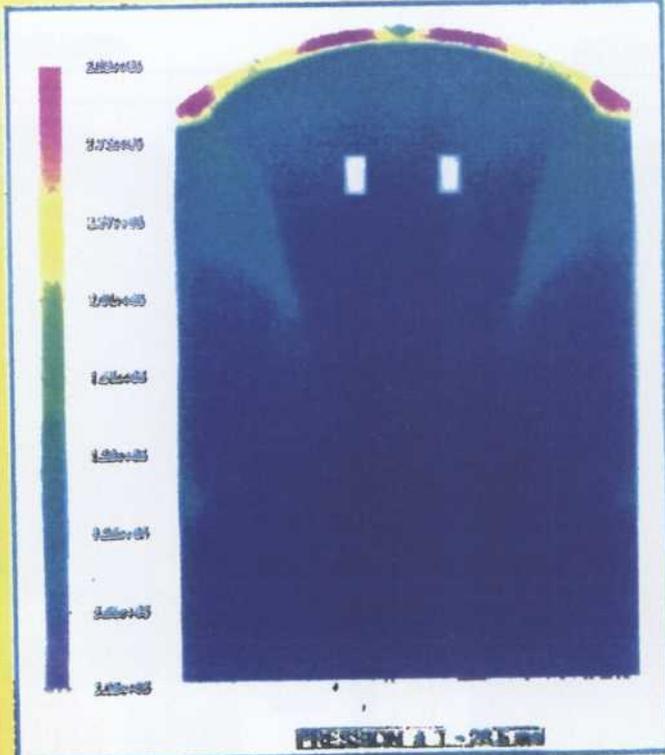
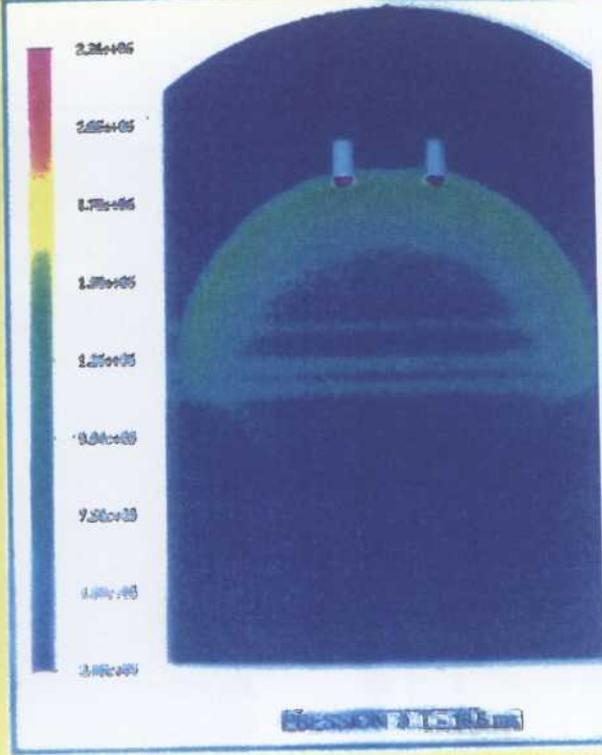
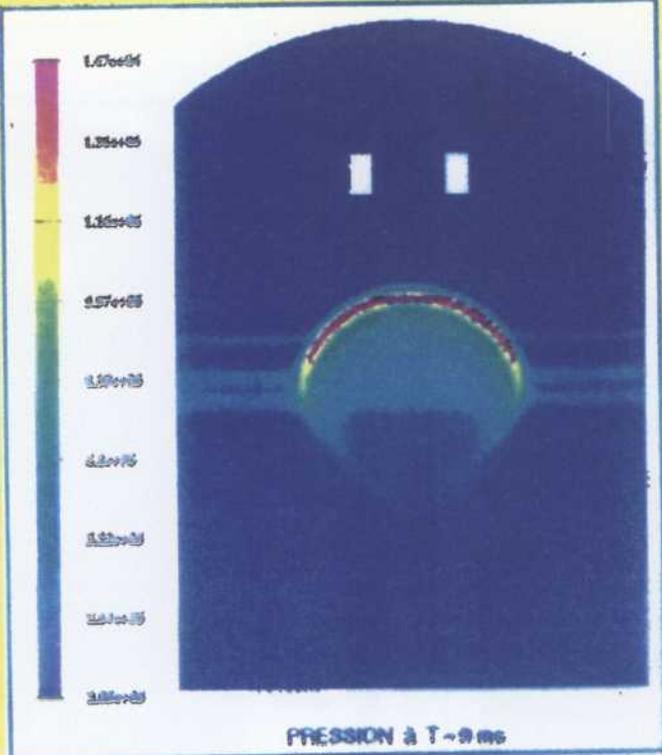


Fig.5: Mixing effects of reactive flows in a shock tube  
 (Note the color levels are not same in each figure.)

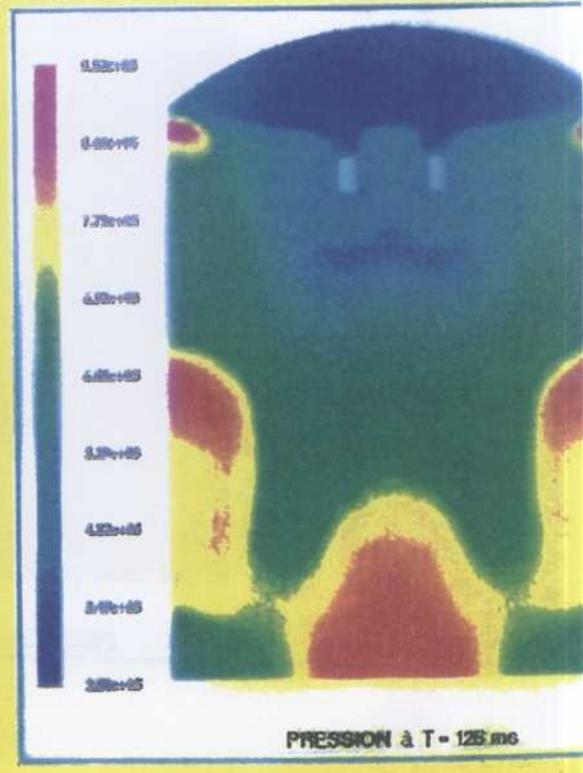
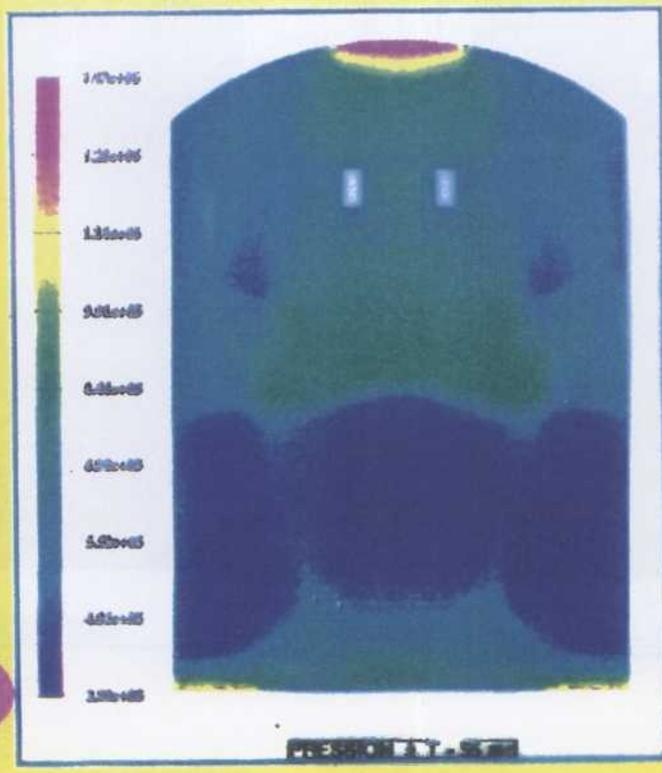
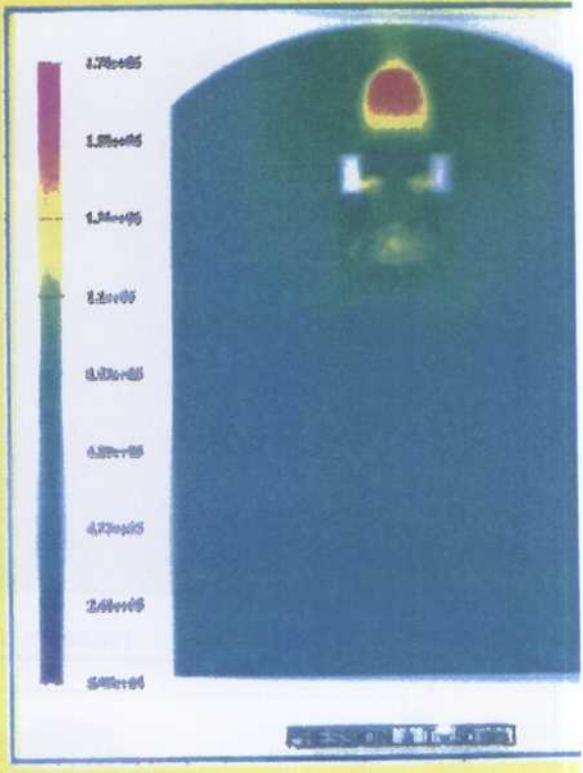
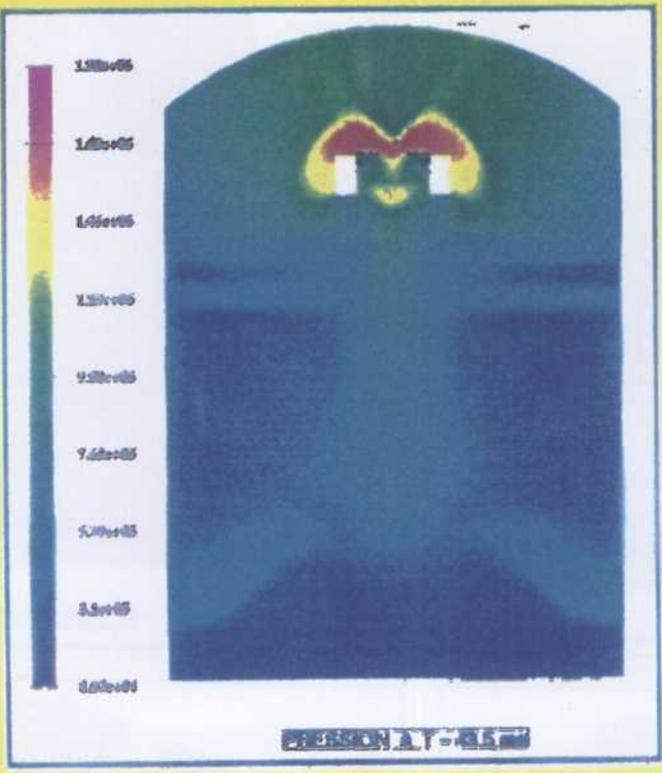


# DETONATION HYDROGENE DANS ENCEINTE DE REACTEUR





# DETONATION HYDROGENE DANS ENCEINTE DE REACTEUR



### 3.4 Prise en compte du glissement et des effets visqueux

Dans un premier temps, ont été traitées des problèmes 2D puis des géométries 3D.

#### 3.4.1 Les géométries 2D

Soient deux géométries basées sur des tubes, c'est-à-dire des géométries certes 2D mais sur lesquelles s'appuient des phénomènes purement 1D.

##### Le tube à choc de SOD

Le problème du tube à choc de SOD est bien connu : il s'agit d'un tube séparé en deux parties (notées L pour partie gauche et R pour partie droite) avec pour données thermodynamiques initiales :

$$\frac{P_R}{P_L} = 10 \text{ et } \frac{\rho_R}{\rho_L} = 8$$

Il est évident que les résultats donnés par le système d'équations d'Euler et par les modèles qui nous occupent (équations de Navier-Stokes) doivent être quasi identiques attendu que les compositions chimiques des deux gaz le sont et que la viscosité dans le cas présent d'une onde de choc en déplacement monodimensionnel ne joue pratiquement aucun rôle. Le maillage utilisé est celui de la figure 1. Il comporte 2000 mailles carrées avec un pas de maille de 1 mm.

Sur les figures 5 et 6, sont reproduits les profils de pression et masse volumique dans le tube à l'instant 0.1 ms. Ils montrent qu'il n'y a aucune différence ce qui était attendu entre les résultats donnés par le modèle de Navier-Stokes et celui d'Euler.

##### Le tube à déflagration

Il s'agit ici d'un tube dont les données thermodynamiques initiales sont les suivantes :

La pression  $P_R$  et la pression  $P_L$  sont égales et la température  $T_L$  vaut à 3000K tandis que la température  $T_R$  est égale à 300K. La température de seuil de la réaction est partout fixée à 305K dans le cas réactif, c'est-à-dire qu'à l'instant initial la réaction chimique commence dans la partie gauche mais ne pourra avoir lieu dans la partie droite tant que la température n'aura pas dépassé 305 K.

Les données chimiques initiales sont quant à elles identiques dans tout le tube : fraction massique d'hydrogène (H2) : 8/100 ; fraction massique d'oxygène (O2) : 4/100 ; fraction massique d'azote (N2) : 88/100

Le maillage utilisé est le même que précédemment. On observe que, pour un modèle sans réaction chimique, il n'y a pratiquement pas de conduction thermique si bien que la chaleur ne saurait se propager et il ne devrait pas y avoir de réaction chimique dans la partie droite du tube et avec un modèle de propagation de la combustion, la conduction thermique et la diffusion d'espèces (entre gaz brûlés et non brûlés) peuvent permettre la propagation de la chaleur et suivant la concentration d'hydrogène celle d'une flamme

Comme attendu on voit qu'avec un modèle visqueux sans combustion, la chaleur ne se propage quasiment pas et que la réaction chimique (cf figure 7- courbe de température- et figure 8- courbes de la fraction massique d'hydrogène-) ne se produit pas dans le tube droit et qu'elle meurt au sortir du tube gauche.

En revanche avec un modèle de type propagation de la combustion, non seulement la chaleur se propage bien mais en outre on voit apparaître une flamme de prémélange qui se déplace à une vitesse presque constante de 2.8 m/s. On remarque très bien sur les figures 9 et 10 représentant le profil de la fraction massique d'hydrogène le déplacement du front de flamme.

Ces résultats constituent une qualification qualitative du modèle développé. Il est décrit les résultats sur la température et la fraction massique d'hydrogène dans cette configuration.

Par la suite, sont présentés les résultats concernant le même calcul que précédemment effectué cette fois sur la géométrie suivante que l'on appelle par la suite "tube avec diaphragme".

Les résultats avec un modèle non visqueux montrent bien que la réaction chimique ne se propage en aucune manière car il n'y a pas de diffusion thermique capable de faire passer la température du tube de droite au-dessus de la température de seuil de la réaction. Avec un modèle visqueux, en revanche on voit bien que non seulement la réaction se propage dans le tube de droite mais qu'encore le diaphragme n'est pas un obstacle physique au passage de la flamme. Après avoir étudié des tubes droits qui, répétons-le, mettent en jeu des phénomènes quasi 1D, nous avons également regardé un tube coudé avec changement brusque de section qui, lui, assure un phénomène véritablement 2D.

### 3.4.2 Le tube coudé

#### Calcul 2D

Ce tube coudé comporte 6600 éléments quadrangles avec un pas de maille de 1 mm ( figure 3).

Les données thermodynamiques initiales sont les suivantes:

Dans la partie droite, la pression vaut 1bar et la température 300K, pour la partie gauche, la pression vaut 1bar et la température 2000K. La température de déclenchement de la réaction est fixée à 305K.

Les données chimiques initiales sont les mêmes pour les deux tubes, la concen-

tration en masse est pour l'hydrogène 0.08, pour l'oxygène 0.04, pour l'azote 0.88.

Les deux figures (11 et 12) présentent l'évolution de la température dans le coude en fonction du temps. La géométrie est présentée dans la figure suivante : On note bien qu'un modèle non visqueux ne voit rien (les courbes semblent montrer une nette variation mais la représentation est trompeuse: la différence de température mini-maxi n'est que de 5 K!).

En revanche avec un modèle visqueux, il y a bien propagation de la chaleur et apparition de la réaction chimique par dépassement de la température de seuil de la réaction.

L'absence dans un cas et la présence dans l'autre de la réaction chimique est d'ailleurs confirmée par les deux figures suivantes qui montrent l'évolution de la fraction massique d'hydrogène dans le coude avec Euler et Navier-Stokes.

### Calcul 3D

Il s'agit d'un tube coudé de section carrée comportant 10000 éléments hexaédres (figure 4). Ce calcul a été mené dans les mêmes conditions thermodynamique que le calcul 2D. Les figures 13 et 14 présentent l'évolution de la température.

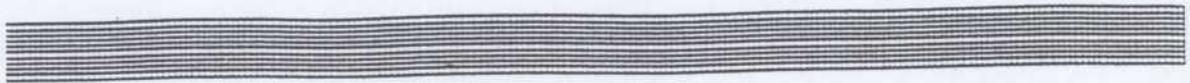


Figure 1 Maillage Tube de SOD

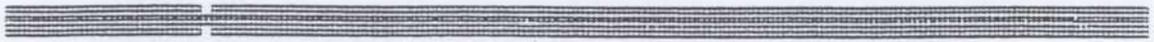


Figure 2 Maillage Tube de déflagration

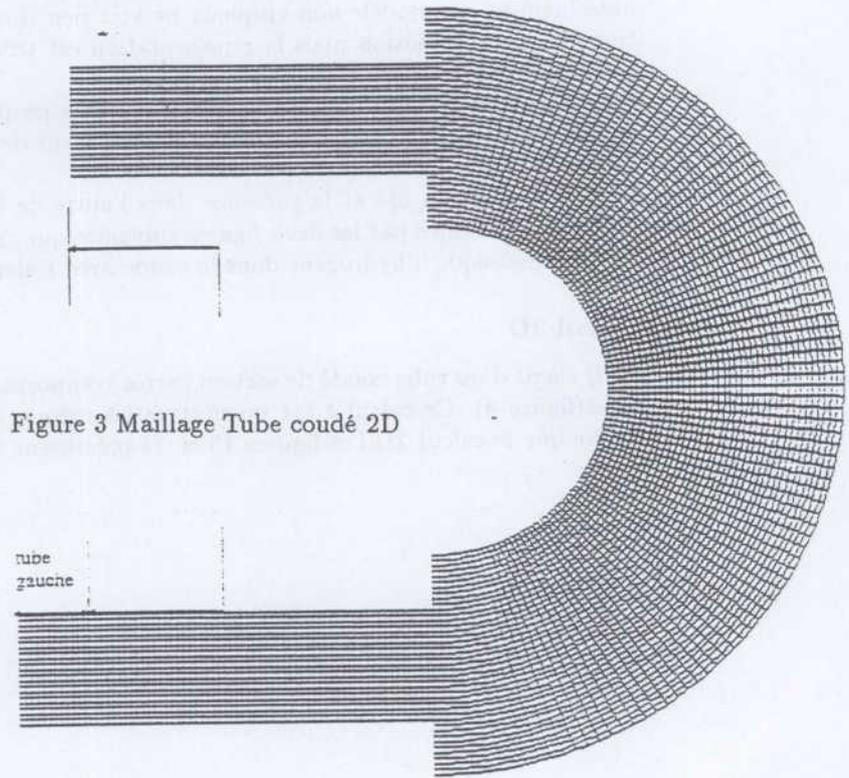


Figure 3 Maillage Tube coudé 2D

tube  
gauche

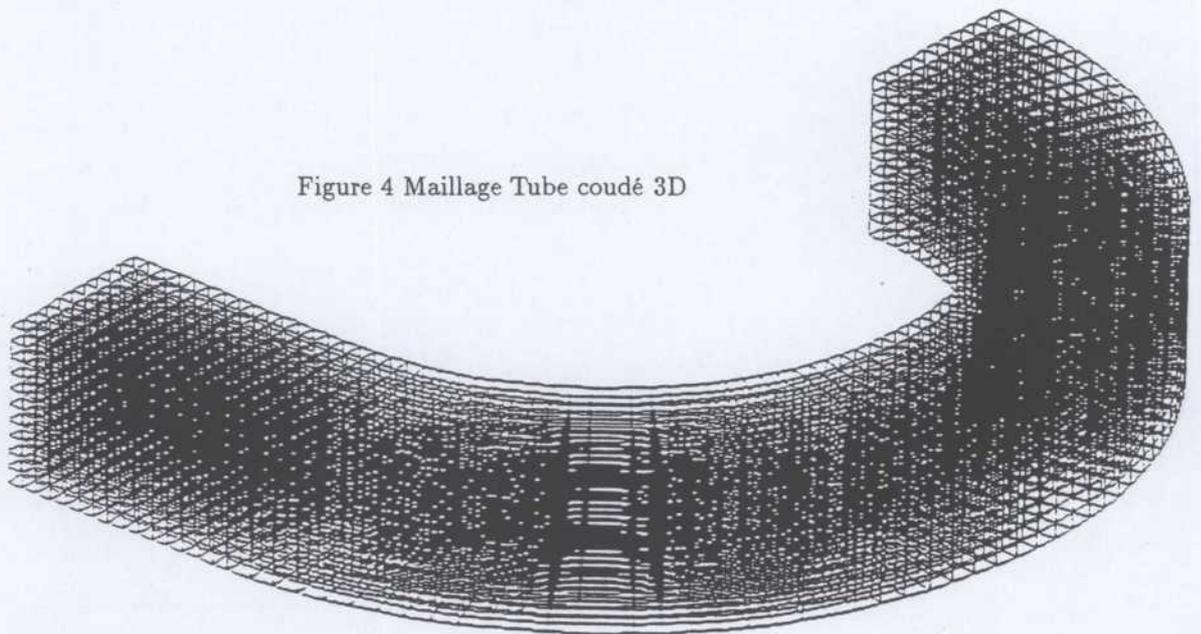


Figure 4 Maillage Tube coudé 3D

### 3.3.1 PRESSION à t=0,1 ms : NAVIER-STOKES/EULER

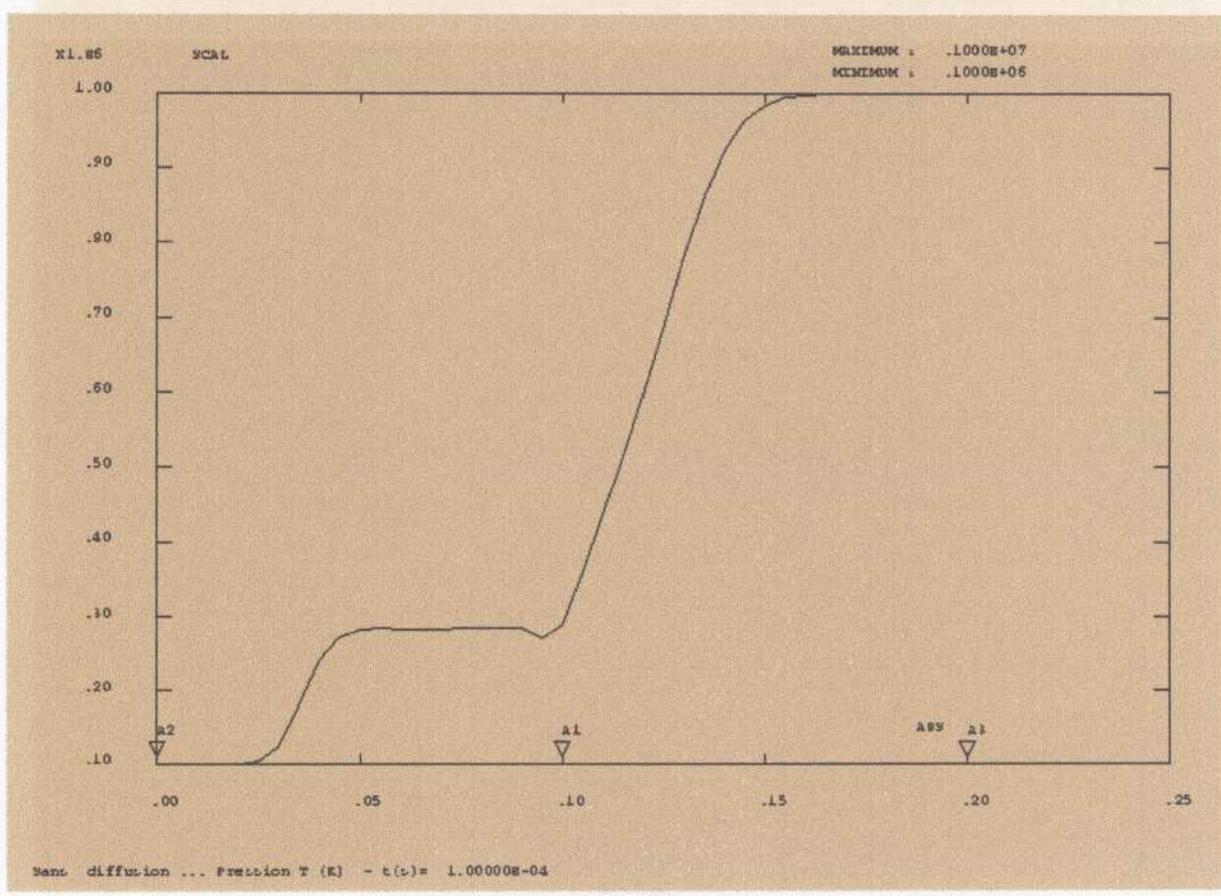
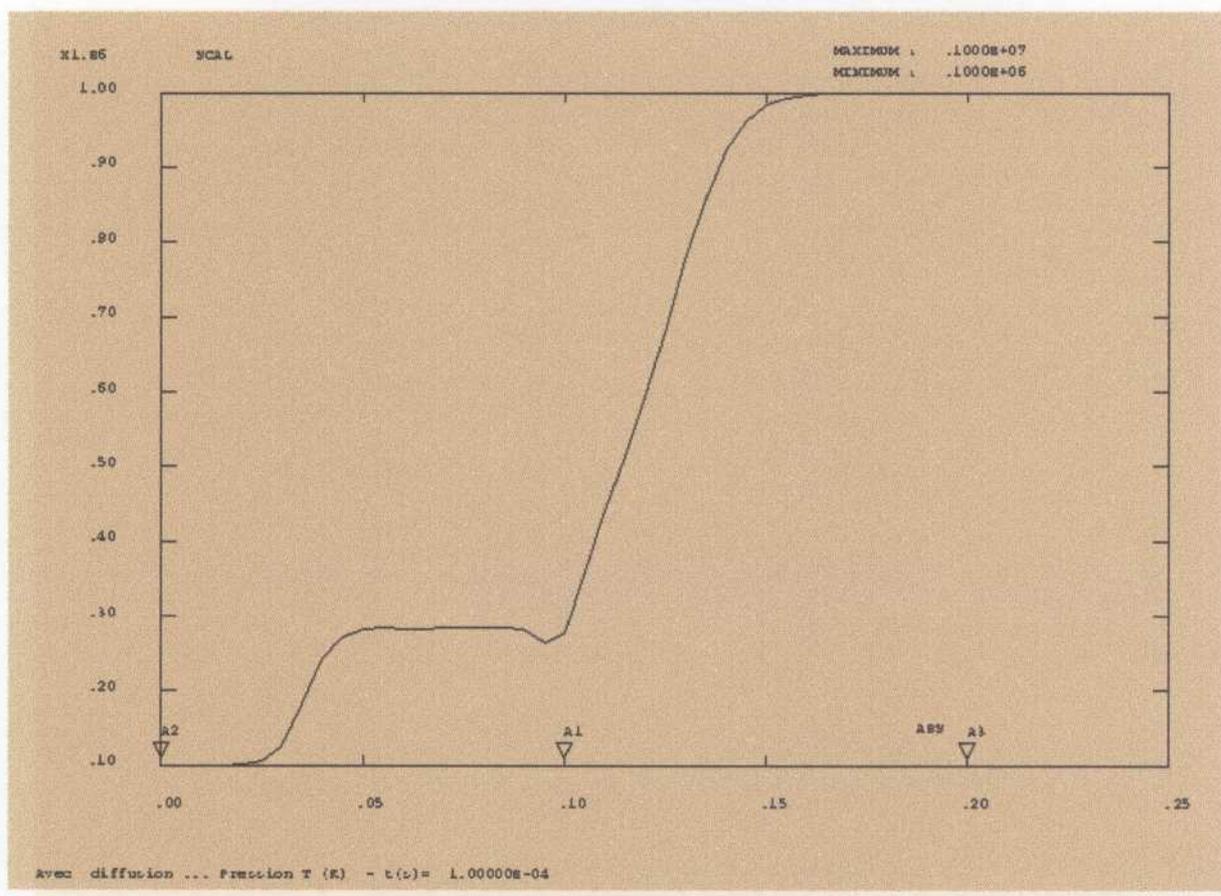


Figure 5

# MASSE VOLUMIQUE à $t=0,1\text{ms}$ : NAVIER-STOKES/EULER

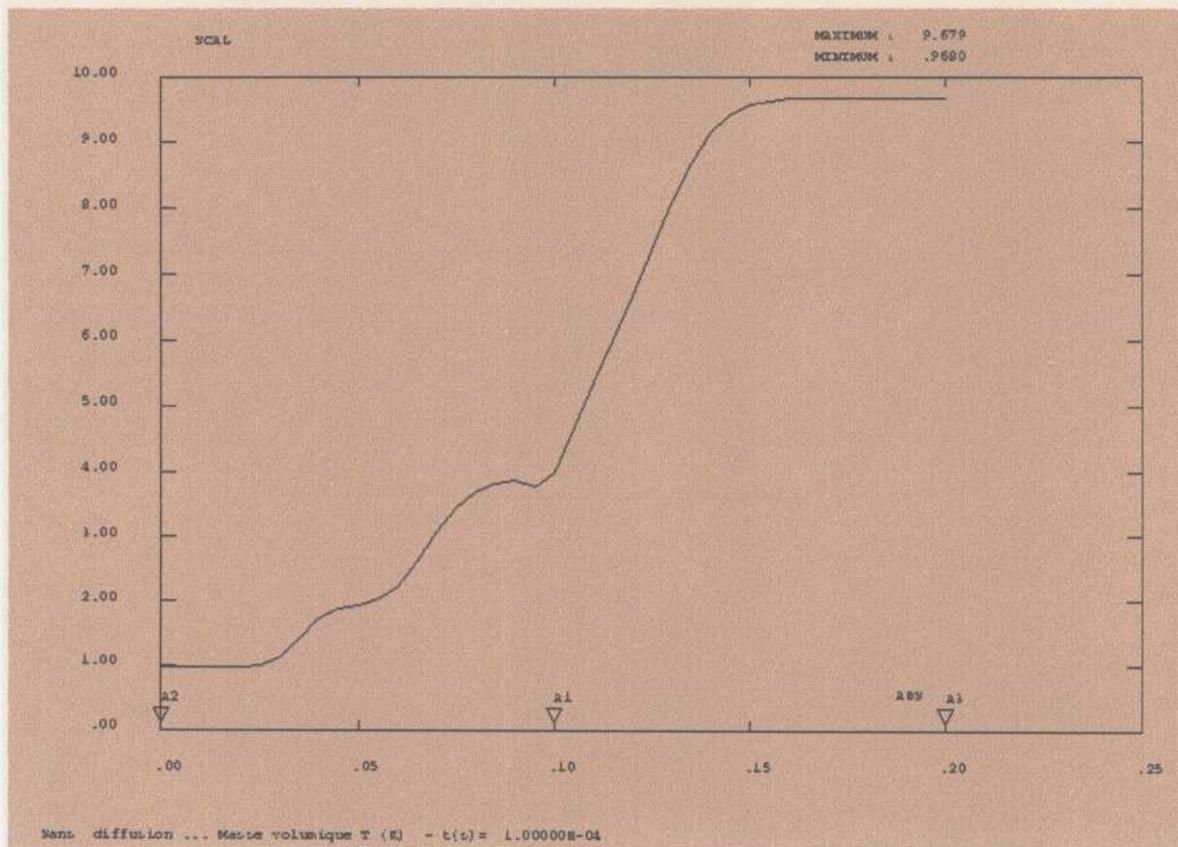
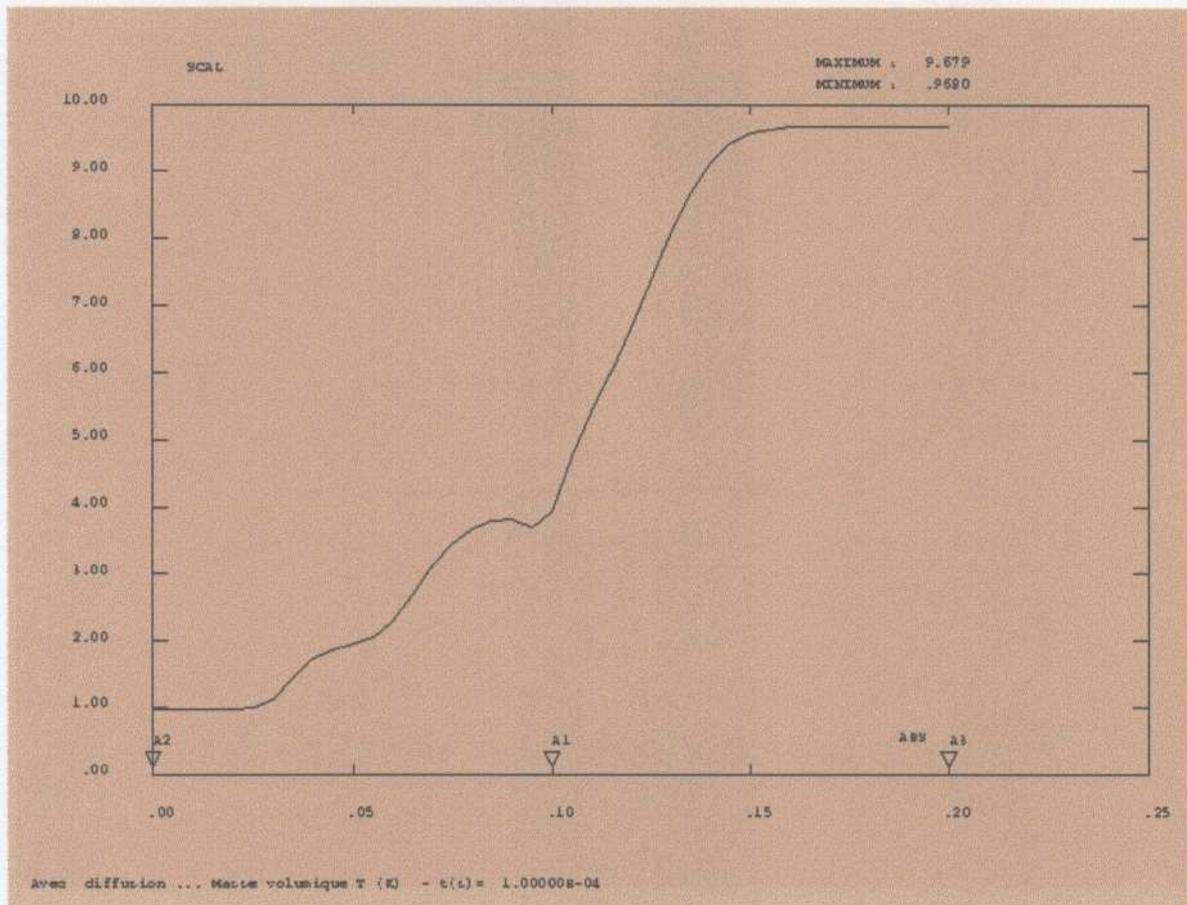


Figure 6

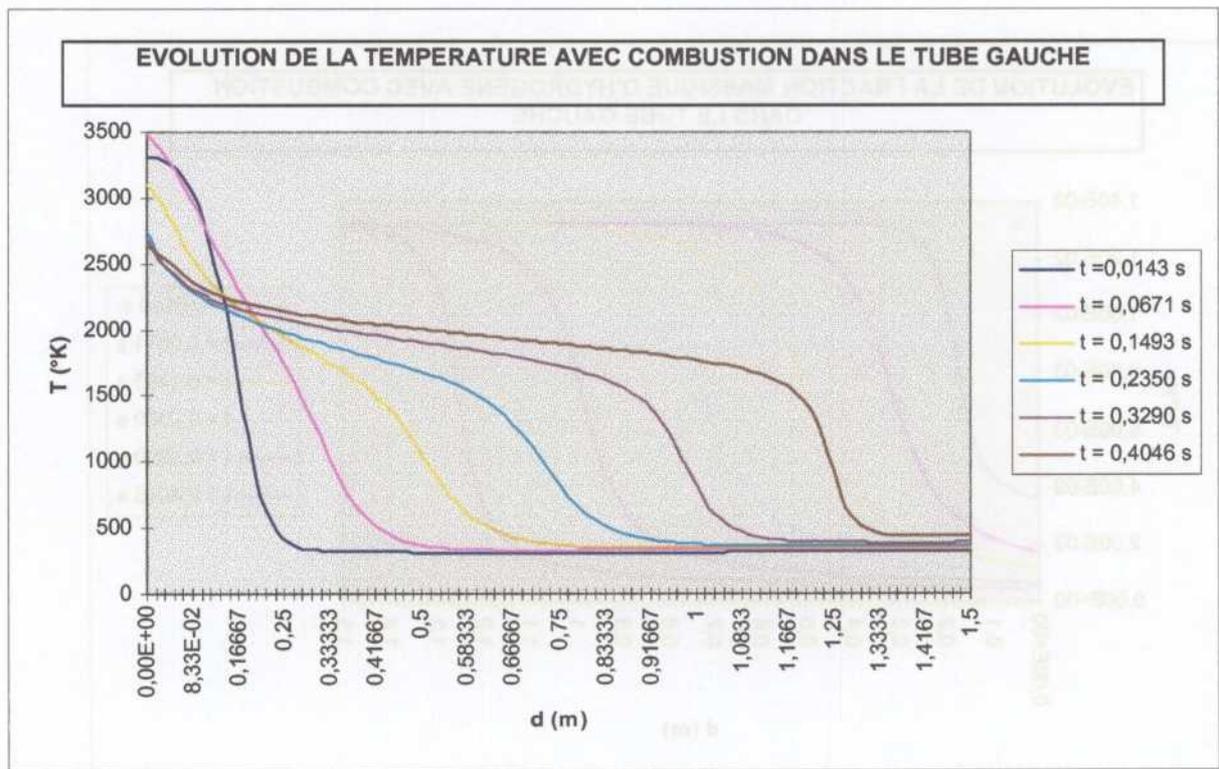
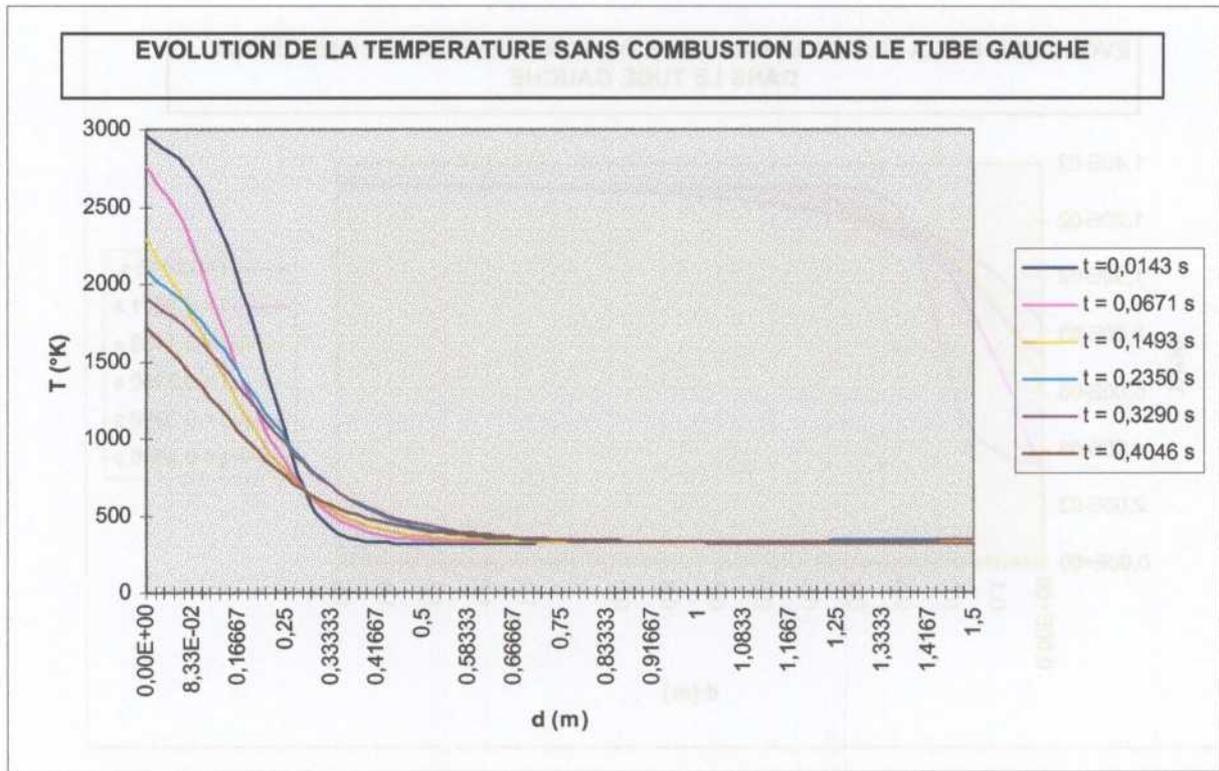


Figure 7

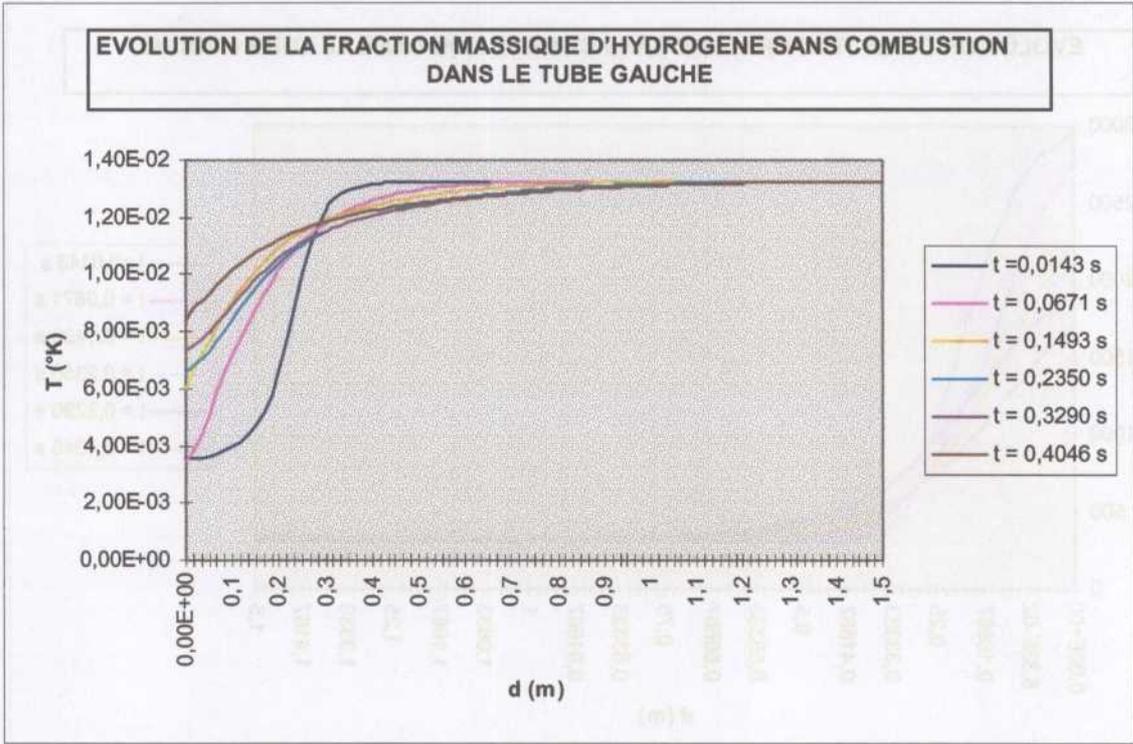


Figure 8

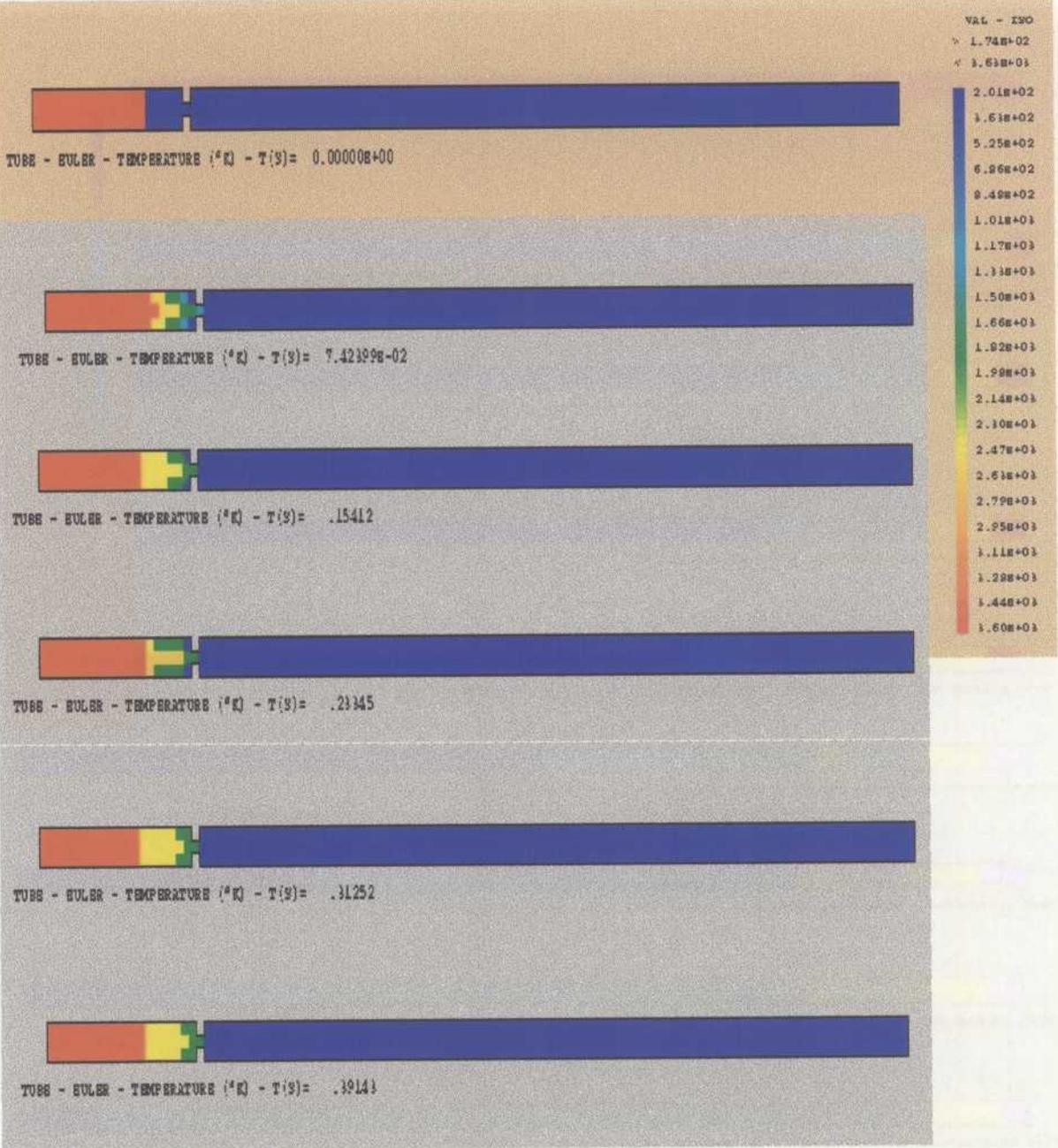


Figure 9

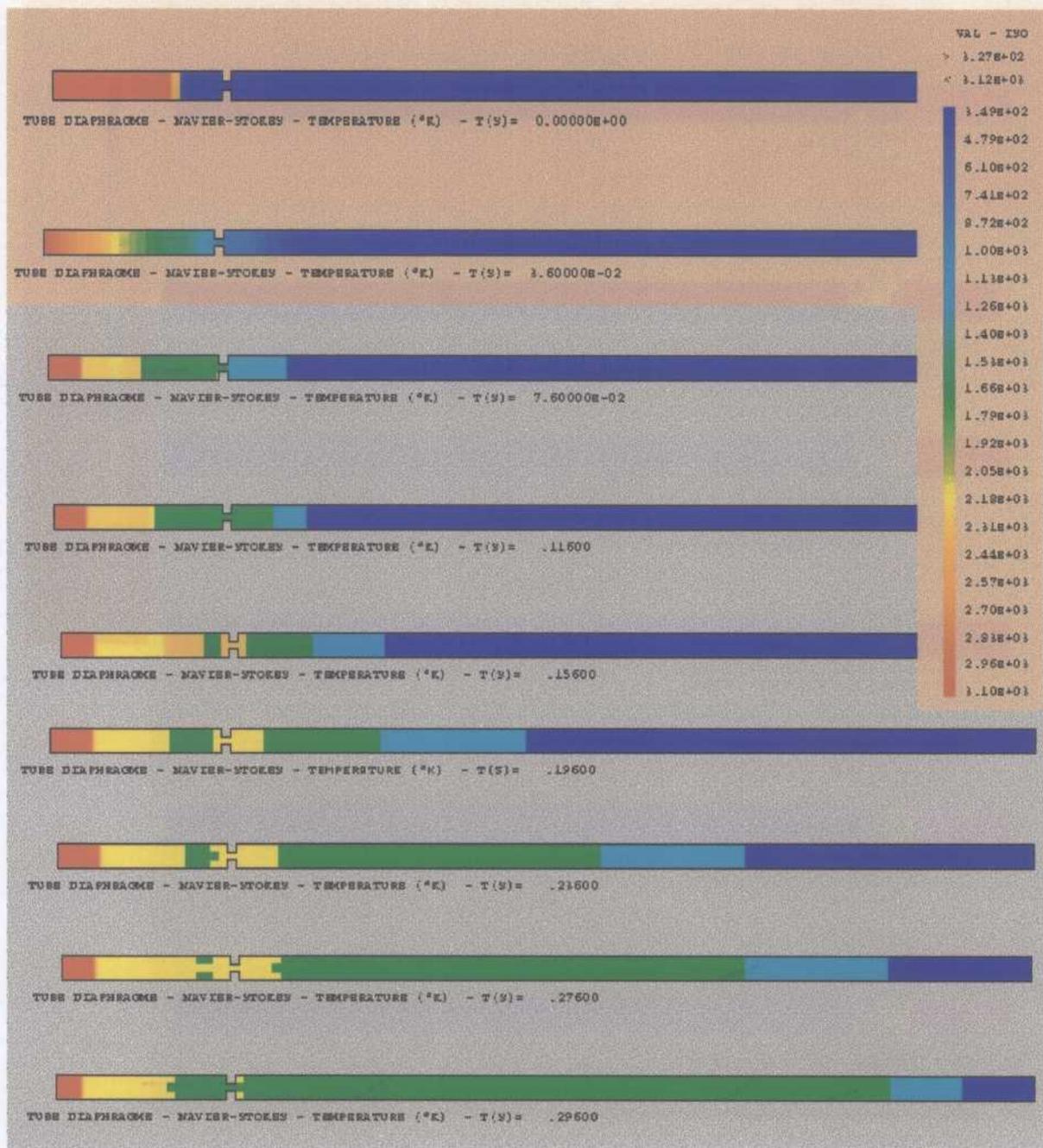


Figure 10

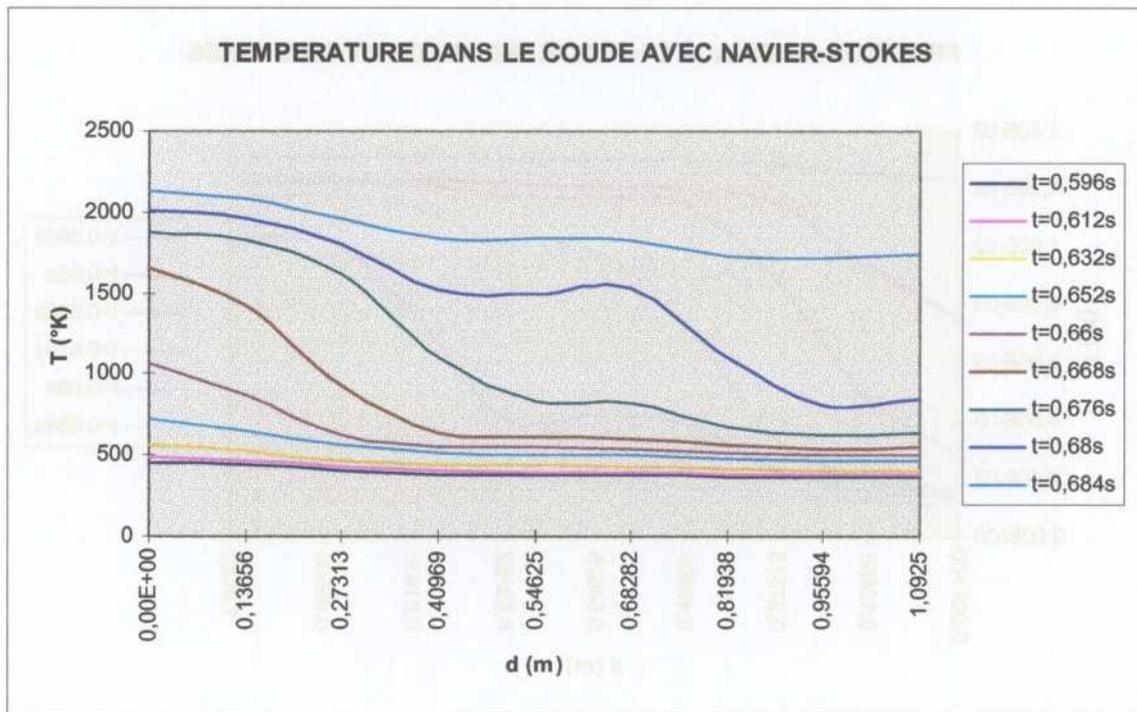
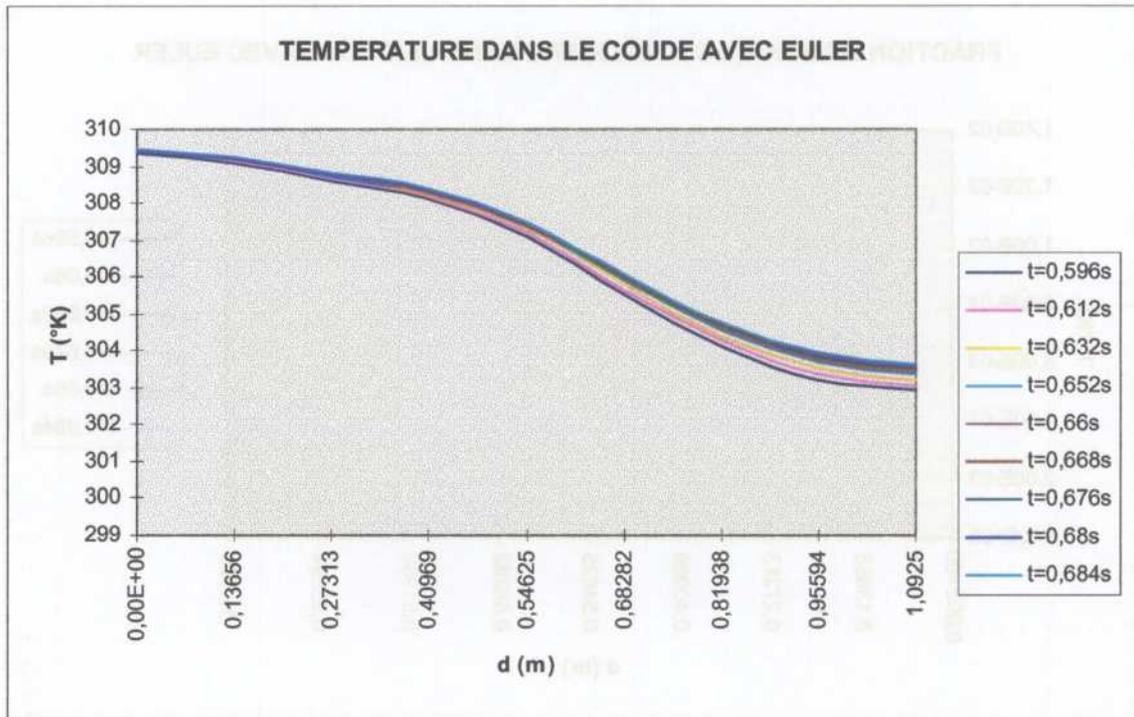


Figure 11

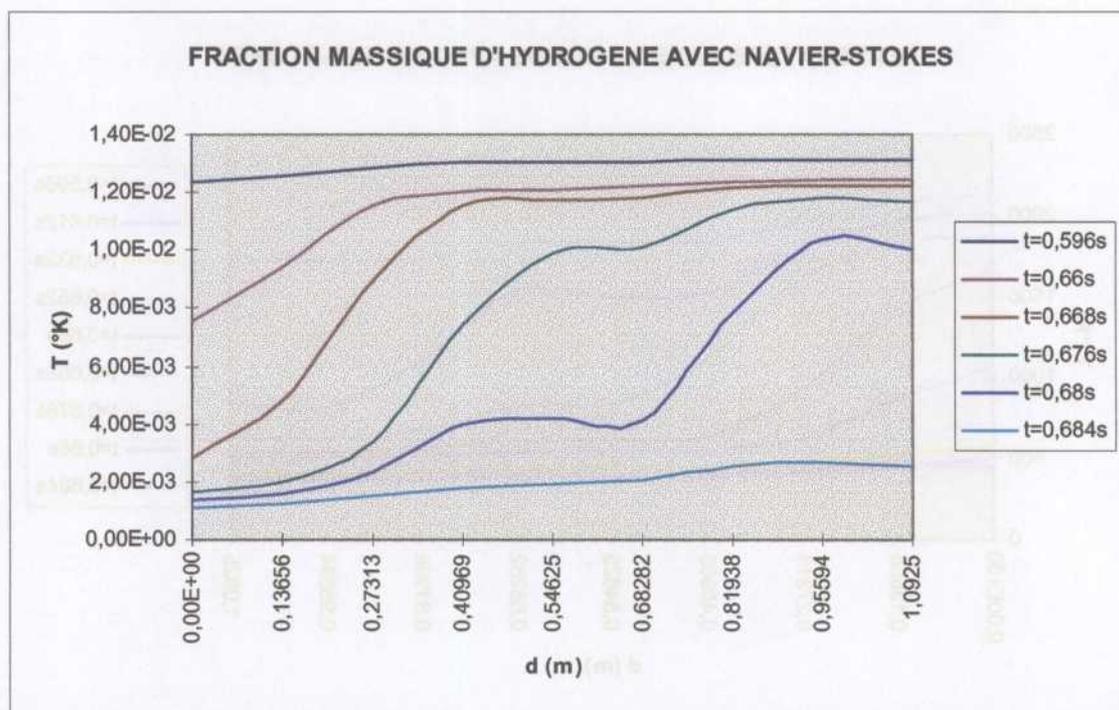
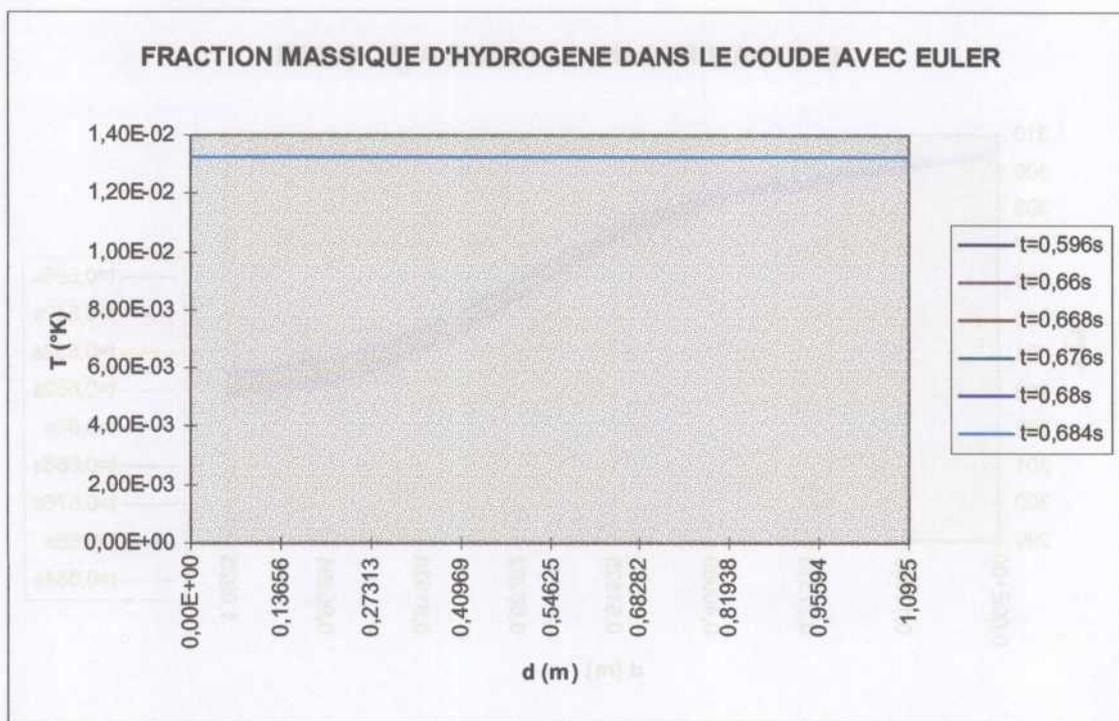
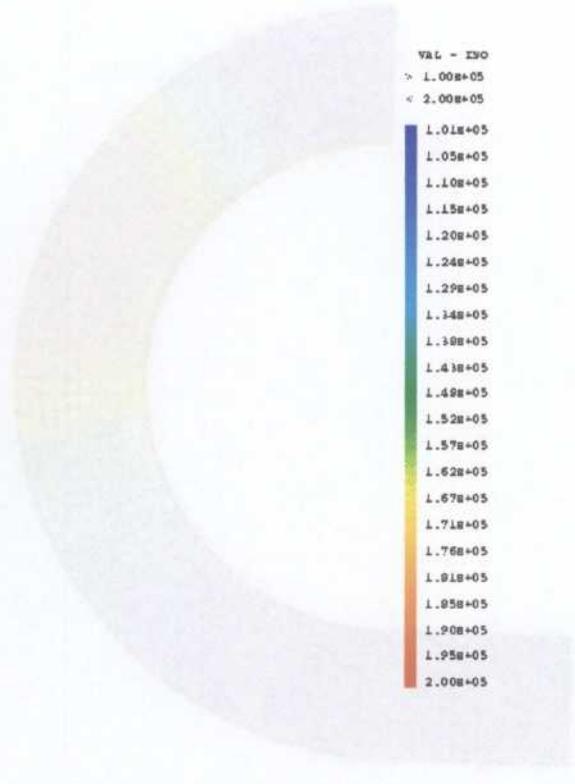


Figure 12

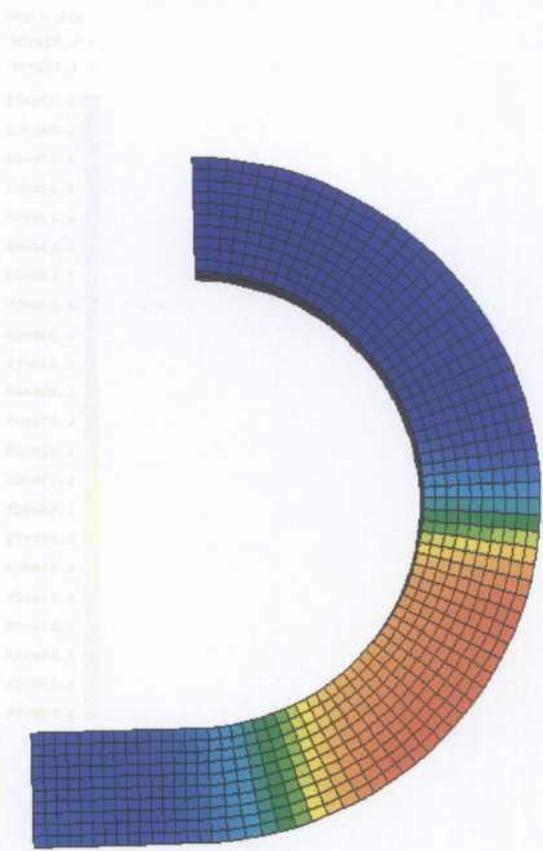


COUDE CHIMIE AVEC GLISSIERMENT 3D PRESSION (PA) - T(S) = 2.00000E-04

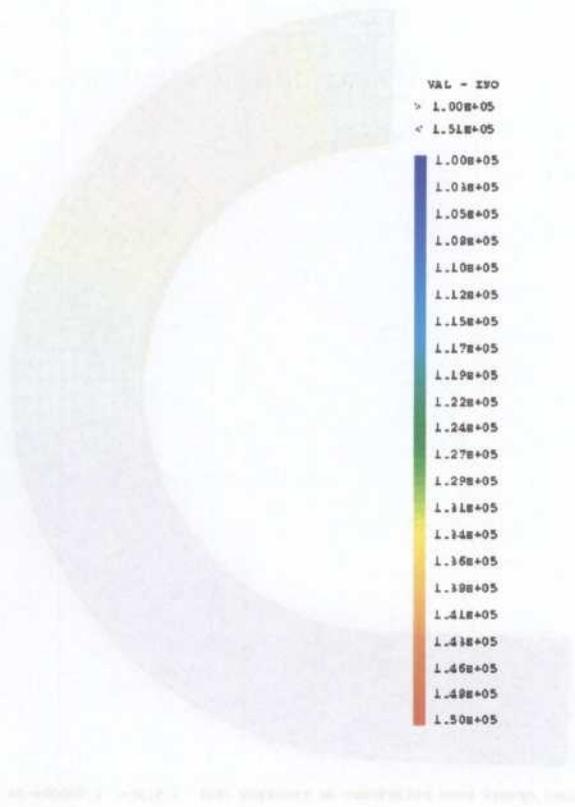


VAL - ISO  
 > 1.00E+05  
 < 2.00E+05

1.01E+05  
 1.05E+05  
 1.10E+05  
 1.15E+05  
 1.20E+05  
 1.24E+05  
 1.29E+05  
 1.34E+05  
 1.38E+05  
 1.43E+05  
 1.49E+05  
 1.52E+05  
 1.57E+05  
 1.62E+05  
 1.67E+05  
 1.71E+05  
 1.76E+05  
 1.81E+05  
 1.85E+05  
 1.90E+05  
 1.95E+05  
 2.00E+05



COUDE CHIMIE AVEC GLISSIERMENT 3D PRESSION (PA) - T(S) = 6.00000E-04



VAL - ISO  
 > 1.00E+05  
 < 1.51E+05

1.00E+05  
 1.03E+05  
 1.05E+05  
 1.09E+05  
 1.10E+05  
 1.12E+05  
 1.15E+05  
 1.17E+05  
 1.19E+05  
 1.22E+05  
 1.24E+05  
 1.27E+05  
 1.29E+05  
 1.31E+05  
 1.34E+05  
 1.36E+05  
 1.39E+05  
 1.41E+05  
 1.43E+05  
 1.46E+05  
 1.48E+05  
 1.50E+05

Figure 13

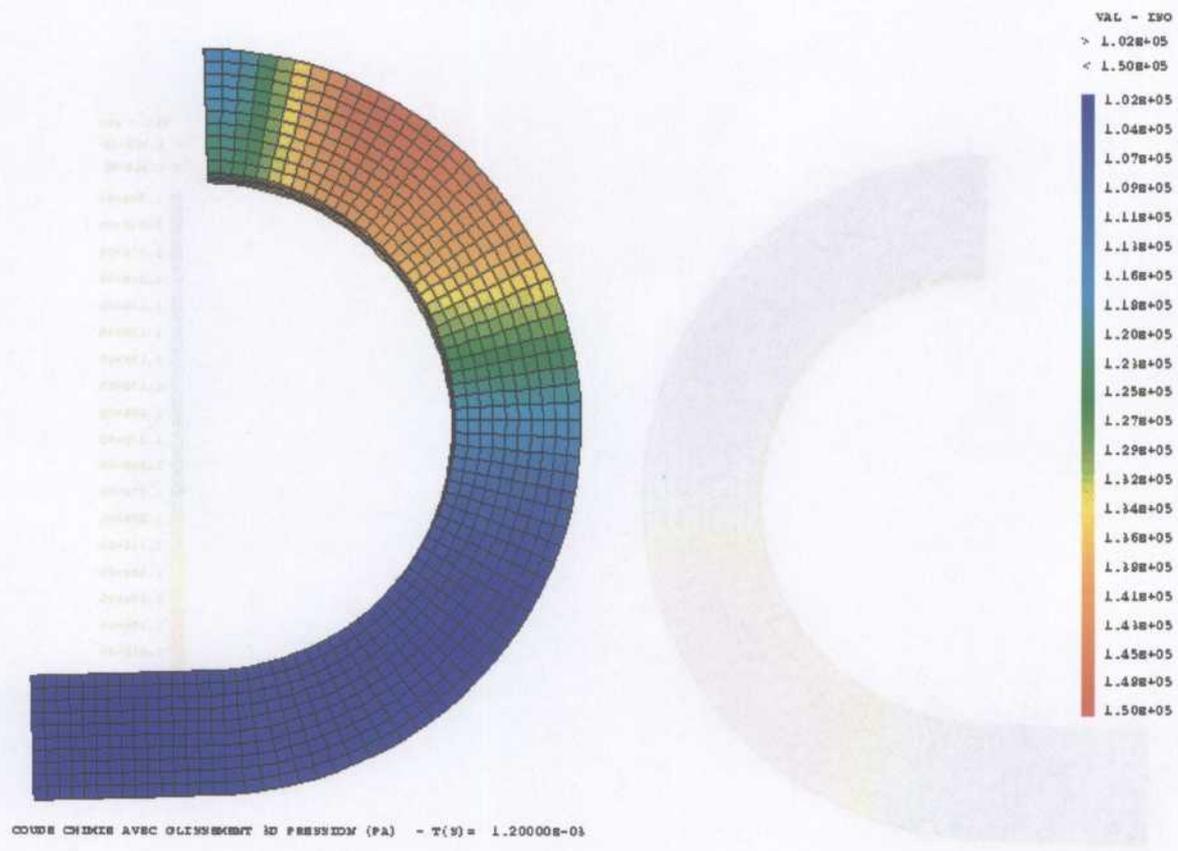
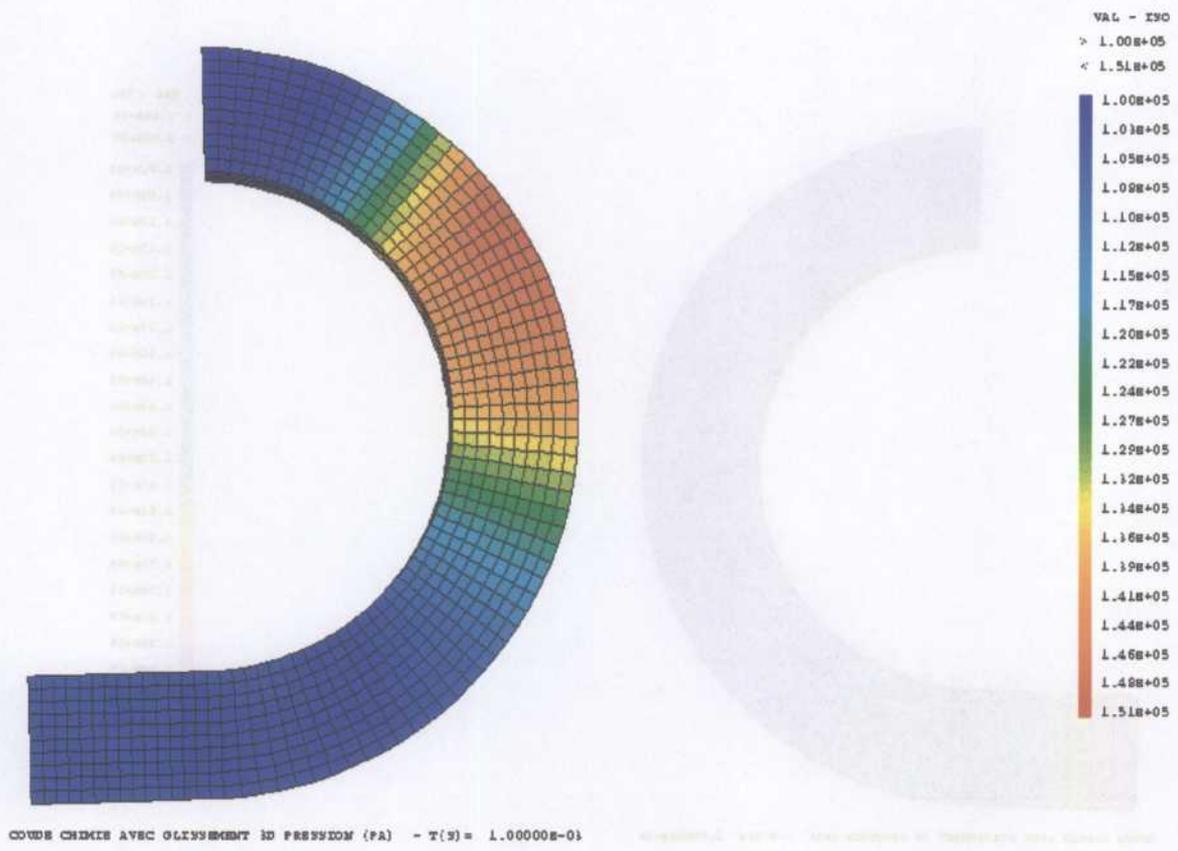


Figure 14

Figure 14

## Chapitre 4

# Calculs turbulents

### 4.1 Comparaison entre calcul laminaire et modèle en $K$ pour un monofluide

#### Cas test de la marche

Dans cette application, on présente un cas test où le fluide entrant est toujours supersonique. A l'instant initial, le nombre de MACH est égal à 3. Dans un modèle non turbulent, il apparaît une structure de choc en  $\lambda$  qui après reste stationnaire.

Le maillage est constitué de 5500 quadrilatères et les données initiales sont

Masse volumique:  $\rho = 1.4 \text{ kg.m}^{-3}$

Vitesse horizontale:  $1000 \text{ m.s}^{-1}$

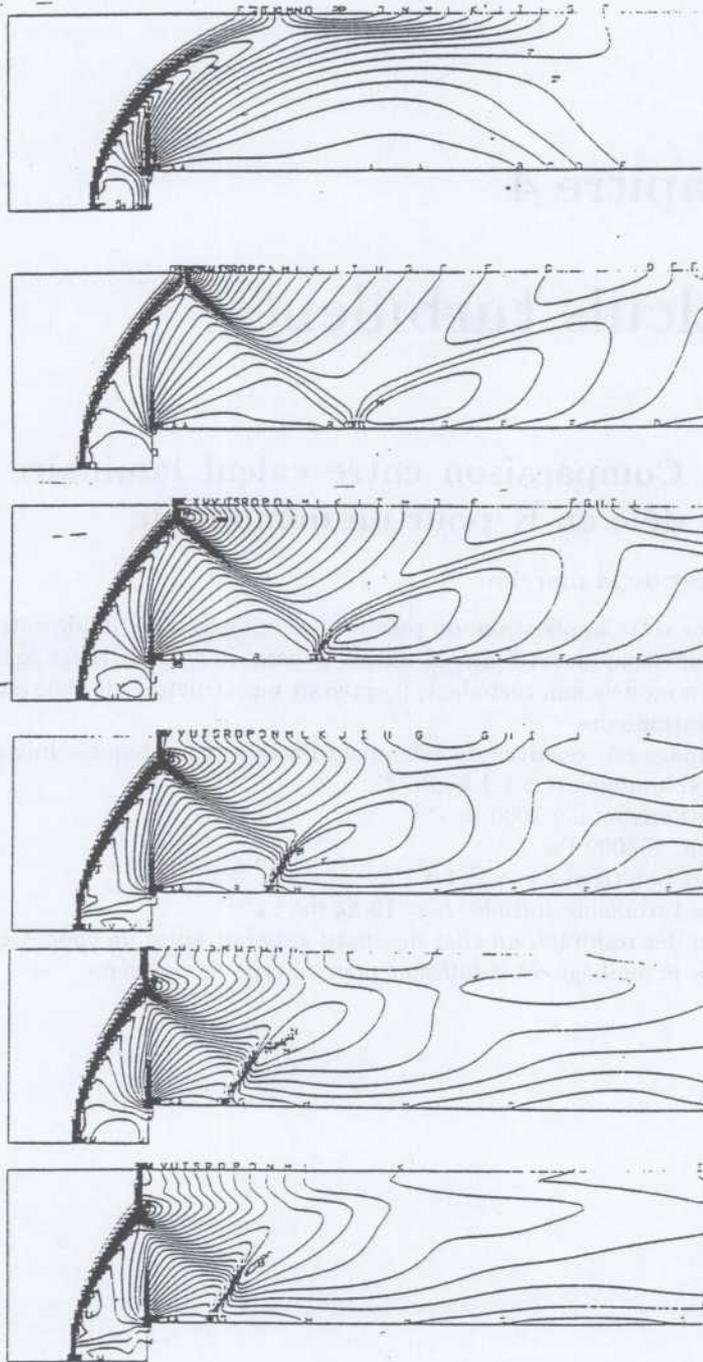
Pression: 100000 Pa

Rapport polytropique:  $\gamma = 1.4$

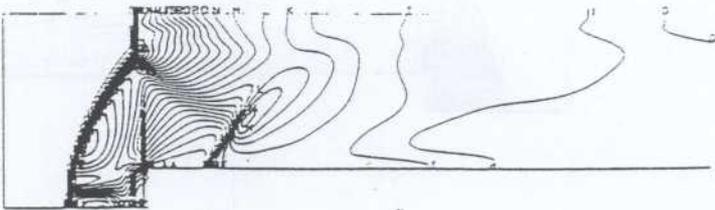
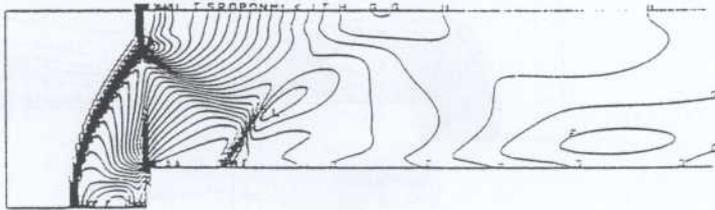
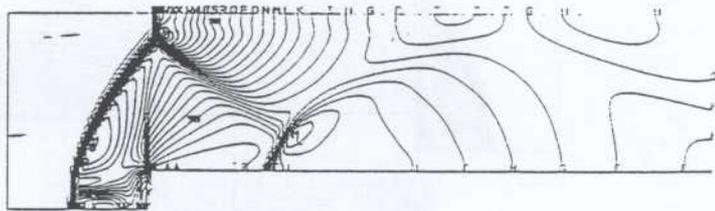
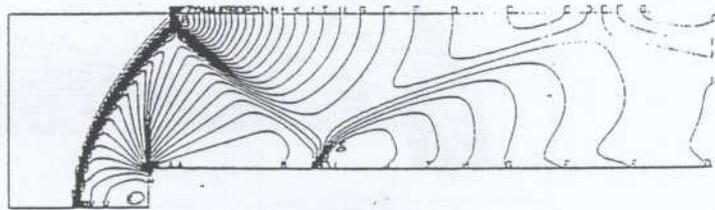
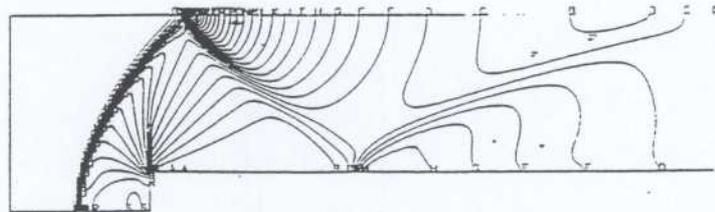
Energie turbulente initiale:  $K = 10 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}$

A la vu des résultats, un effet dissipatif apparaît après un choc. Cela est dû au fait que le maillage est insuffisant pour ce type de problème.

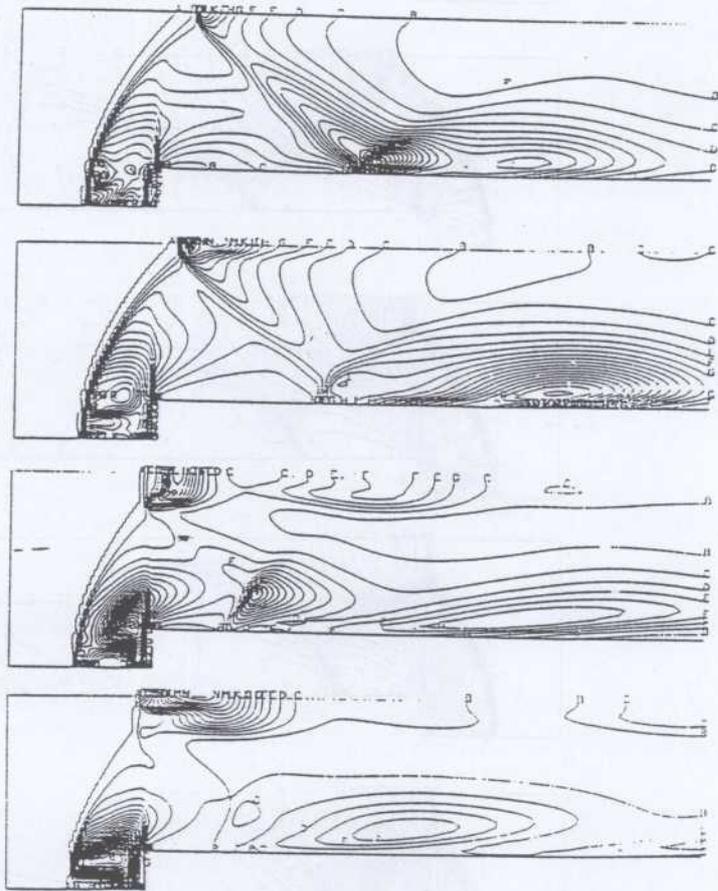
Mixing Density in  $kg/m^3$  for K-model



Pressure in  $Pa$  for K-model



Turbulence in K-model



### Comparaison dans des conditions subsoniques de calculs laminaires et K- $\epsilon$

Afin de tester cette méthode, on traite un écoulement subsonique associé à une injection de fluide pour des vitesses d'injection de l'ordre de 400m/s, ce qui correspond à un nombre de MACH de 0.4. L'objectif est de montrer la disparition de structures cohérente par suite d'effets diffusifs. Les quantités initiales sont :

Masse volumique:  $\rho = 1.4 \text{ kg.m}^{-3}$

Vitesse horizontale:  $0 \text{ m.s}^{-1}$

Pression: 1000000 Pa

Rapport polytropique:  $\gamma = 1.4$

Turbulence initiale:  $K = 2 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}$

Les valeurs à l'injection sont constantes et égales à :

masse Volumique:  $\rho = 1.4 \text{ kg.m}^{-3}$

Vitesse horizontale:  $400 \text{ m.s}^{-1}$

Pression: 1000000 Pa

Rapport polytropique:  $\gamma = 1.4$

turbulence initiale:  $K = 1000 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}$

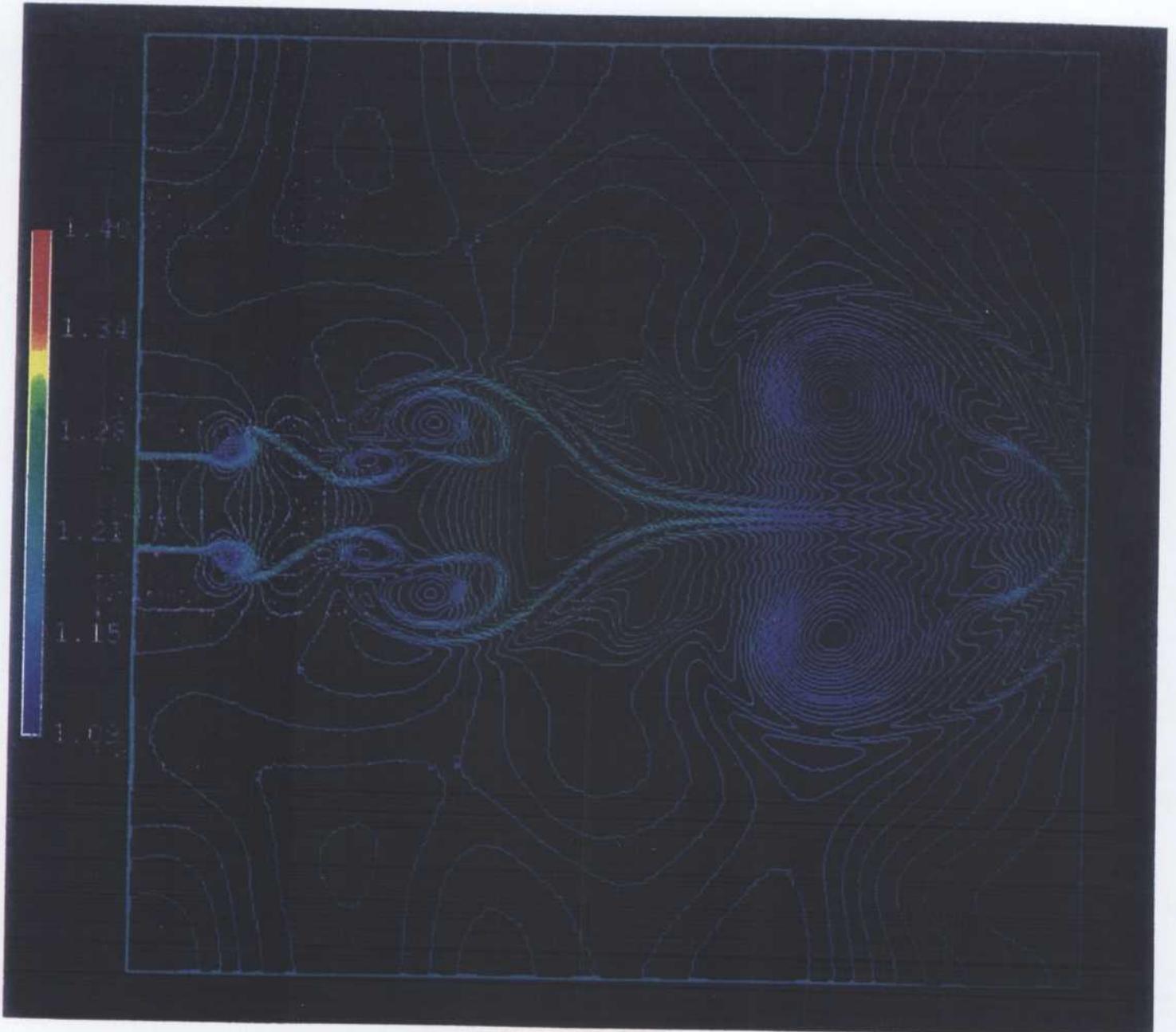
Aussi, le nombre de MACH est égal à 0.4.

Le maillage comporte 11000 quadrilatères uniformes.

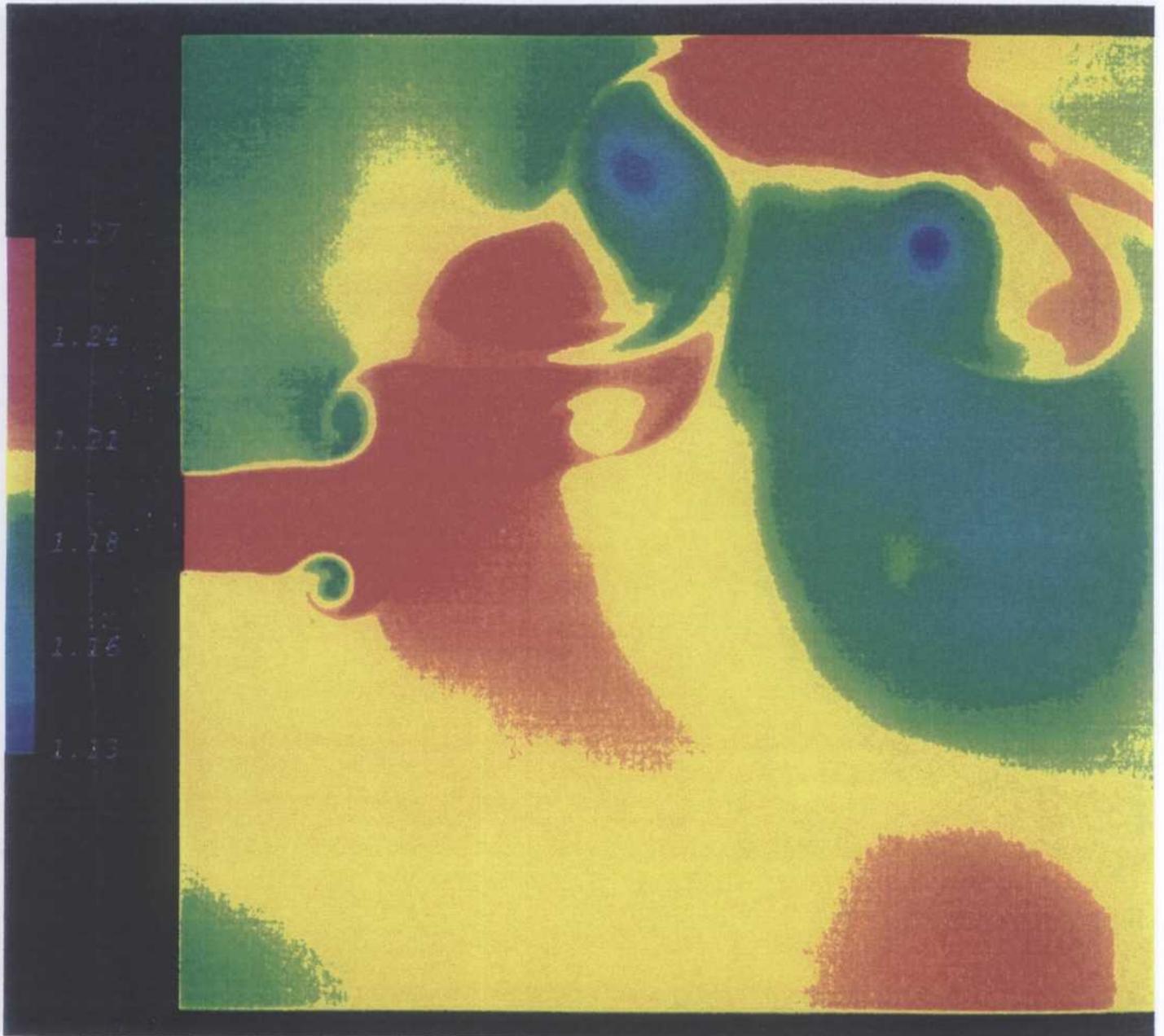
La solution laminaire détruit la symétrie au bout d'un certain temps tout en étant initialement symétrique.

D'autre part, avec un modèle K -  $\epsilon$ , les effets visqueux et la dissipation turbulente génère une solution symétrique mais diffusive.

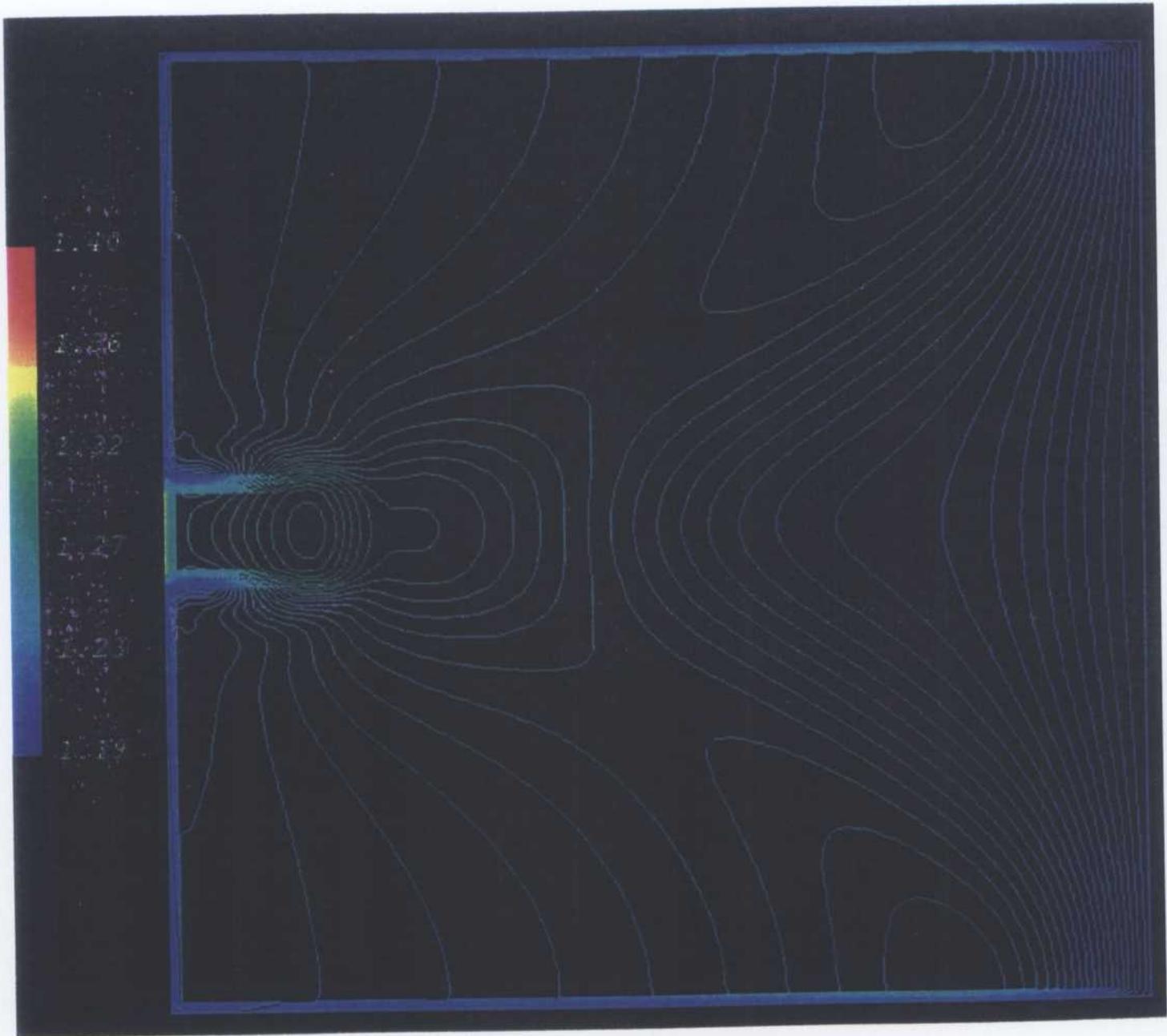
Mixing Density in  $kg/m^3$



Mixing Density in  $kg/m^3$



Solution Turbulente



### Comparaison entre modèles en K et en K- $\epsilon$

Ce cas est associé à des données expérimentales qui sont présentées dans un article de S. Barre, D. Alem, J. P. Bonnet.

L'objectif est d'étudier l'effet des ondes de choc sur une turbulence homogène. Une turbulence homogène est générée par des petites tuyères uniformément distribuées. Le fluide en sort à MACH 3 et une onde de choc apparaît au milieu de l'écoulement. La section de sortie est de  $6 \times 6 \text{ mm}^2$  et la longueur du tube est 1m. Afin de suivre correctement les structures générées, un maillage suffisant doit être construit.

Les données initiales sont les suivantes:

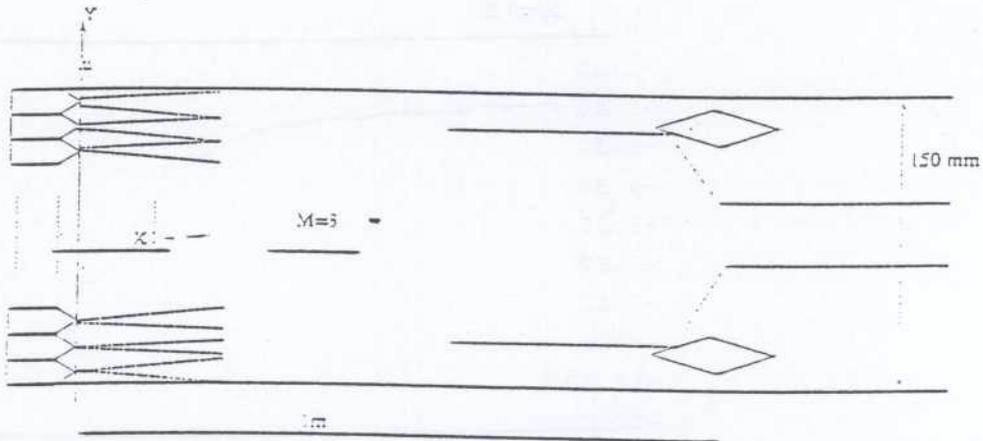
Masse volumique:  $\rho = 1.1 \text{ kg.m}^{-3}$

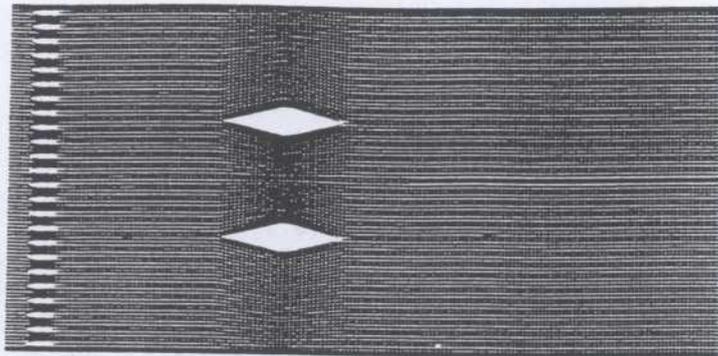
Vitesse:  $1000 \text{ m.s}^{-1}$

Pression: 90 000 Pa

Rapport polytropique:  $\gamma = 1.4$

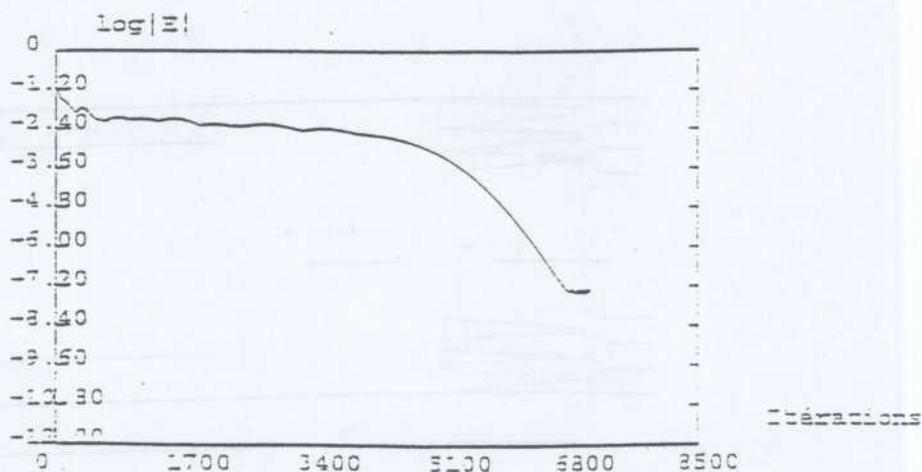
Turbulence:  $K = 10 \text{ kg.m}^{-1}.s^{-2}$





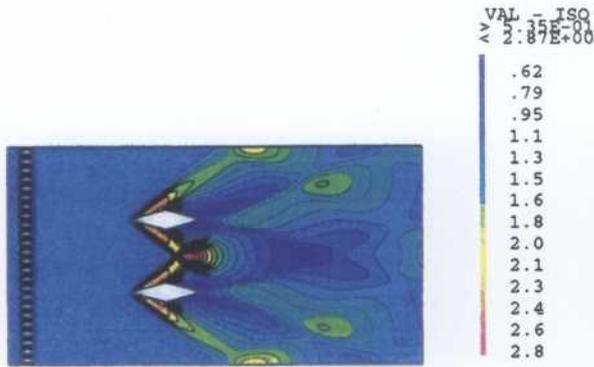
Le calcul comporte un maillage de  $96 \times 171 = 16416$  quadrilatères de pas uniforme  $dx \times dy = 1.5625^2 mm^2$ . Toutes les autres quantités géométriques sont respectées.

Au bout de 7000 pas de temps, le stationnaire est atteint. On peut noter l'évolution de l'erreur dans le temps et l'erreur correspond à la norme  $L^\infty$  de la différence entre deux itérations de la densité. On présente la solution stationnaire pour un modèle en K et compare à un modèle  $K - \epsilon$ . On pourra noter l'adéquation entre les deux résultats proche sur la pression, la densité. La seule différence notable porte sur l'énergie turbulente elle-même, mais qui est d'un ordre de grandeur inférieur par exemple à la pression.

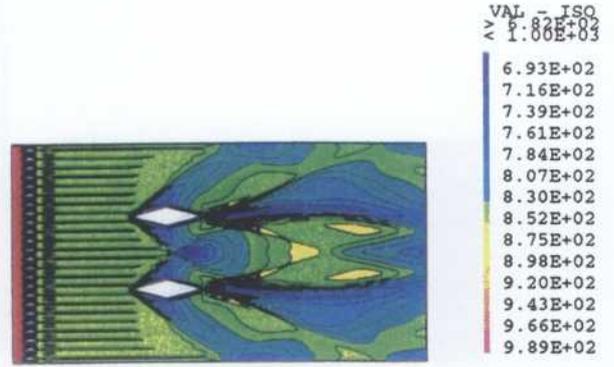


Solution convergence to Stationnarity State

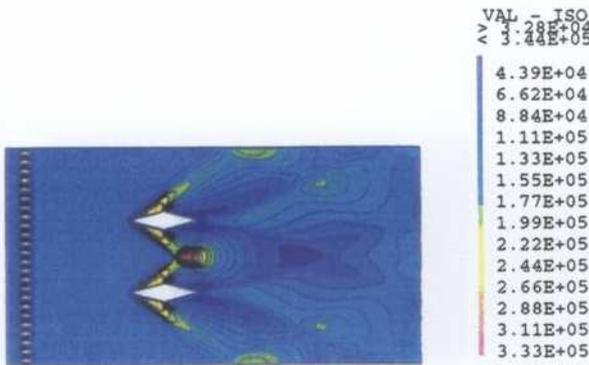
$\rho$ ,  $U$ ,  $P$ ,  $K$ , entropy, and Mach number for stationary solution (7000 itérations)



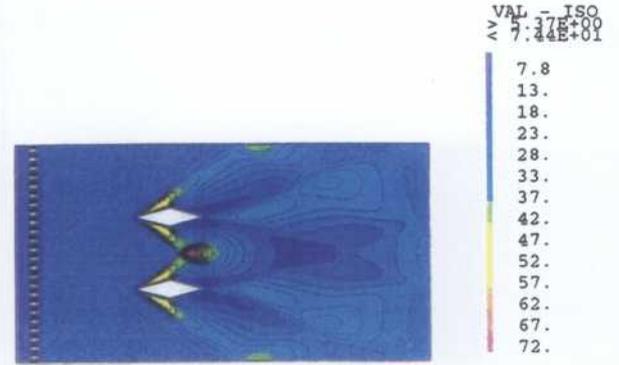
Modèle en K : Densité



Modèle en K : Vitesse



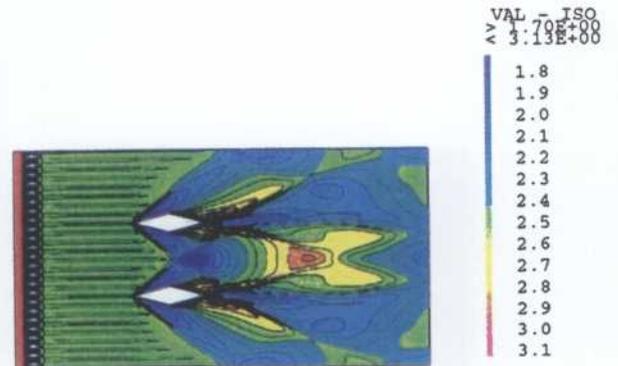
Modèle en K : Pression



Modèle en K : Turbulence

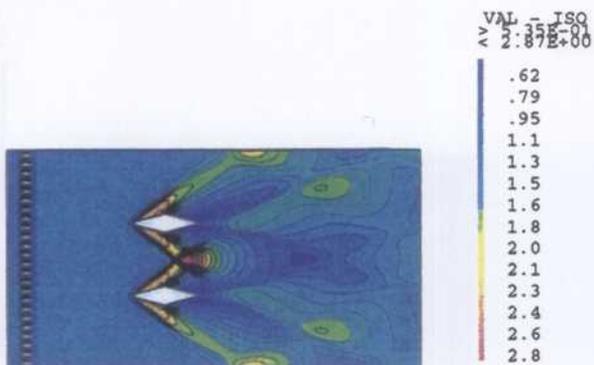


Modèle en K : Entropie



Modèle en K : Nombre de MACH

Comparison between K and  $K - \epsilon$  models at Stationnary State :



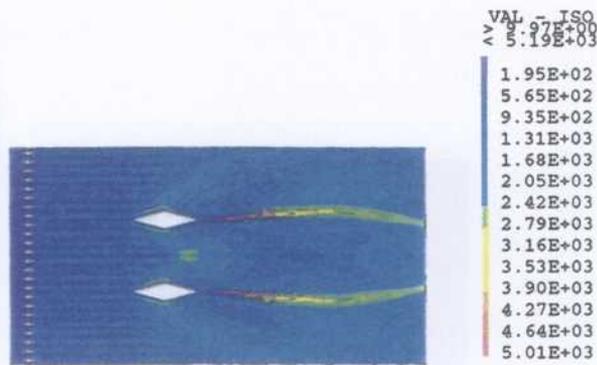
Modèle en K : Densité



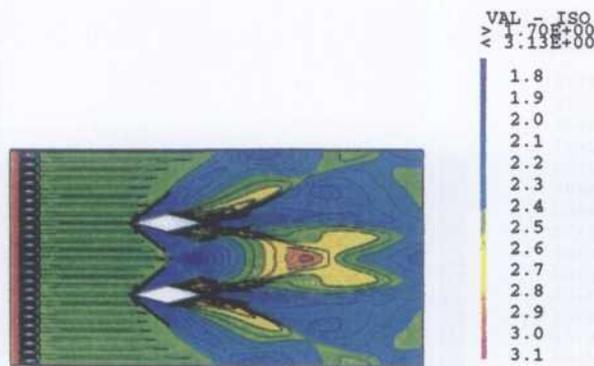
Modèle K-eps : Densité



Modèle en K : Turbulence



Modèle K-eps : Turbulence



Modèle en K : Nombre de MACH



Modèle K-eps : nombre de MACH

## Chapitre 5

# Méthodes Implicites

Dans cette partie, il s'agit de mettre en évidence l'apport des méthodes totalement implicites en dynamique des gaz.

### 5.1 Cas test de SOD

Soient les données classiques du tube à choc de SOD.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } x \in ]0, 0.5[ \left\{ \begin{array}{l} \rho_L = 10 \\ u_L = 0. \\ P_L = 10. \end{array} \right. \\ \\ \text{pour } x \in ]0.5, 1[ \left\{ \begin{array}{l} \rho_R = 1 \\ u_R = 0. \\ P_R = 1. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Différents maillages ont été testés : 100 mailles (figure 1), 200 mailles (figure 2). Dans chaque cas on peut noter à CFL donné l'apport au niveau de la précision d'un maillage plus fin. D'autre part, le calcul converge pour tout type de CFL et conserve la positivité des quantités comme la masse volumique et la pression. De plus, un CFL donné correspond à une interaction des ondes très distincte de celle attendue pour des CFL plus petits que 1. Les figures 3,4,5 montrent la convergence des méthodes.

La figure 6 montre à la réflexion l'intérêt du respect du CFL petit.

## 5.2 Cas test de COLLELA

Il s'agit d'un cas plus sévère défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } x \in ]0, 0.6[ \left\{ \begin{array}{l} \rho_L = 10^3 \\ u_L = 0. \\ P_L = 10^3. \end{array} \right. \\ \text{pour } x \in ]0.6, 0.9[ \left\{ \begin{array}{l} \rho_M = 10^{-2} \\ u_M = 0. \\ P_M = 10^{-2}. \end{array} \right. \\ \text{pour } x \in ]0.9, 1[ \left\{ \begin{array}{l} \rho_R = 10^2 \\ u_R = 0. \\ P_R = 10^2. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (5.2)$$

Les résultats sont obtenus pour des CFL de 1 jusqu'à 50 qui montre qu'en fonction du CFL, l'interaction des ondes s'opère de manière différente (figure 7). La conclusion est que même si la méthode autorise des CFL très grands, l'interaction des ondes demande de respecter un maximum au niveau du CFL, maximum qui dépend du problème posé et qui est souvent assuré pour un CFL plus petit que 1, mais qui remet en cause l'usage des méthodes implicites.

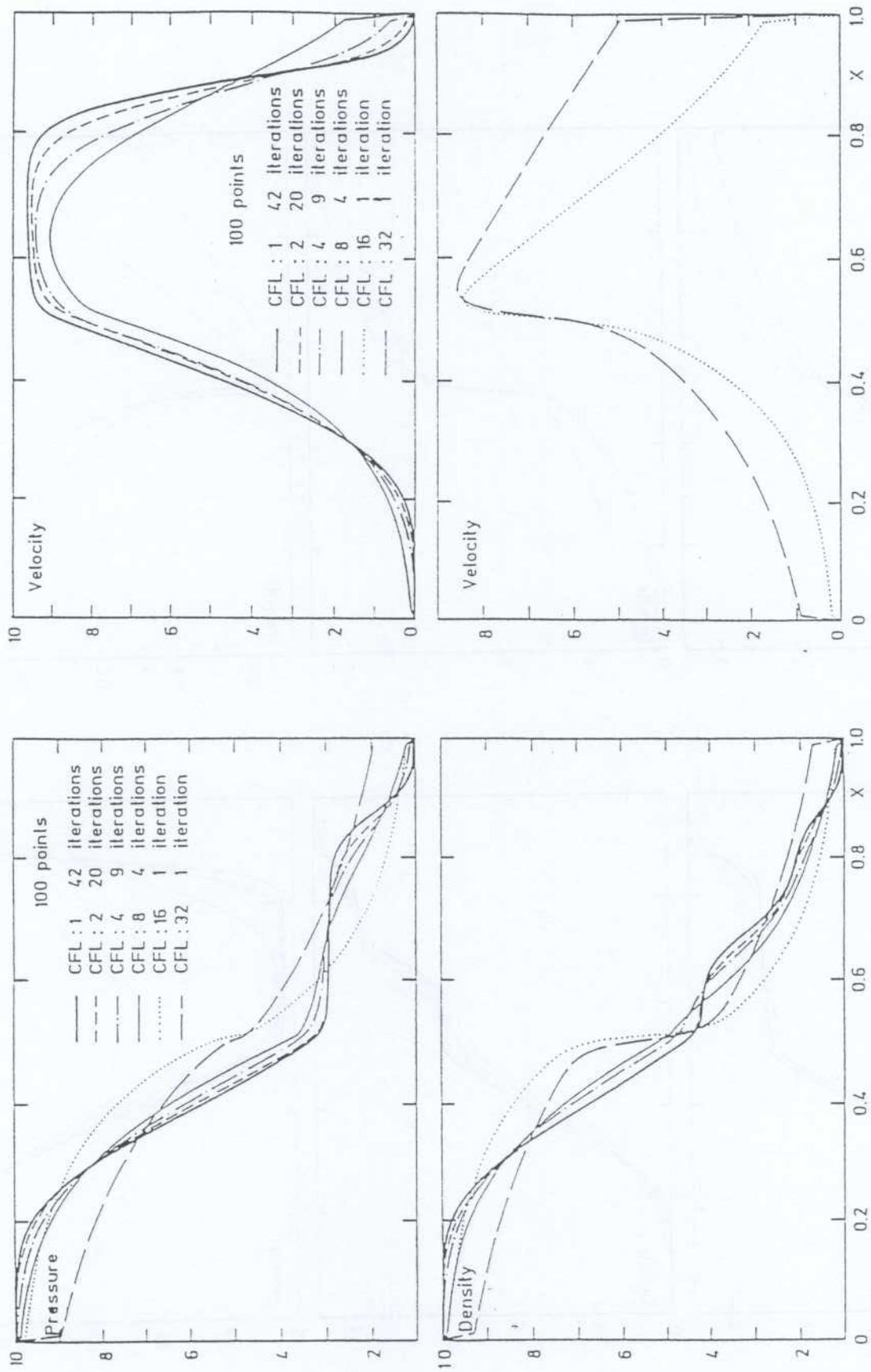


FIGURE 1 : Shock tube problem (100 points)

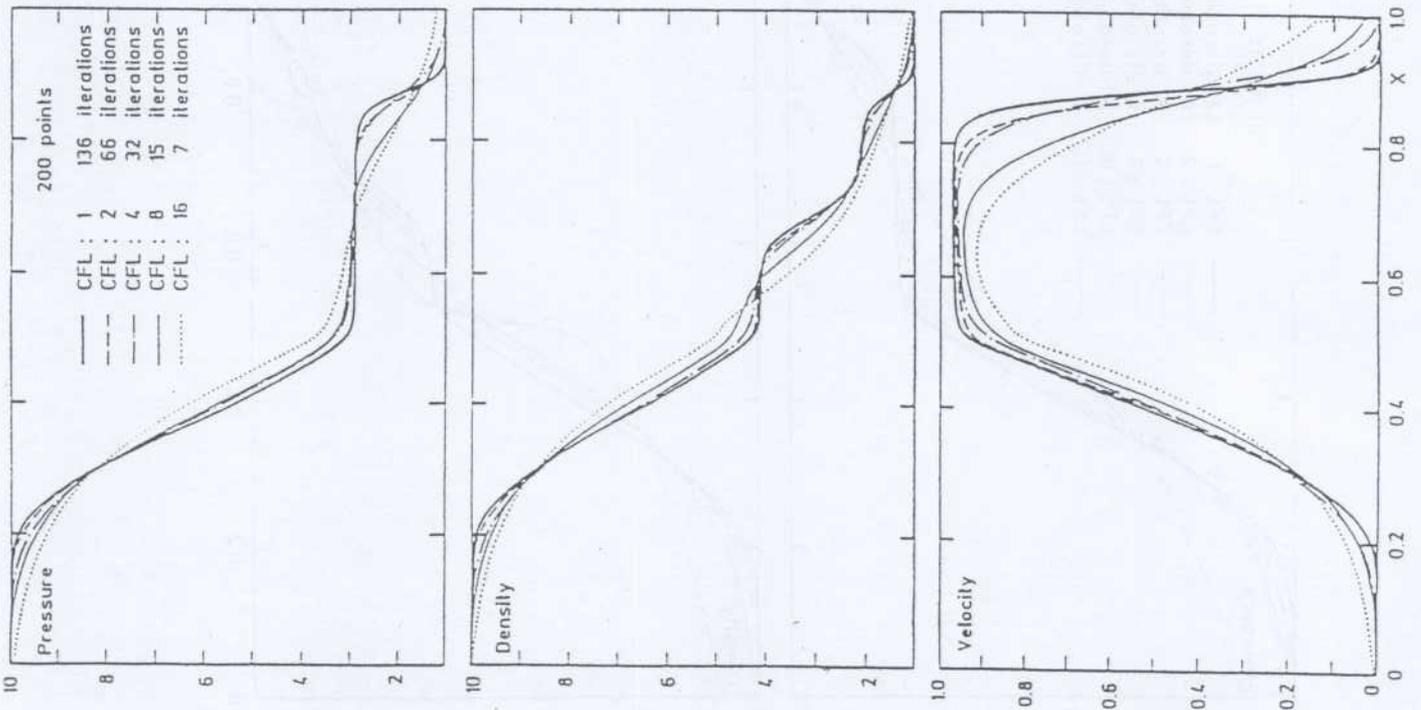
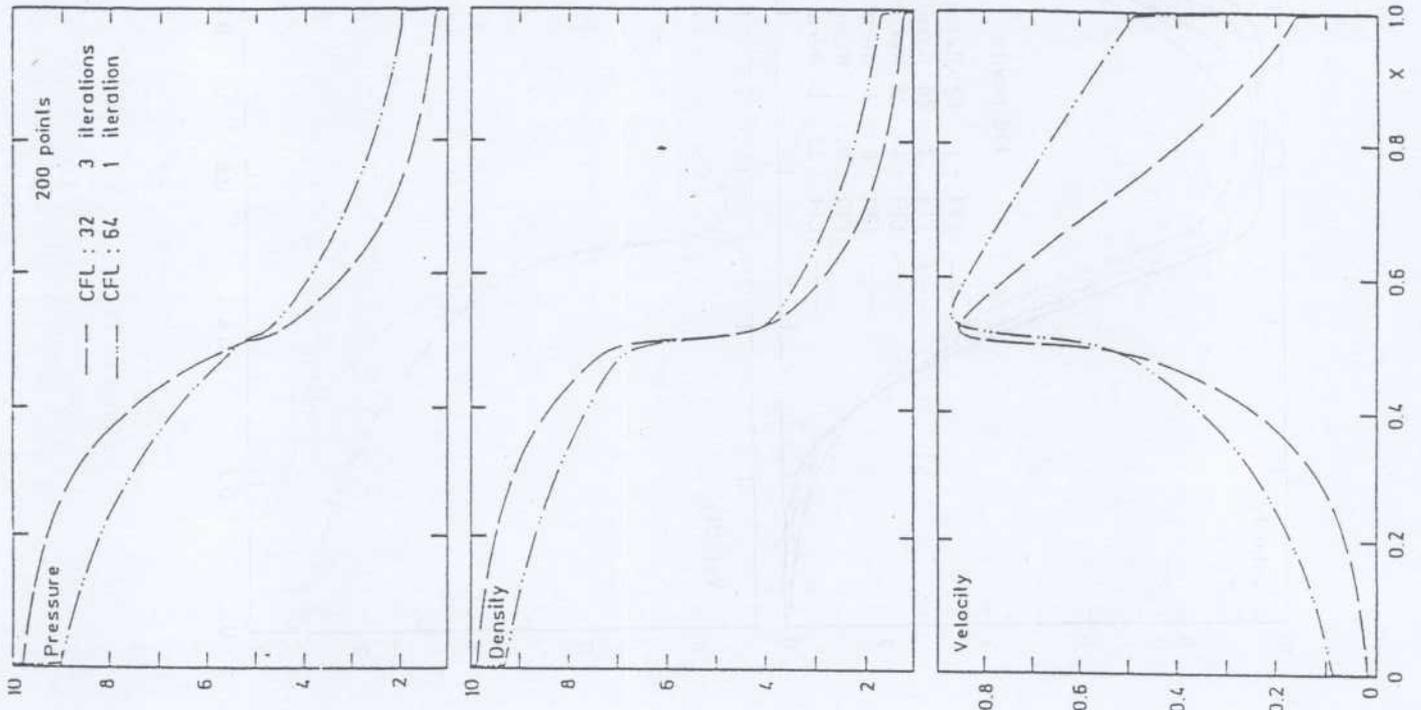


FIGURE 2 : Shock tube problem (200 points)

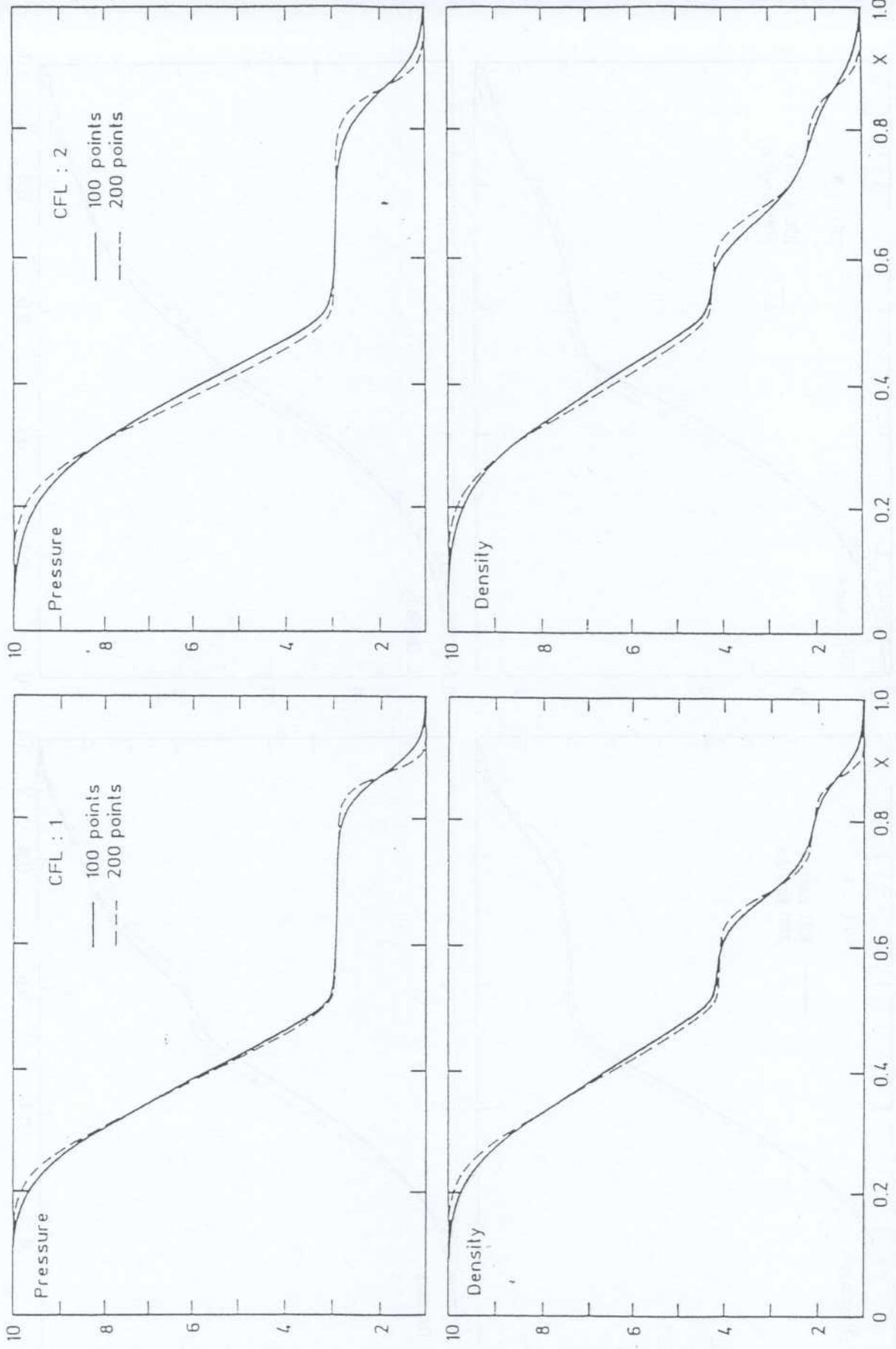


FIGURE 3 : Comparaison for CFL = 1 and 2

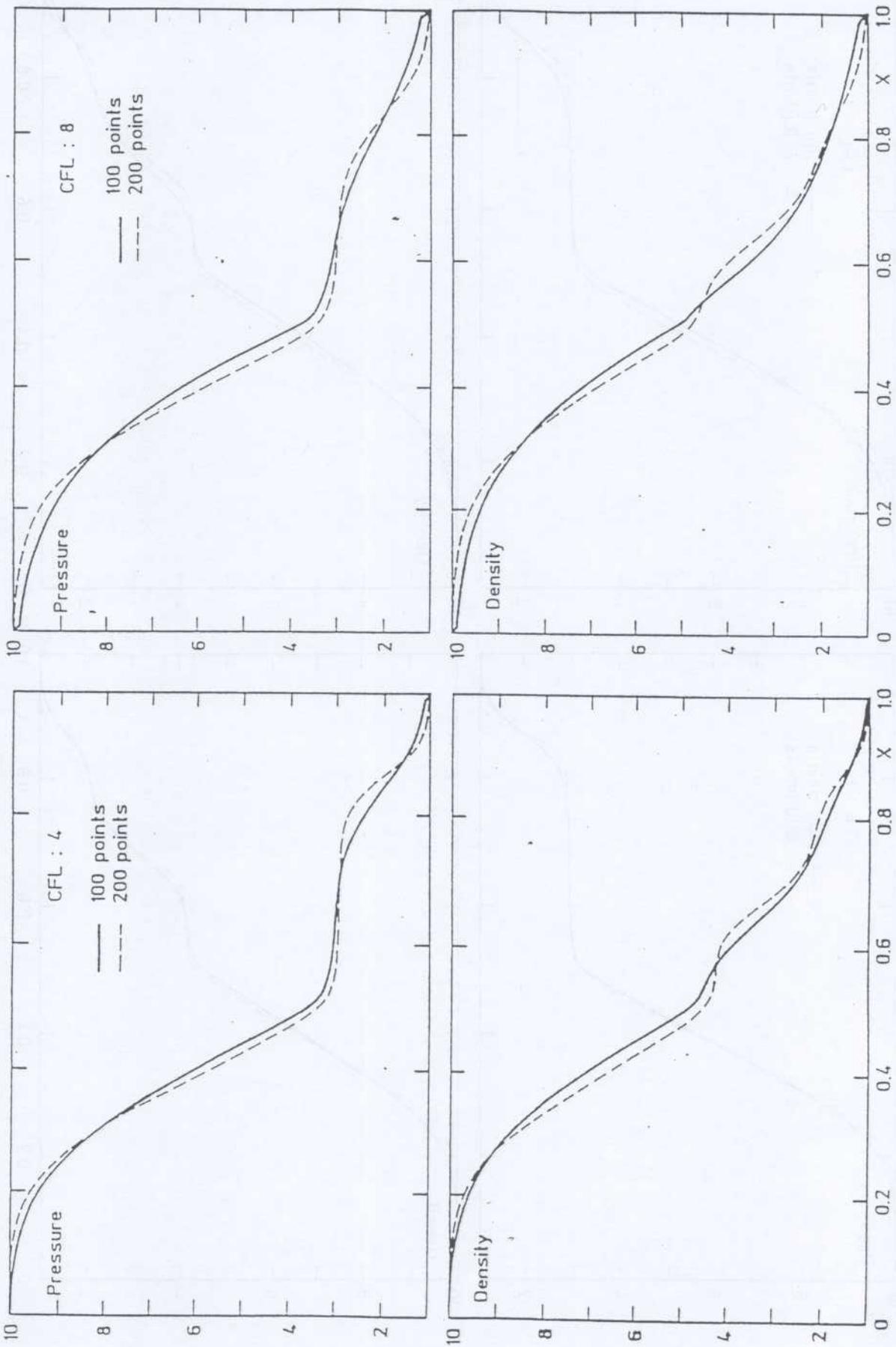


FIGURE 4 : Comparaison for CFL = 4 and 8

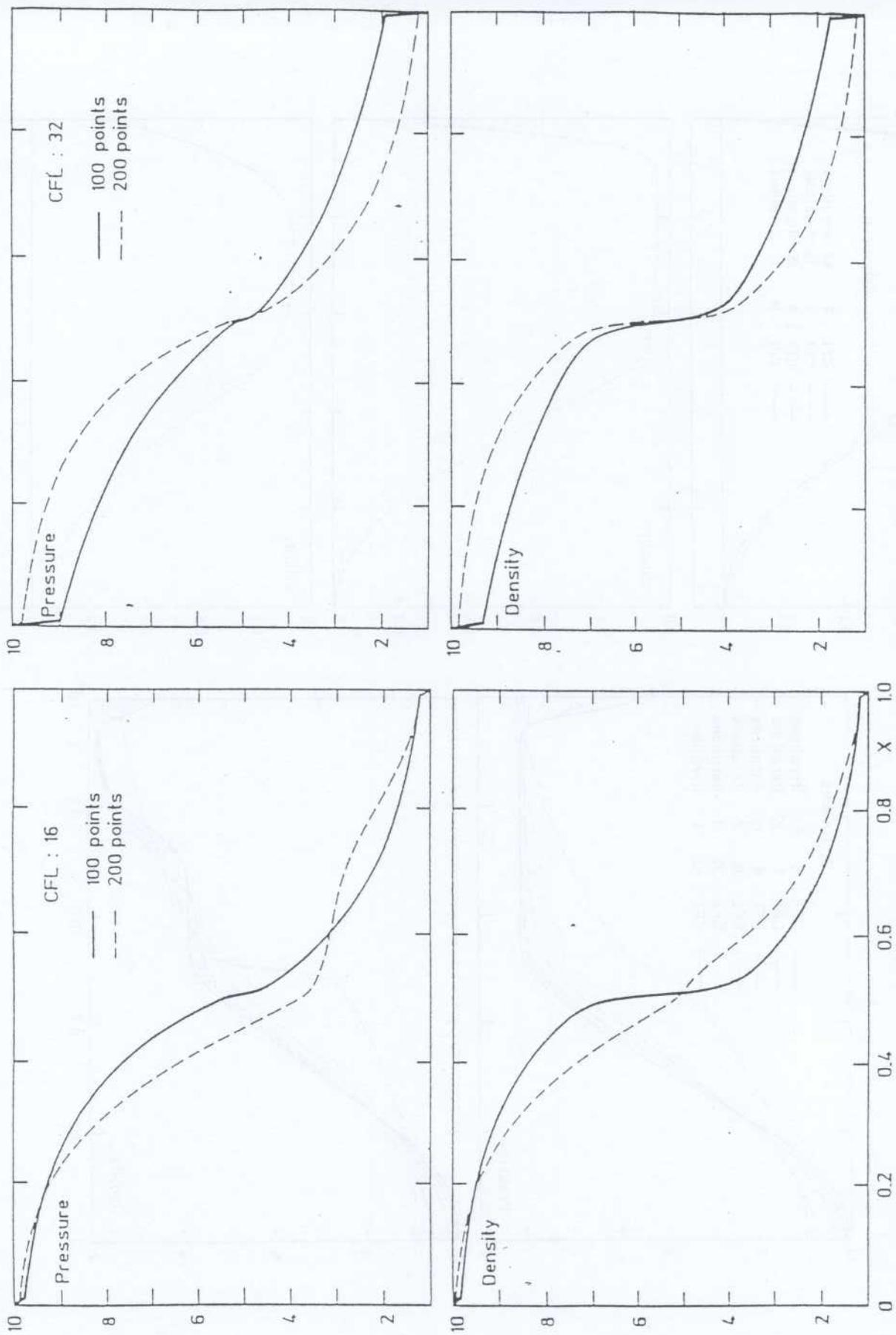


FIGURE 5 : Comparaison for CFL = 16 and 32



FIGURE 6 : Reflection with 200 points in shock tube problem

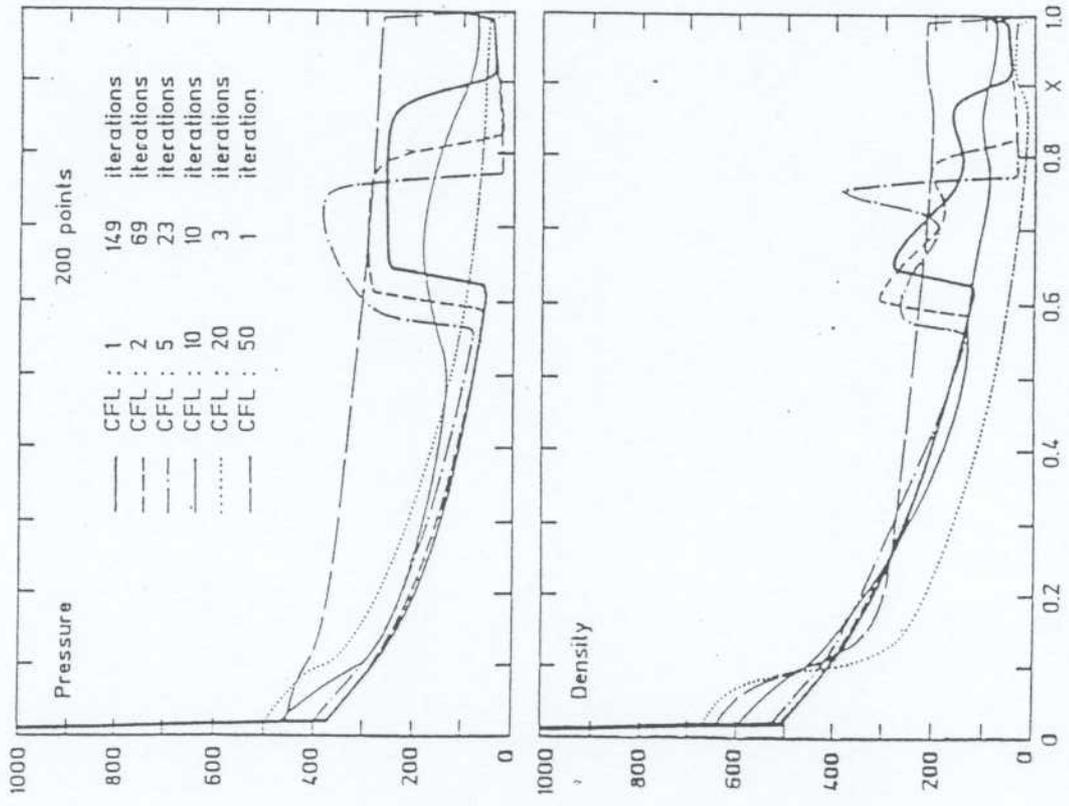
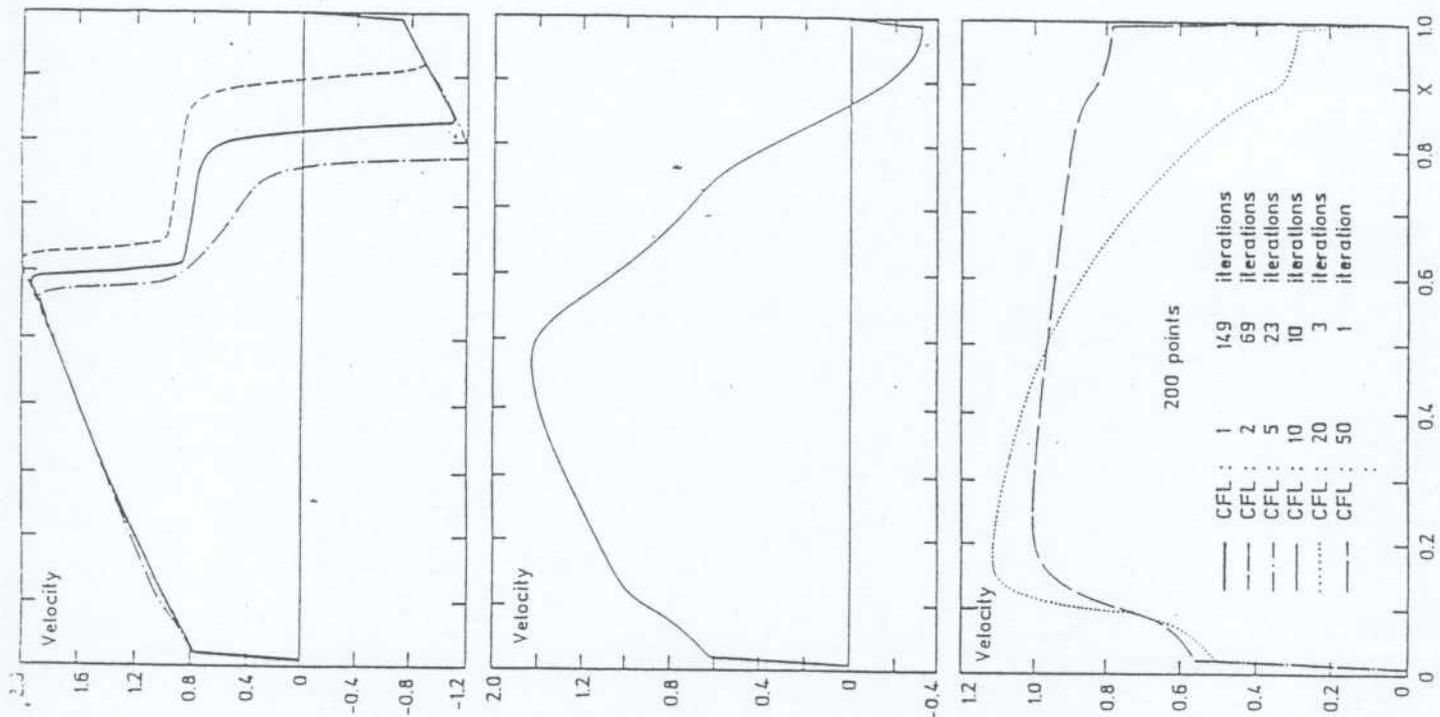


FIGURE 7 : Collela test tube

## Chapitre 6

# Etudes couplées EULER-MAXWELL

### 6.1 Cas 1D

Dans un premier temps, on compare par rapport à une solution analytique, par exemple un cas correspondant à  $E_n = 0$ . Dans cet exemple,  $E_n$  reste égal à zéro et le système se réduit à un problème hydrodynamique compressible avec une nouvelle pression

$$\bar{P} = P + \frac{E^2}{2}$$

Aussi est il possible d'obtenir une solution analytique en changeant la loi de pression. On a pour quantités initiales

Pour  $x < 0$  alors

$$U_L = (\rho, u, v, w, E_x, E_y, E_z, p)^t = (1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1000)^t$$

Pour  $x > 0$  alors

$$U_R = (\rho, u, v, w, E_x, E_y, E_z, p)^t = (0.125, 0, 0, 0, 0, -1, -1, 0.1)^t$$

le rapport polytropique est  $\gamma = 1.4$ .

La solution est donnée en Figure 1 pour la pression, la vitesse verticale  $y$ , la composante  $z$  du champ électrique.

Les calculs sont effectués sur une grille de 100 puis 400 mailles. Les Figures 2 montrent les variations de la densité  $\rho$ , de la pression  $P$ , de la composante  $y$  de la vitesse ( $u_y$ ) et la composante  $z$  du champ électrique ( $E_z$ ) et sont comparées à la solution analytique.

Tous les calculs sont effectués avec un nombre de COURANT de 0.5.

De même, un équivalent du tube de SOD est proposé dans lequel  $E_n \neq 0$  ou  $E_x \neq 0$  et cas n'a pas de solution analytique.

Pour  $x < 0$  alors

$$U_L = (\rho, u, v, w, E_x, E_y, E_z, p)^t = (1, 0, 0, 0, 0.75, 1, 1, 1)^t$$

et pour  $x > 0$

$$U_R = (\rho, u, v, w, E_x, E_y, E_z, p)^t = (0.125, 0, 0, 0, 0.75, -1, -1, 0.1)^t$$

La Figure 3 présente la masse volumique, la pression et la composante y de la vitesse.

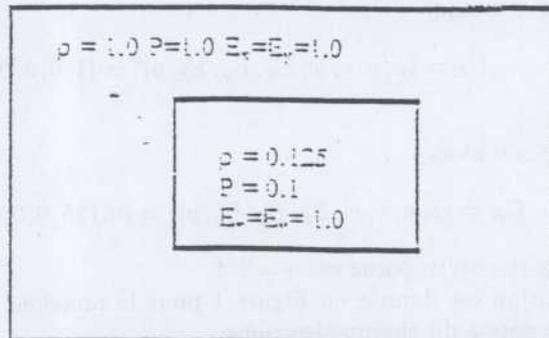
Les illustrations de la figure 4 montrent respectivement la composante x de la vitesse, la composante z de la vitesse, la composante x du champ électrique, la composante z du champ électrique avec 400 mailles. Il est clair qu'aucune des composantes ne s'annule si elle n'est pas nulle initialement.

## 6.2 Cas 2D

Il s'agit d'une généralisation du tube à choc de SOD et les valeurs initiales sont données sur la figure jointe.

Dans ce cas, les calculs sont conduits avec 2500 mailles.

Pour cette application, la masse volumique, la pression, la composante x de la vitesse, la composante y de la vitesse, la composante z de la vitesse, les vitesses d' "Alfen" (composantes y et z) sont représentées.



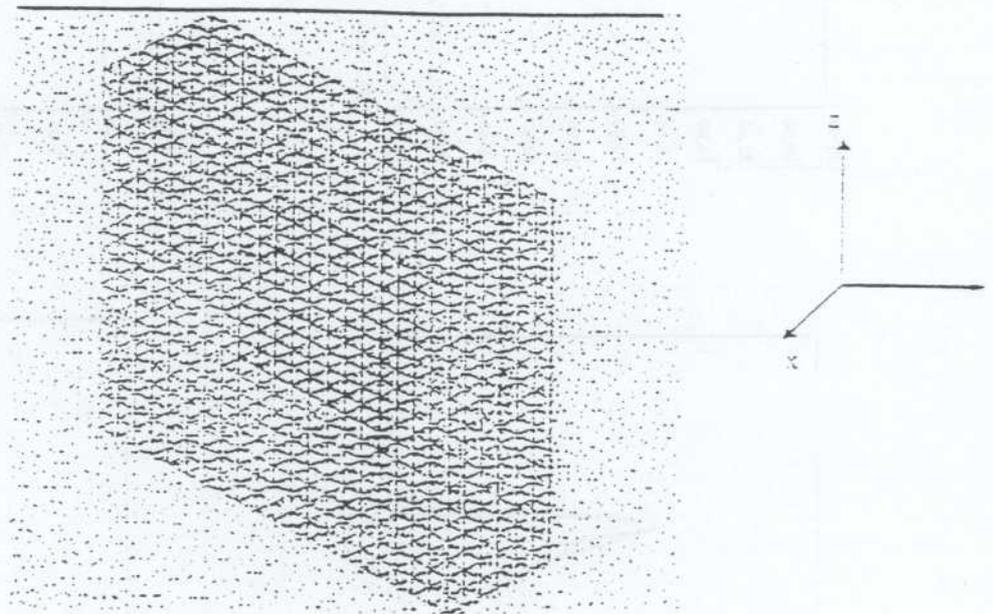
Sur la figure 5, la masse volumique est tracée et montre un aspect circulaire. Pour la pression, il en est de même.

Aussi, dans des 2D, peut on mettre en évidence l'effet des ondes d' ALFEN. La

Figure 6 présente la composante x de la vitesse, qui respecte la symétrie et les deux autres composantes de la vitesse qui ont un aspect global 2D. Il en est de même pour les vitesses d' ALFEN (qui sont en opposition l'une avec l'autre)

### 6.3 Cas 3D

Le même type de calcul est conduit en 3D. Le problème est initialement un domaine à basse pression inclus dans un autre à haute pression.



Les conditions initiales sont

$$U_{out} = (\rho, u, v, w, E_x, E_y, E_z, P)^t = (1., 0, 0, 0, 1., 1., 1., 1.)^t$$

et

$$U_{in} = (\rho, u, v, w, E_x, E_y, E_z, P)^t = (0.125, 0, 0, 0, 1., 1., 1., 0.1)^t$$

On représente l'évolution des trois composantes de la vitesse d' ALFEN où

$$(u_{Ai} = \frac{E_i}{\sqrt{\rho}})$$

Les figures 7,8 et 9 montrent que la symétrie initiale est respectée et que les ondes d' ALFEN peuvent se développer. Le problème est réellement 3D et les composantes sont toutes différentes les unes des autres.

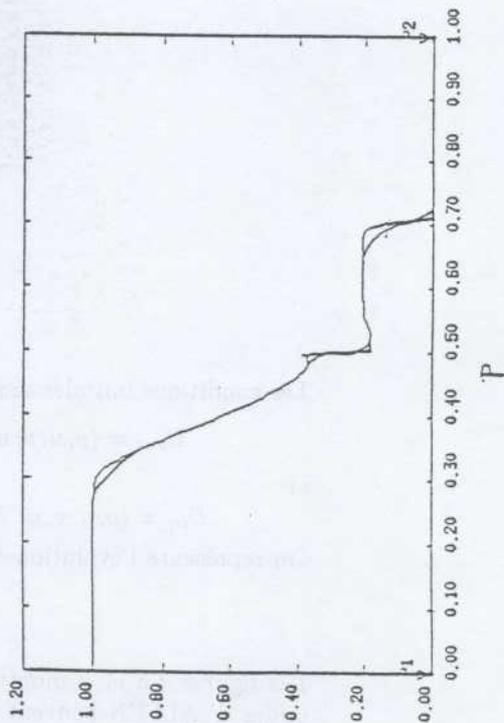
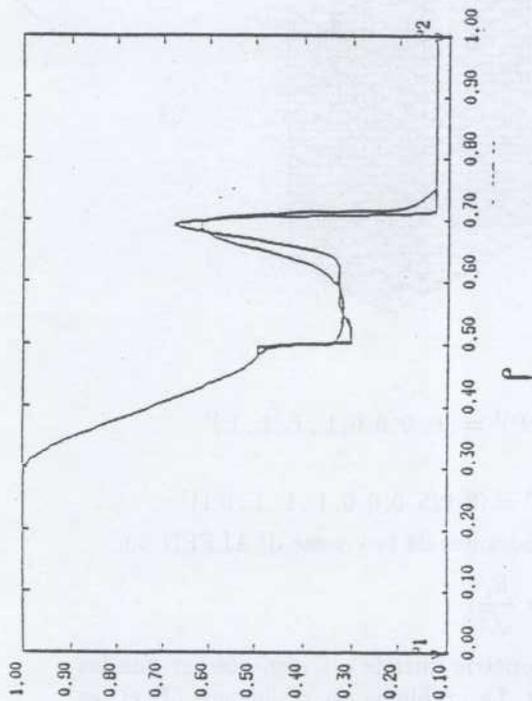
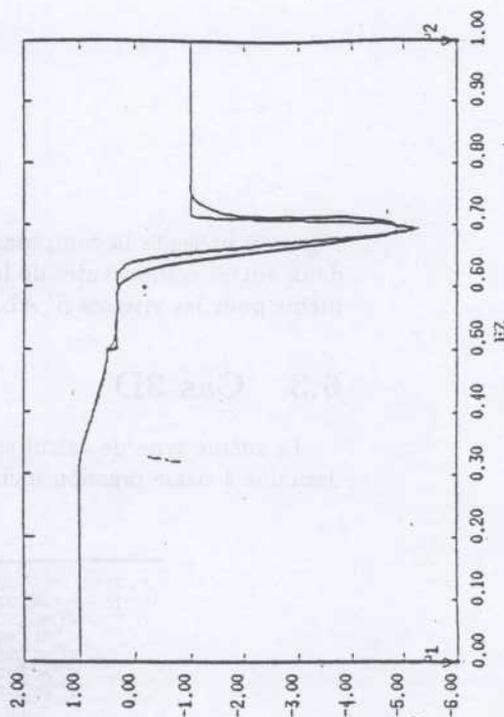
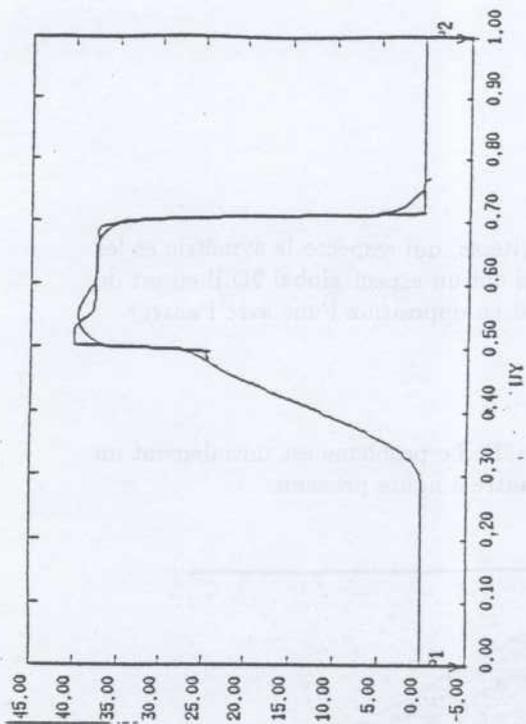


Figure 1: : Test 1D  $\rho, P, u_y, E_x$  for 100 meshes

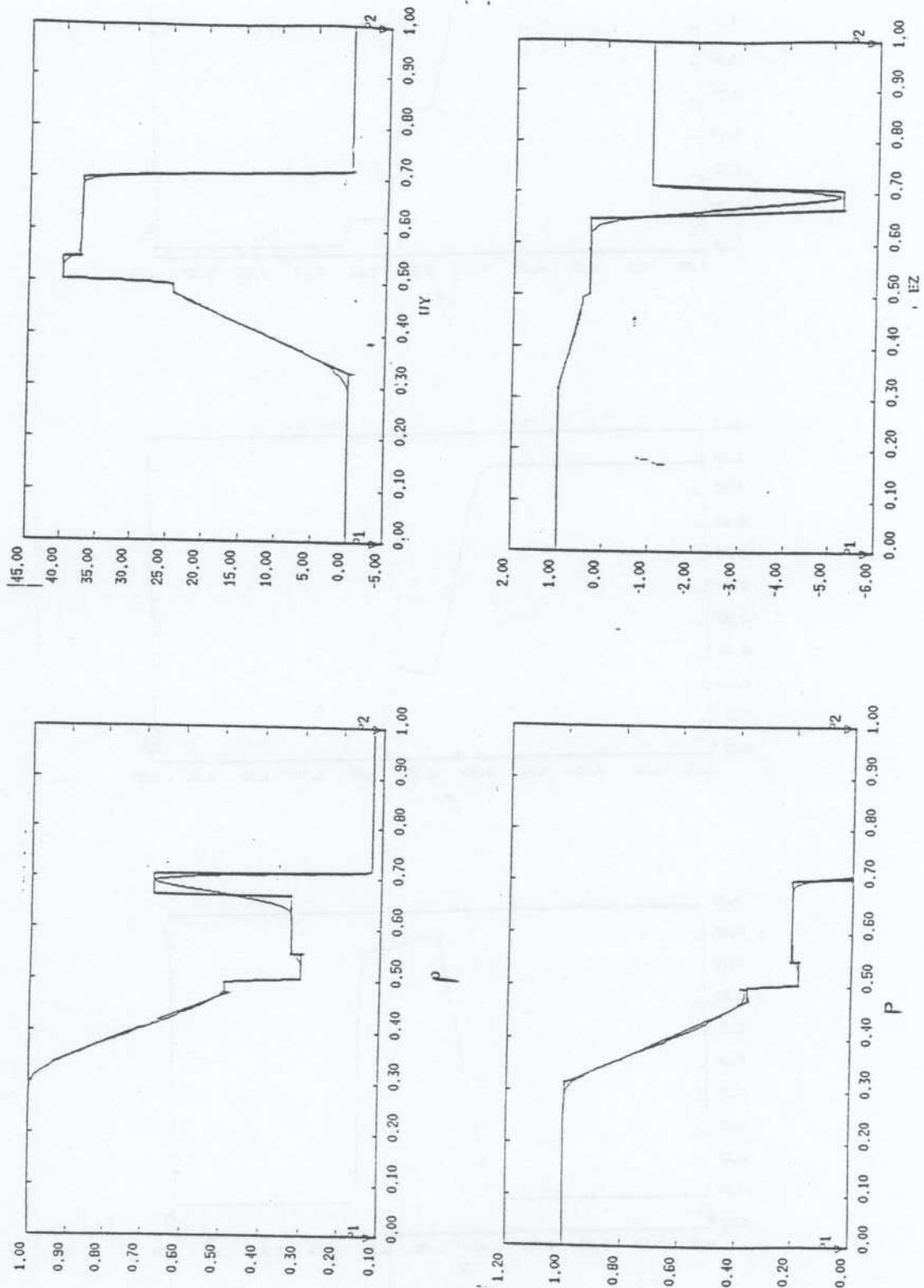


Figure 2: Test 1D  $\rho, P, u_y, E_z$  for 400 meshes

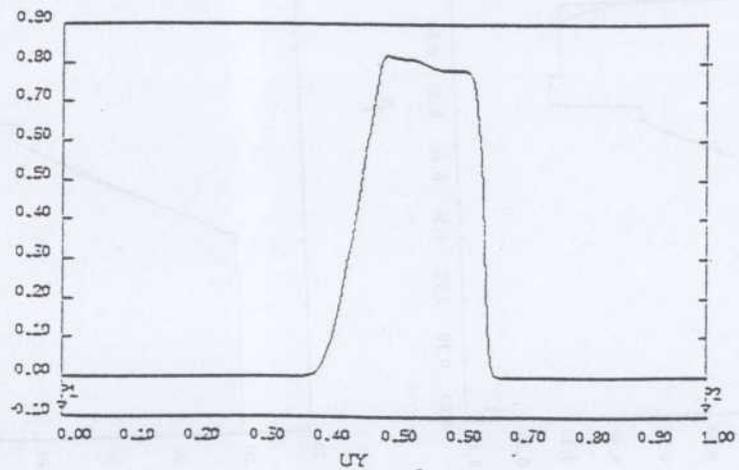
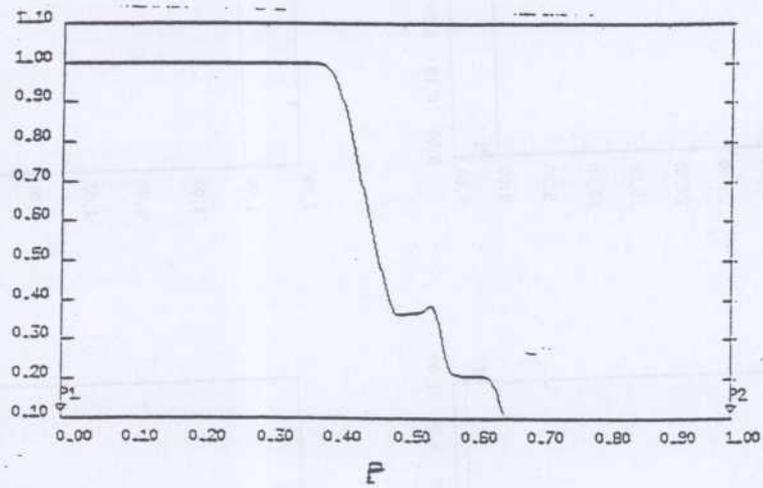
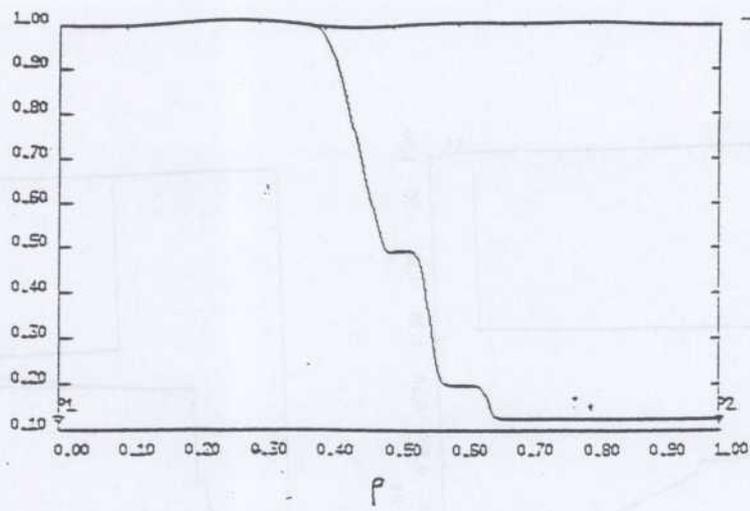


Figure 3: Second Test 1D  $\rho_i P, u_y$  for 100 meshes

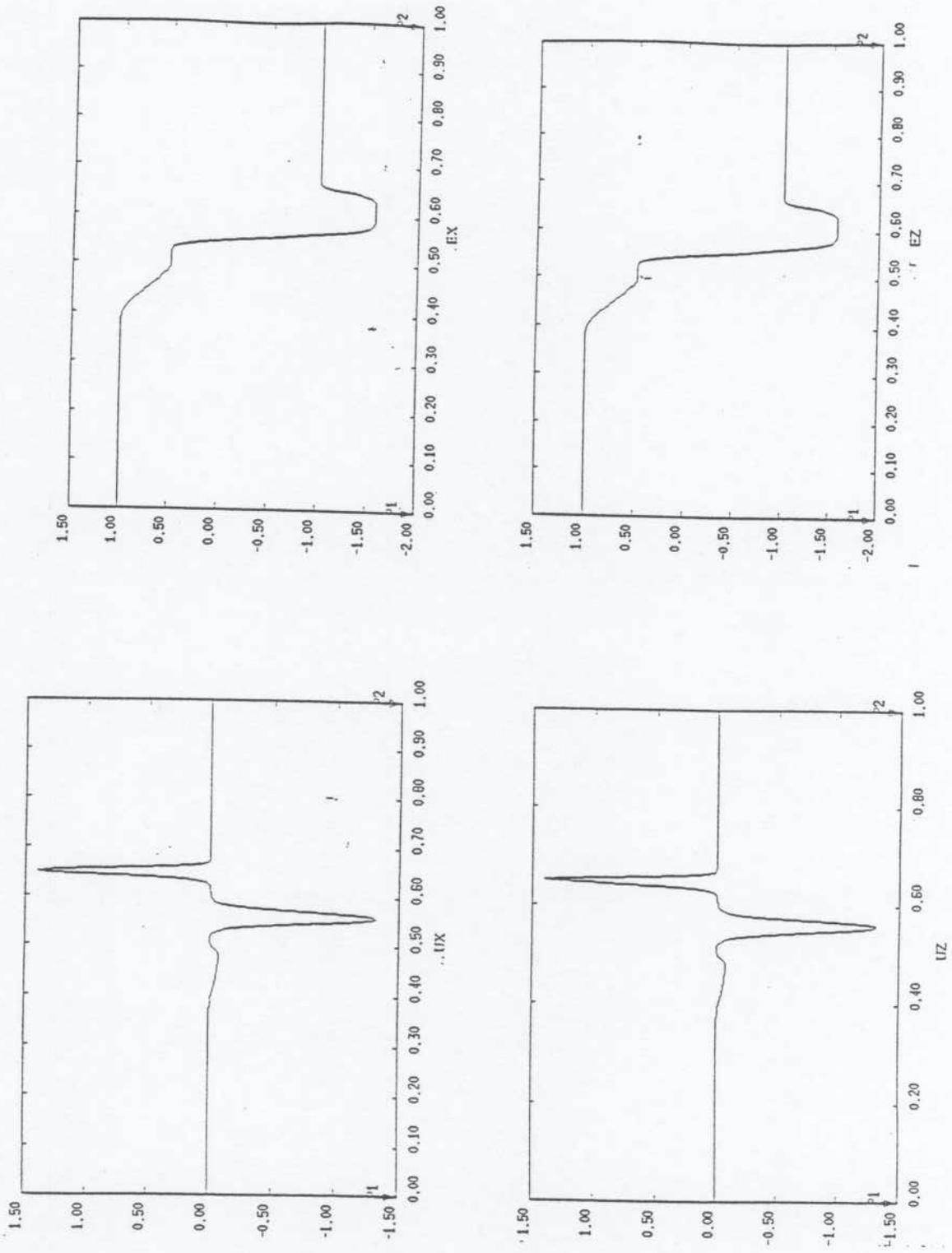


Figure 4: Second Test 1D  $u_x, u_z, E_x, E_z$  for 100 meshes

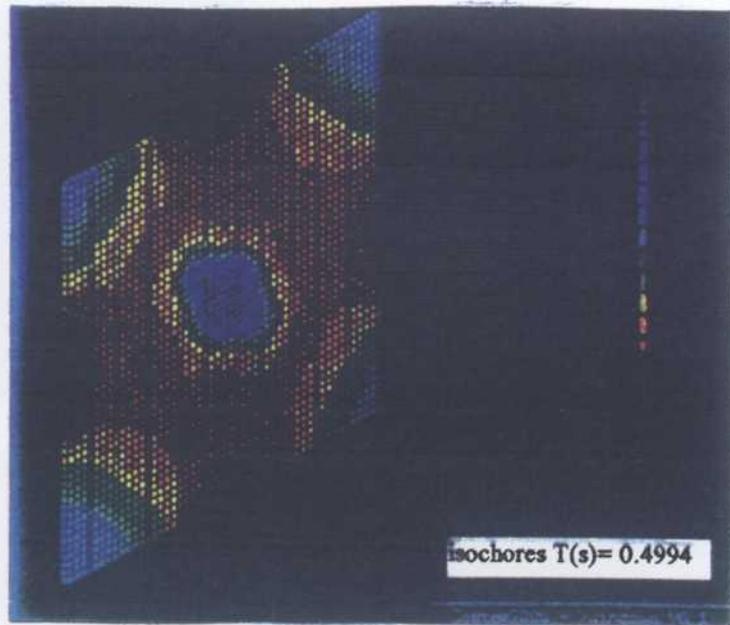


Figure 5: Test 2D  $iso - \rho, iso - P$

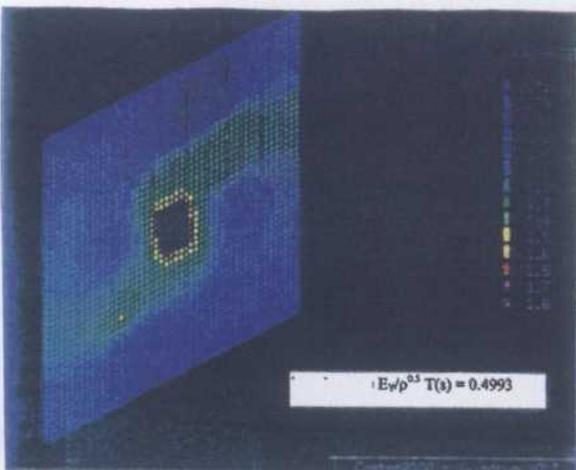
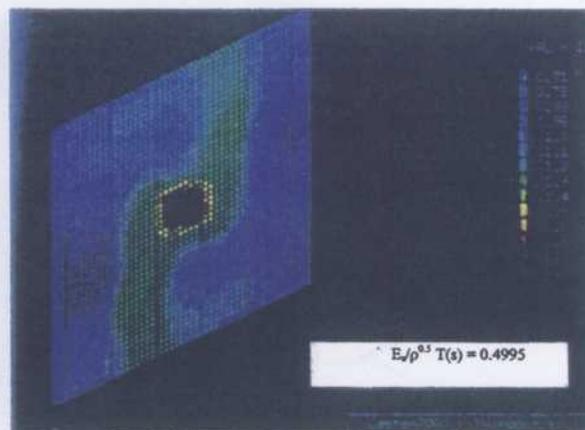
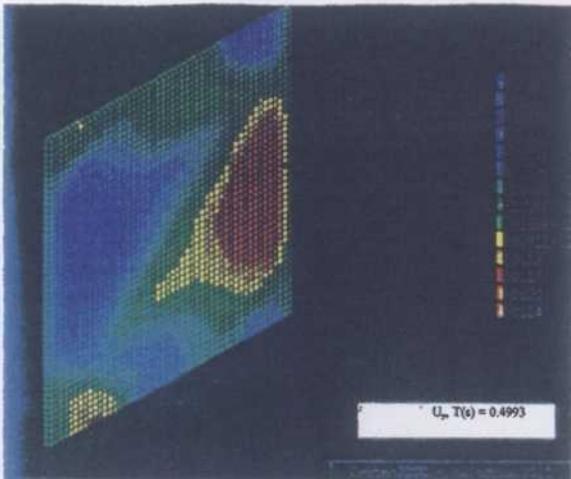
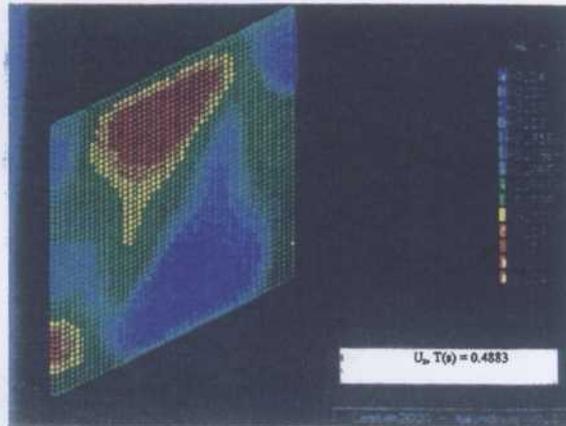
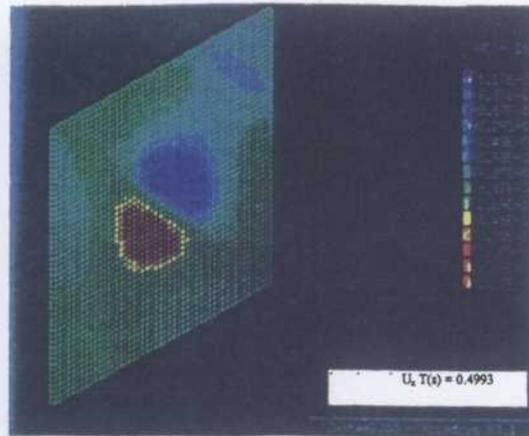


Figure 6: Test 2D *iso* -  $u_x$ , *iso* -  $u_y$ , *iso* -  $u_z$ , *iso* -  $(E_y/\sqrt{\rho})$ , *iso* -  $(E_z/\sqrt{\rho})$

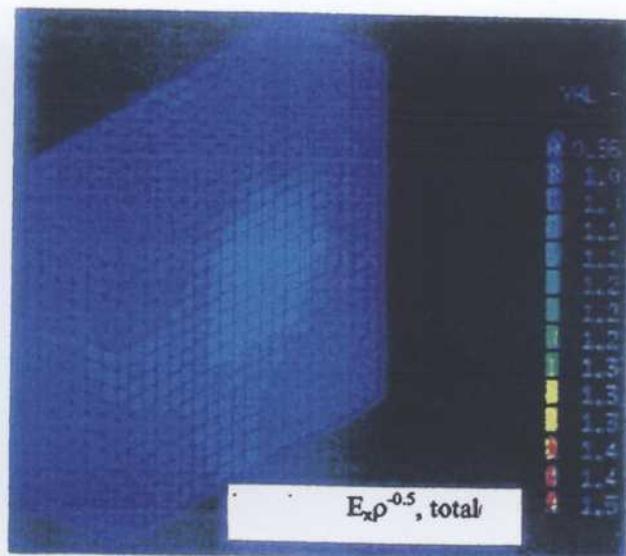
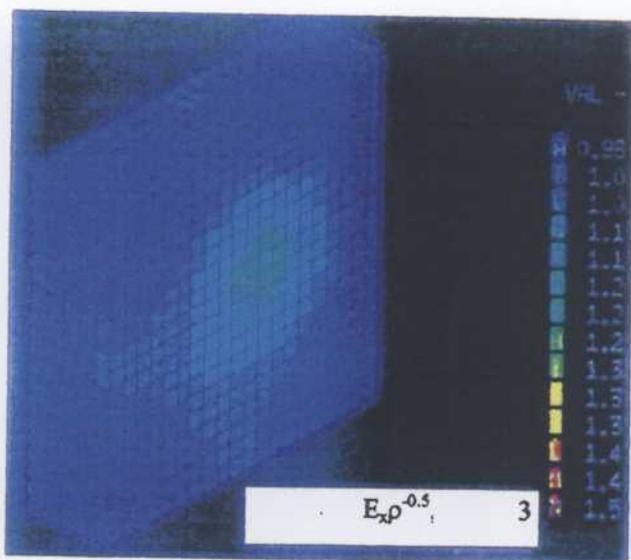
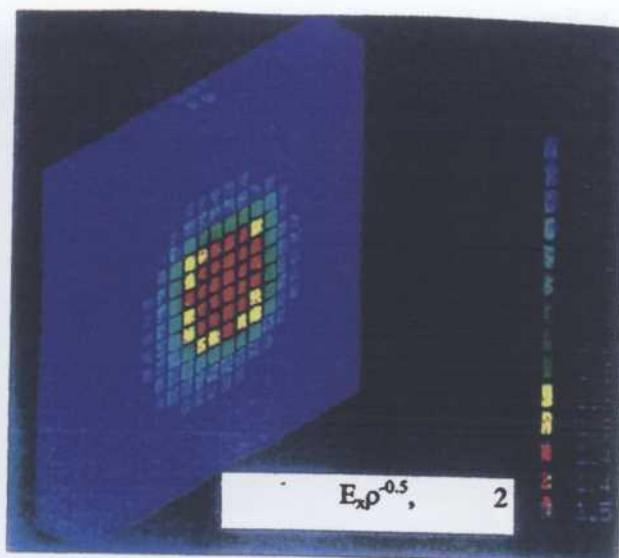
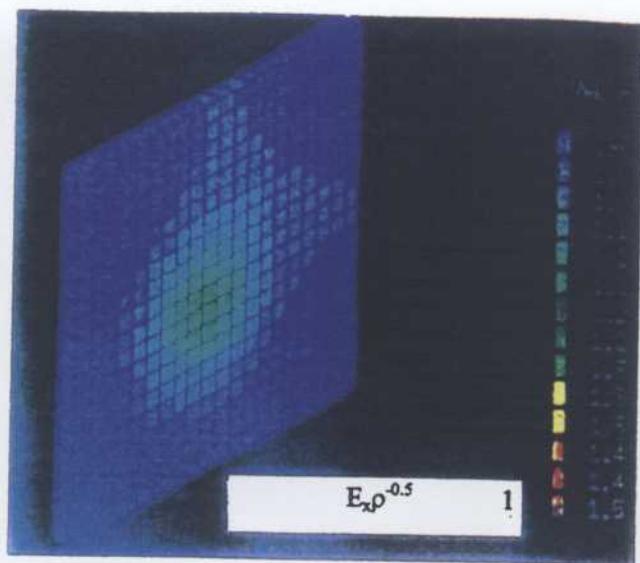


Figure 7: Test 3D  $E_x/\sqrt{\rho}$  evolution at three different times

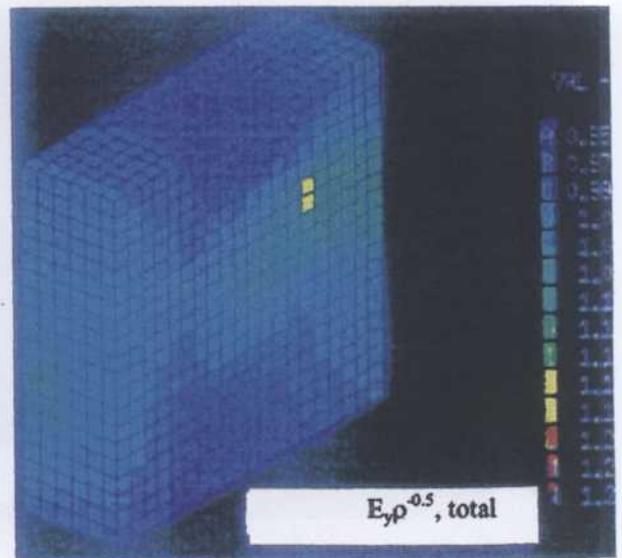
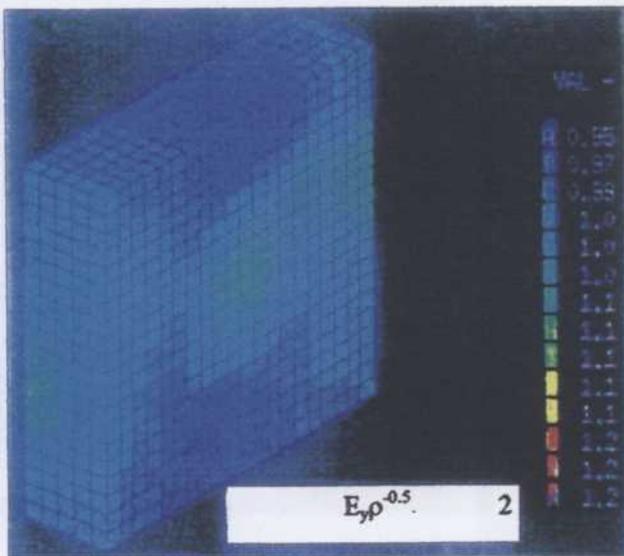
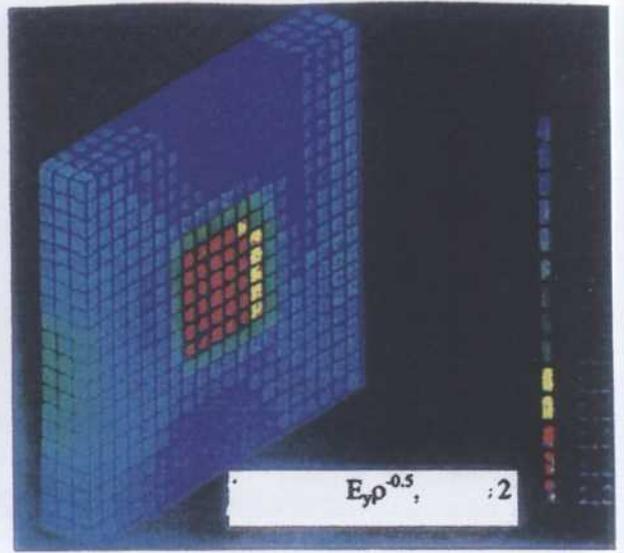
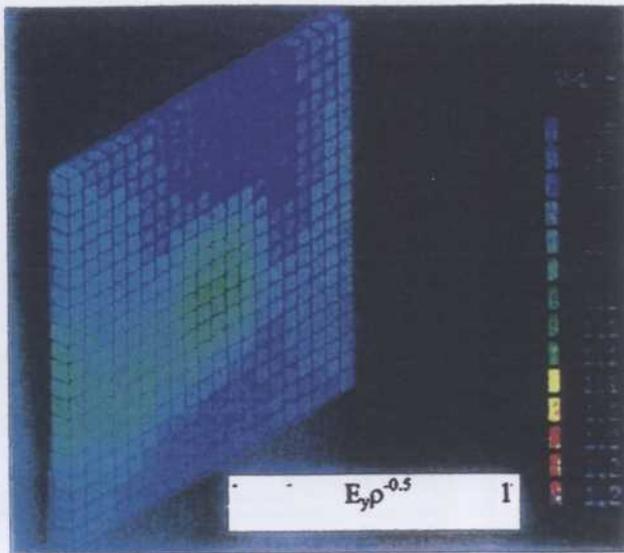


Figure 8: Test 3D  $E_y/\sqrt{\rho}$  evolution at three different times

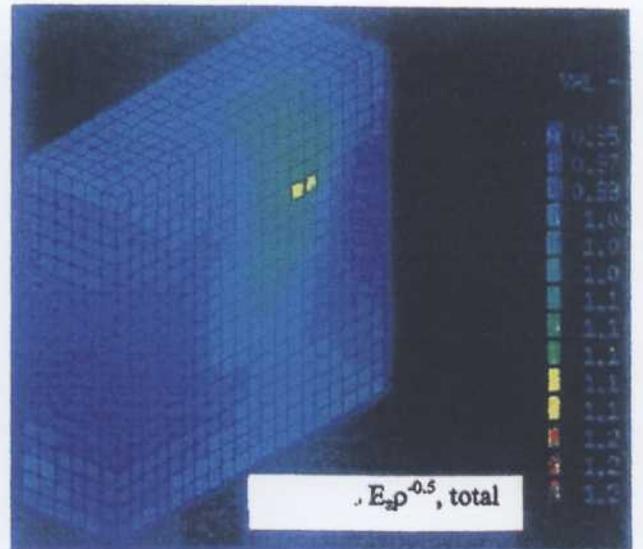
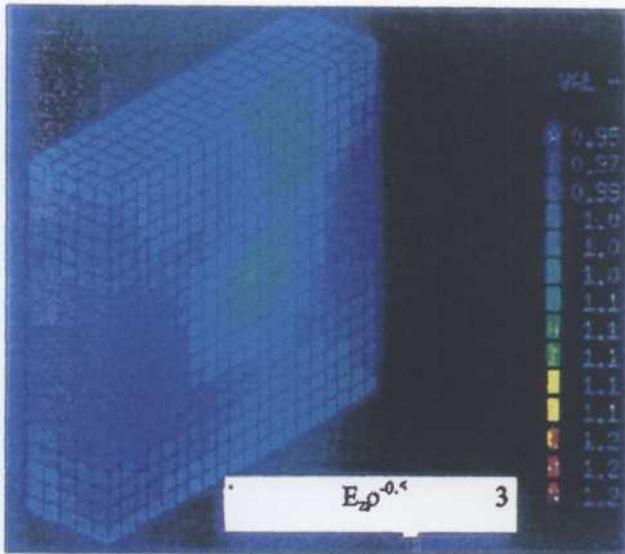
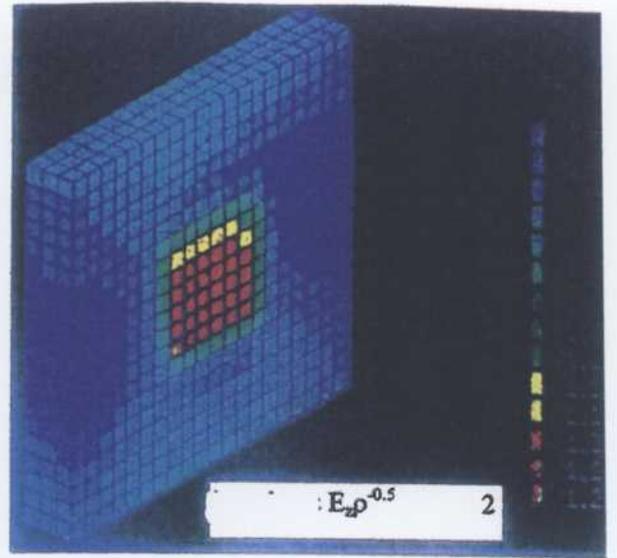
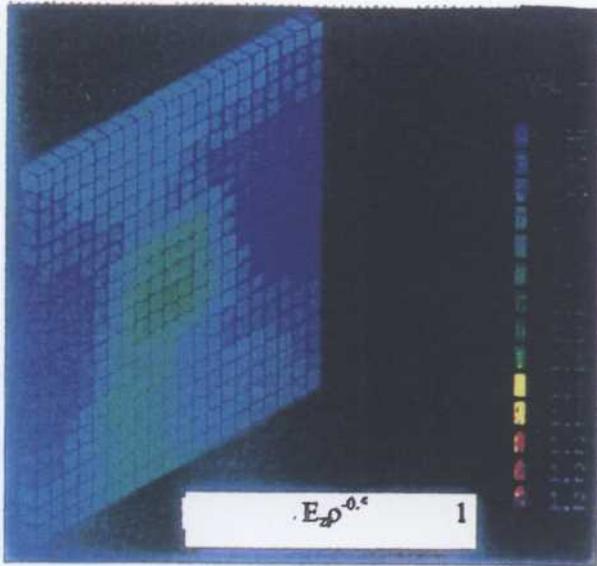


Figure 9: Test 3D  $E_z/\sqrt{\rho}$  evolution at three different times

## Chapitre 7

# Méthodes Particulières

### 7.1 Problèmes sans pression

Ce travail date de nombreuses années mais a permis d'initier les travaux sur les Problèmes Hyperboliques Dégénérés.

On considère le problème défini par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nu) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ n(x, 0) = n_0(x) \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{array} \right. \quad (7.1)$$

La figure 1 donne la solution sur la vitesse  $u$  obtenue avec initialement  $\forall x \in [0, 1], n_0(x) = 1$  et  $\forall x \in [0, 1], u_0(x) = 1 - x$ . Elles mettent en évidence les résultats attendus.

Le second cas correspond aux données  $\forall x \in [0, 1], n_0(x) = 1$  et  $\forall x \in [0, 1], u_0(x) = 1 - x^2$ . Elles mettent en évidence le déferlement obtenu, visible sur les figures 2 et 3.

### 7.2 Traitement de VLASOV -POISSON

Ce travail date de la même époque et a permis d'initier les travaux sur les Problèmes Hyperboliques Dégénérés.

On considère le problème défini par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nu) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{e}{m}E \\ \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{e}{\epsilon_0}(\bar{n} - n) \\ n(x, 0) = \bar{n} \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ \int_0^d E(x, t) dx = \Phi_d - \Phi_0 \end{array} \right. \quad (7.2)$$

où  $\bar{n}$  représente la densité des ions ( immobiles). Les figures 4 ( respectivement les figures 6,7) montrent la solution pour la densité  $n$  ( respectivement la vitesse  $u$  ) avec  $\forall x \in [0, 1], n_0(x) = 1 - x^2/2$  et pour  $\forall x \in [0, 1], u_0(x) = 0$ . La différence de potentiel imposé est 0.05526. La figure 8 montre le comportement régulier du potentiel par rapport à celui chaotique de la vitesse.

### 7.3 Application en Physique des Plasmas

Il s'agit d'étudier en 2D des problèmes traitant le déplacement de population électronique. Ces développements sont appliqués dans l'étude des semi-conducteurs. Le système est régi par les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nu) + \frac{\partial}{\partial x}(nv) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{e}{m}E_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{e}{m}E_y \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{e}{\epsilon_0}(\bar{n} - n) \\ n(x, 0) = \bar{n} \end{array} \right. \quad (7.3)$$

La figure 9 montre l'évolution d'un plasma entre deux électrodes dans une géométrie 2D où une différence de potentiel est imposée.

De même peut être abordé le traitement de "Mesfet" simple ou bidimensionnel

dans lesquels est simulé la trajectoire des courants. Le système à résoudre est assez semblable et s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nu) + \frac{\partial}{\partial x}(nv) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{u}{\tau_r} = -\frac{e}{m^*} E_x - \frac{kT_0}{m^*} \frac{\partial n}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{\tau_r} = -\frac{e}{m^*} E_y - \frac{kT_0}{m^*} \frac{\partial n}{\partial y} \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{e}{\epsilon_0} (\bar{n} - n) \\ n(x, 0) = \bar{n} \end{array} \right. \quad (7.4)$$

où  $T_0$  est une température constante,  $k$  la constante de BOLTZMANN et  $m^*$  une constante dépendant du matériau appelée masse effective.

$\tau_r$  est un temps de relaxation fonction du champ électrique

$$\tau_r = \frac{m}{e} \frac{\mu_{n_0}}{1 + \mu_{n_0} \frac{|E|_2}{V_s}}$$

où  $\mu_{n_0}$  et  $v_s$  représentent une mobilité et une vitesse de saturation dépendant du matériau constituant la diode.

La figure 10 traduit les trois types de semi conducteurs étudiés, la figure 11 montre le résultat d'un Mesfet simple et la figure 12 celle d'un Mesfet 2D.

## 7.4 Application à la Mécanique des Fluides

Il s'agit dans ce cas de traiter un écoulement gaz particules qui peut s'écrire ainsi

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n_g}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_g u_g) + \frac{\partial}{\partial x}(n_g v_g) = 0 \\ \frac{\partial u_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial u_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial u_g}{\partial y} + \frac{1}{n_g} \frac{\partial P_g}{\partial x} = F_d \\ \frac{\partial v_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial v_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial v_g}{\partial y} + \frac{1}{n_g} \frac{\partial P_g}{\partial y} = G_d \\ \frac{\partial n_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_s u_s) + \frac{\partial}{\partial x}(n_s v_s) = 0 \\ \frac{\partial u_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial u_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial u_s}{\partial y} = -F_d \\ \frac{\partial v_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial v_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial y} = -G_d \end{array} \right. \quad (7.5)$$

où les indices g désignent les quantités associées à un gaz et s ceux associés à un solide. Le gaz est traité en gaz parfait pour la loi d'état. Le couplage est effectué par les forces de traînée. La figure 13 montre la trajectoire moyenne du fluide dans une tuyère et la figure 14 la trajectoire moyenne des particules injectées.

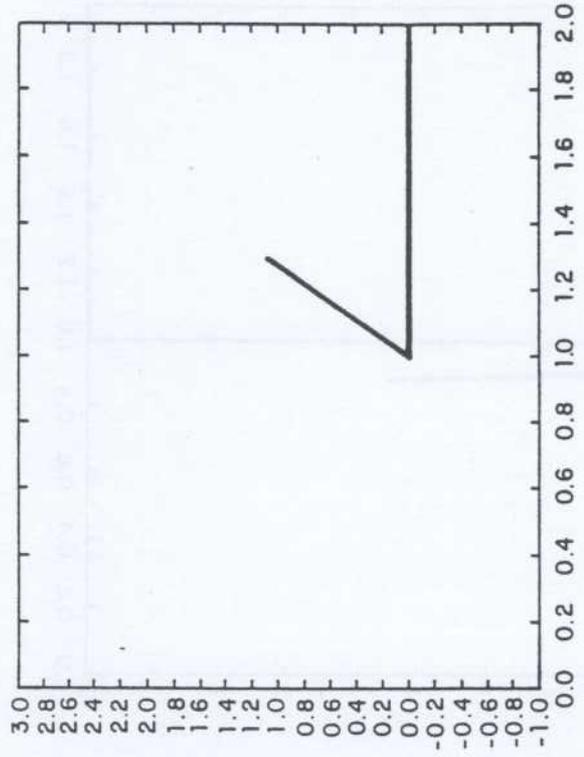
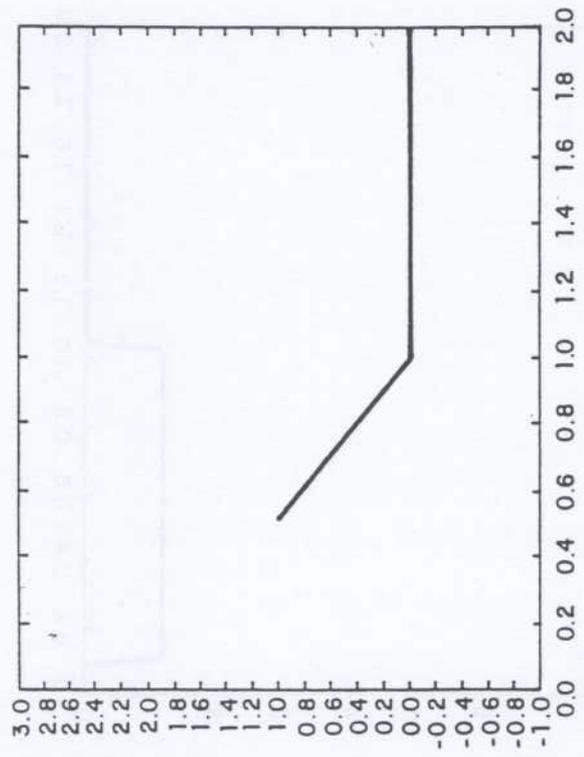
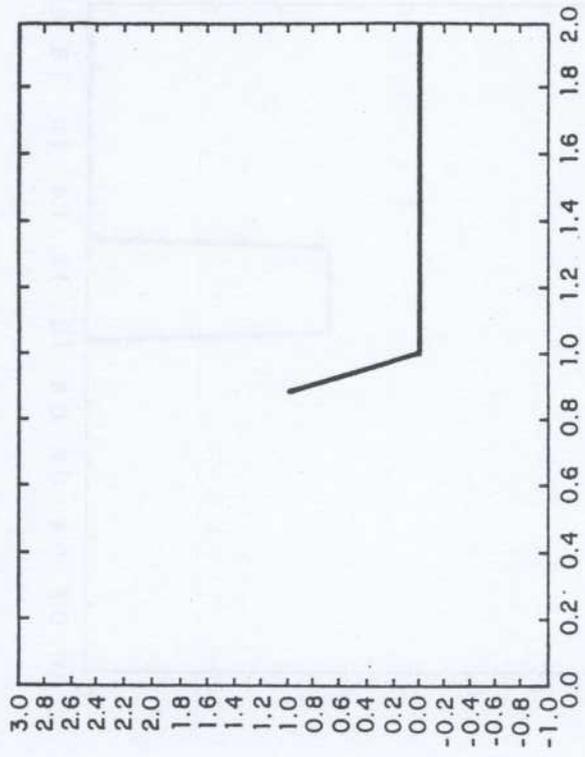
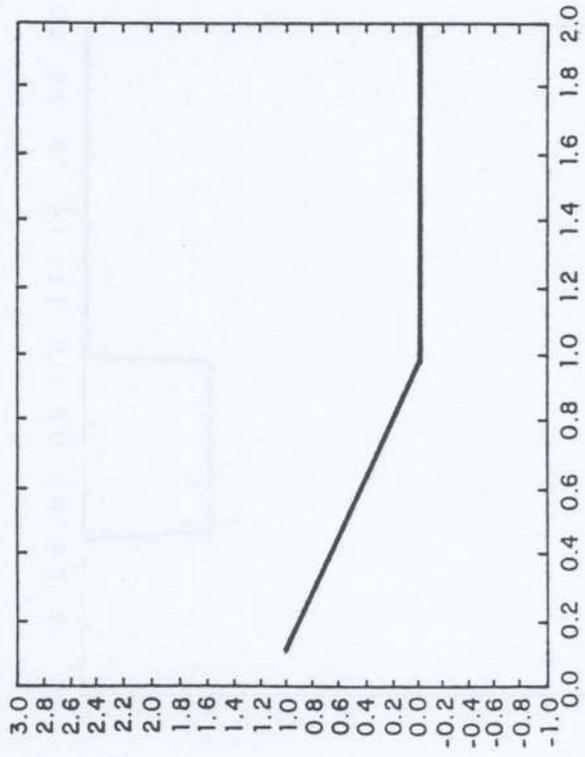


Figure 1

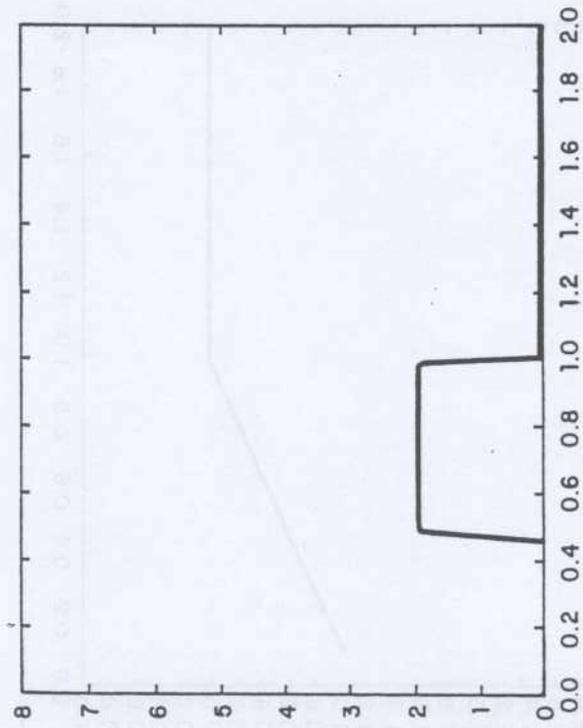
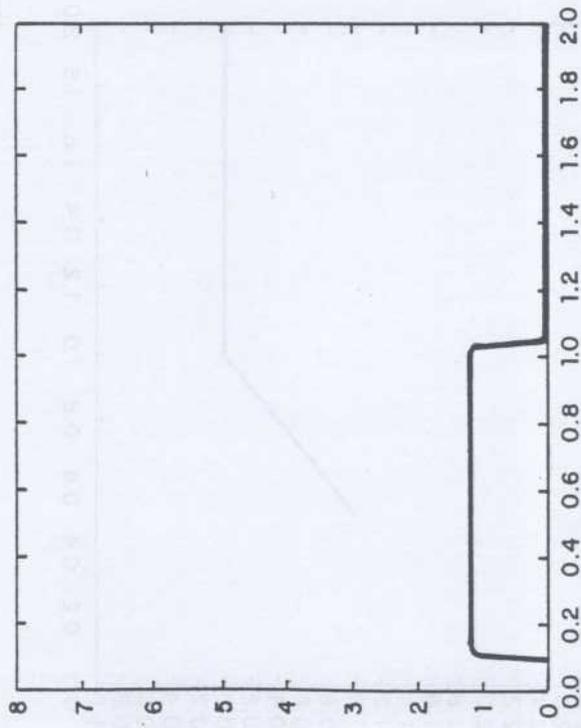
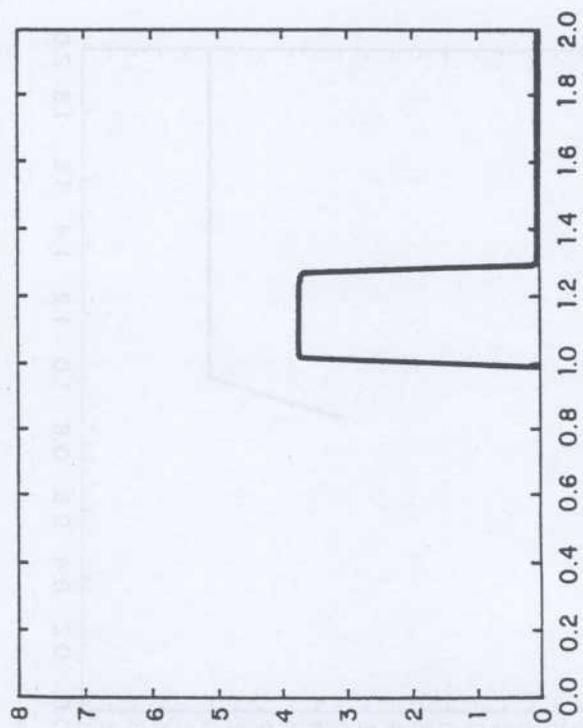
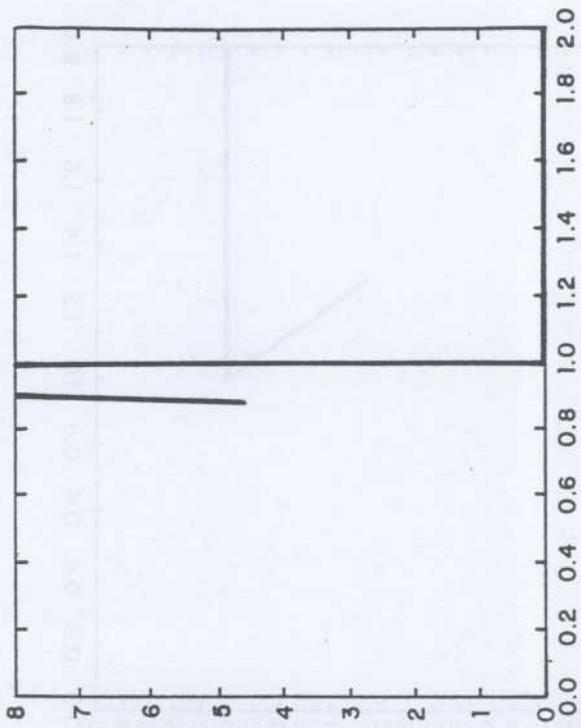


Figure 2

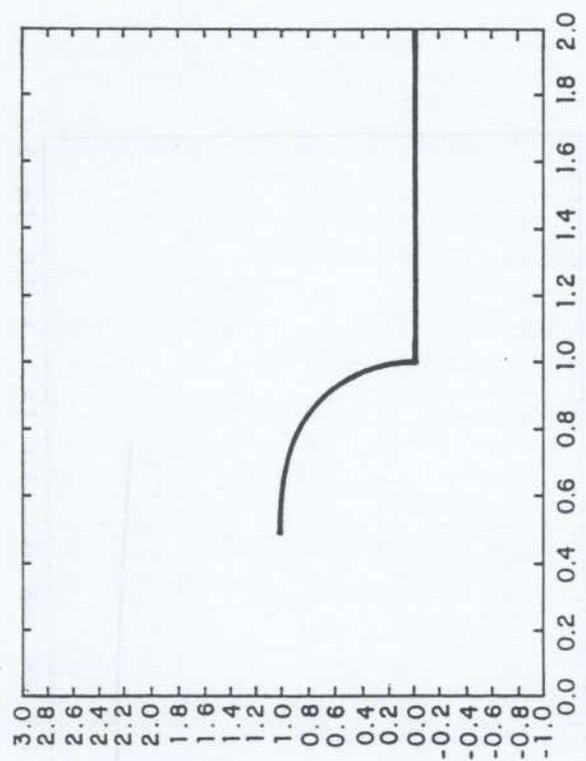
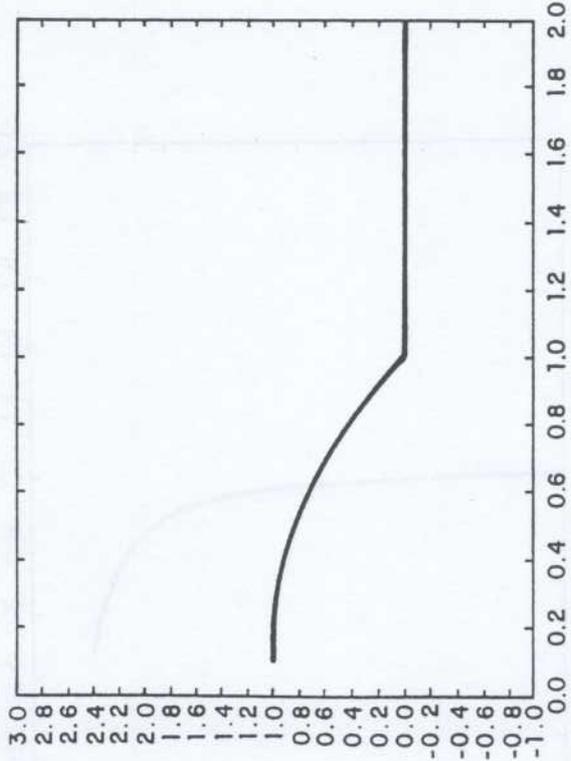
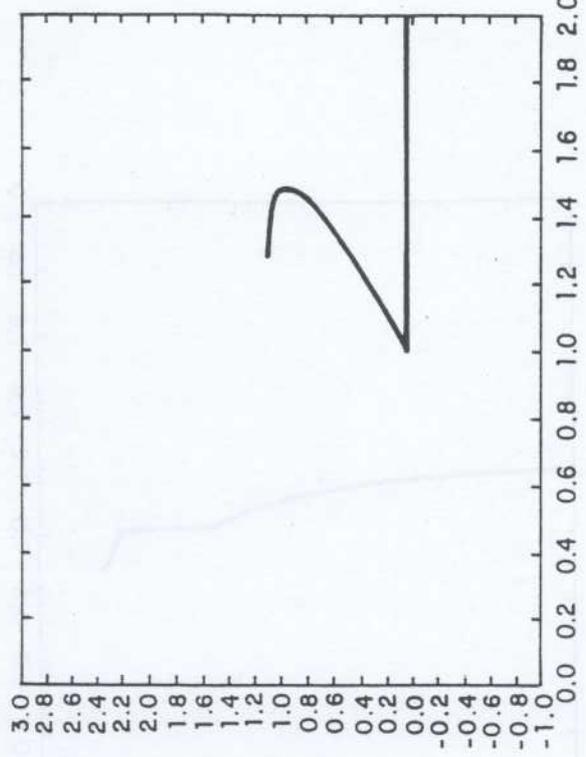
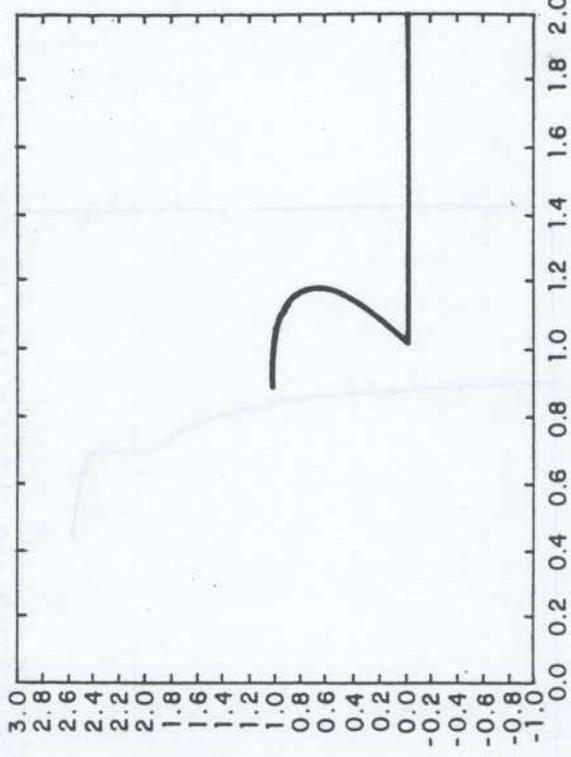


Figure 3

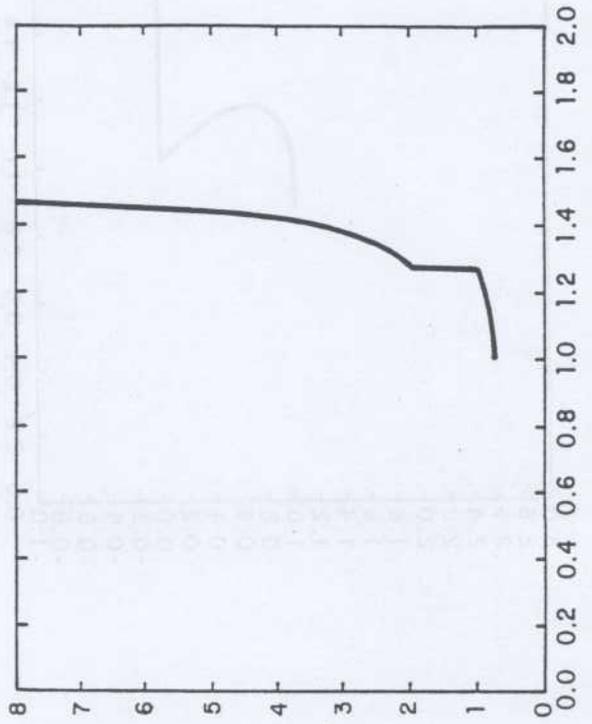
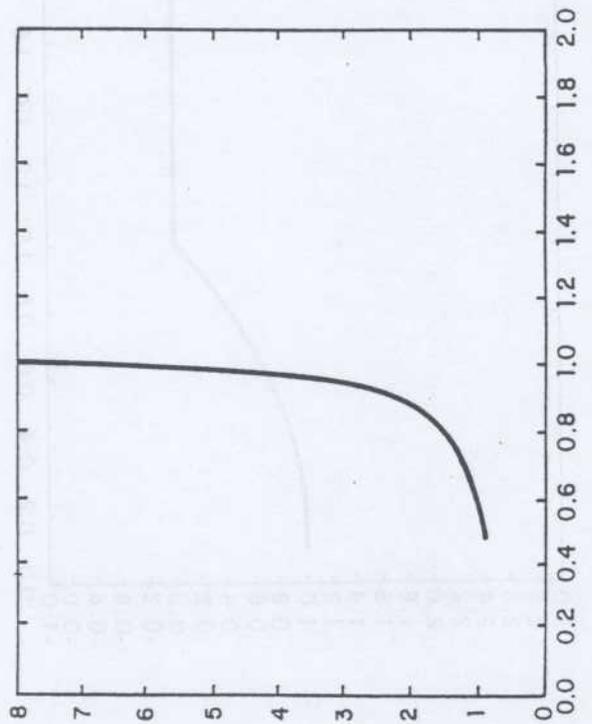
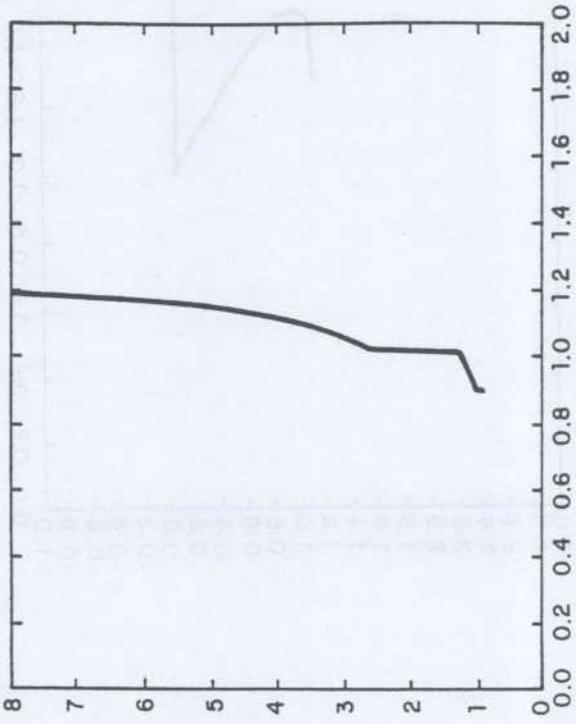
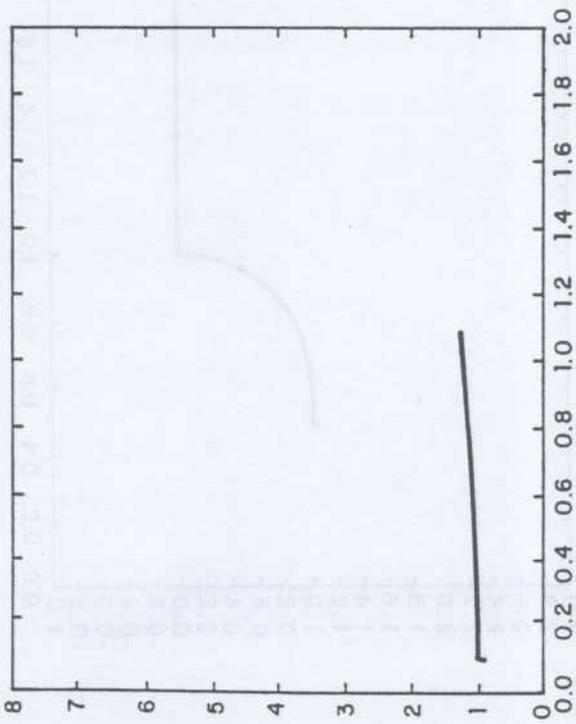


Figure 4

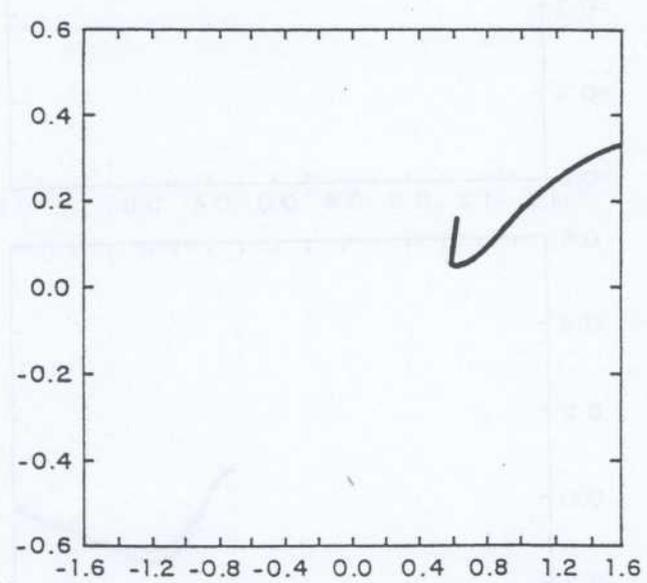
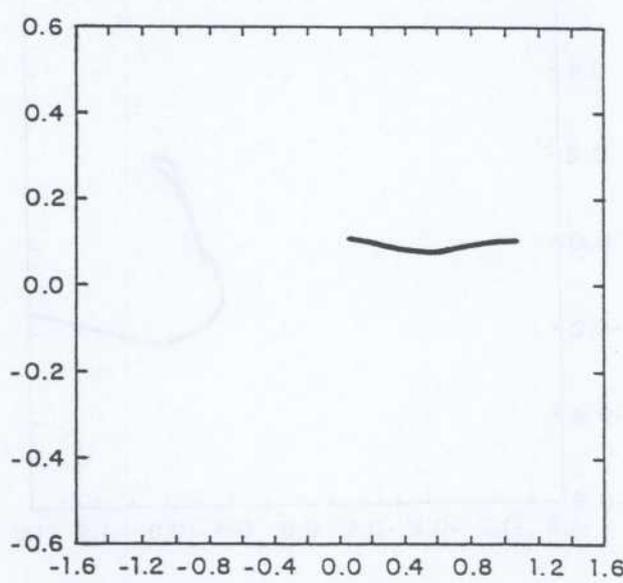
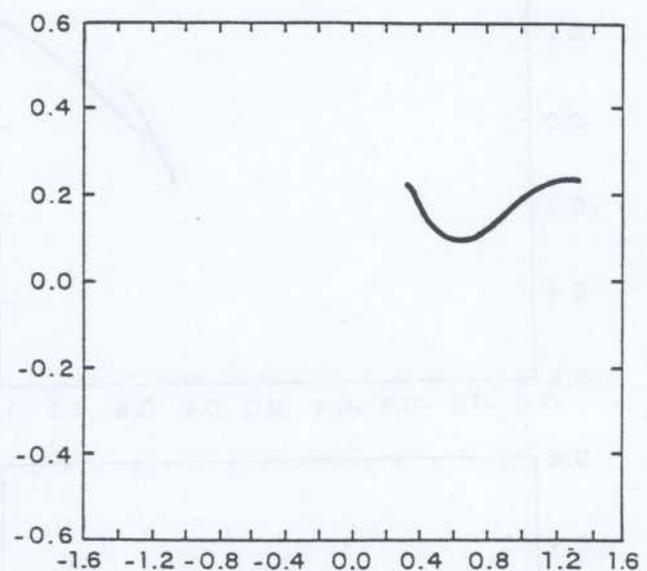
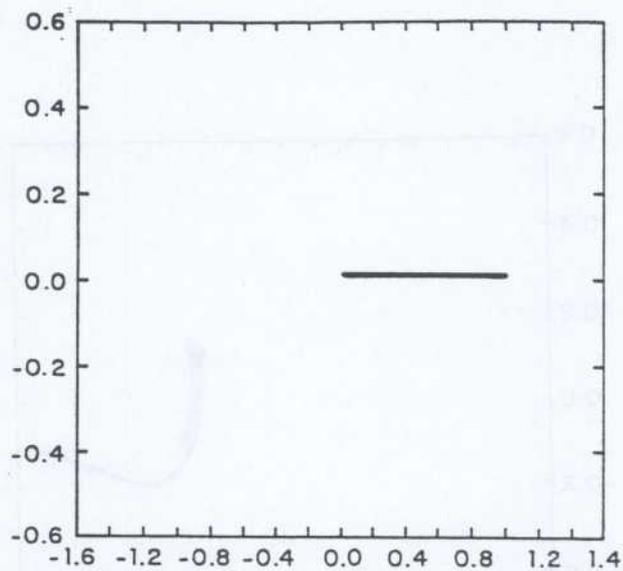


Figure 6

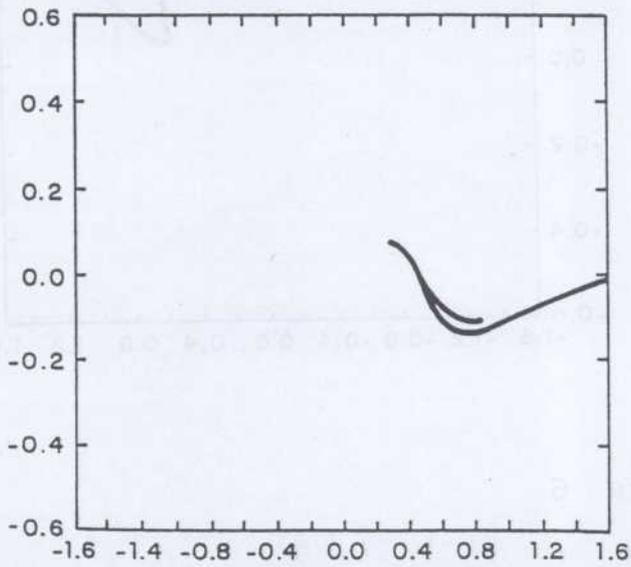
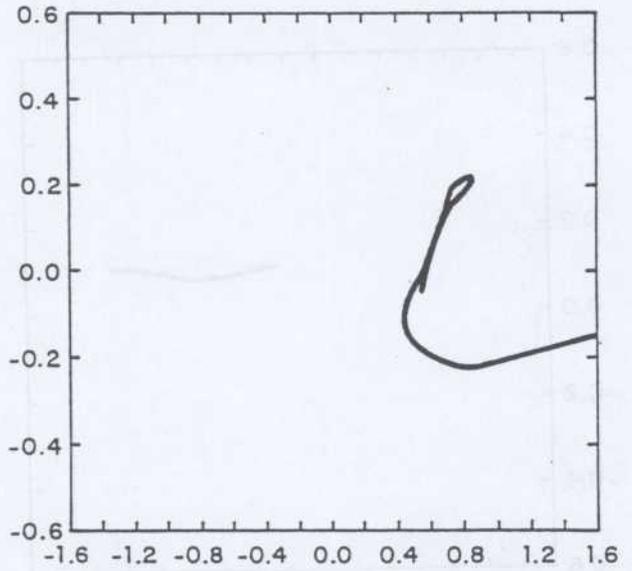
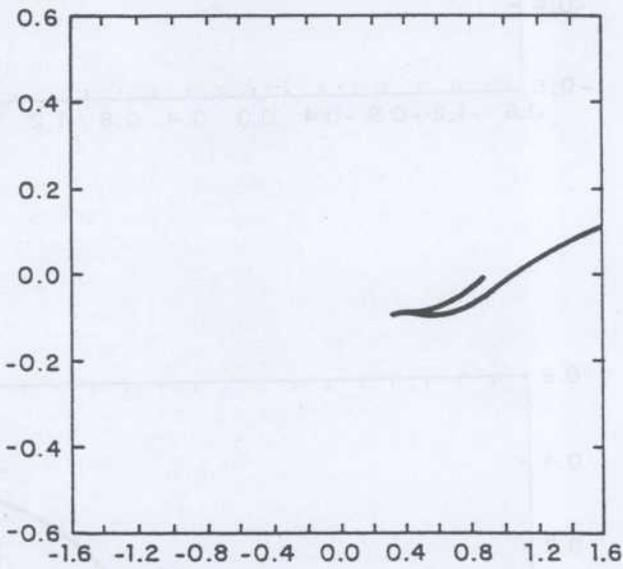
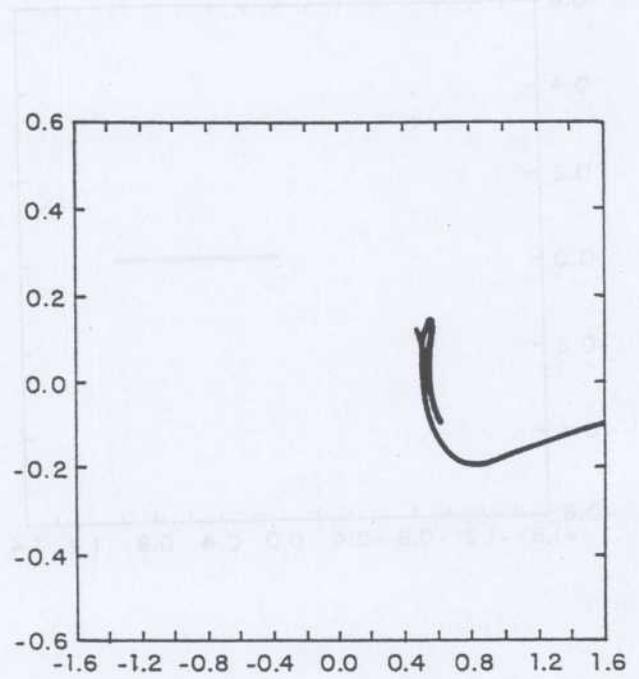
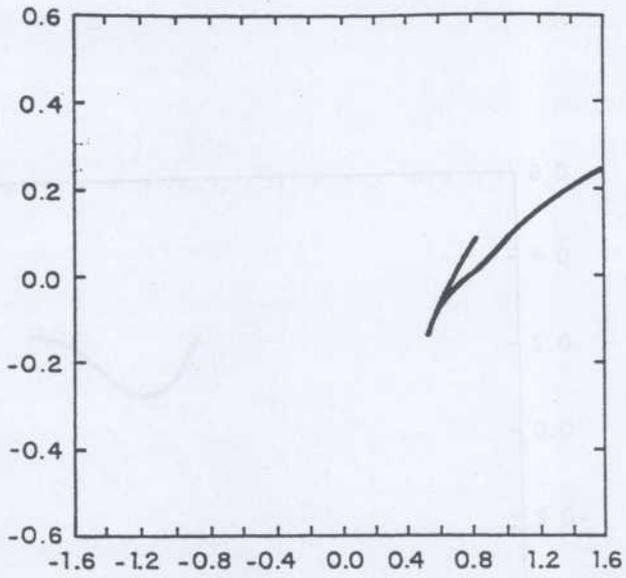


Figure 7

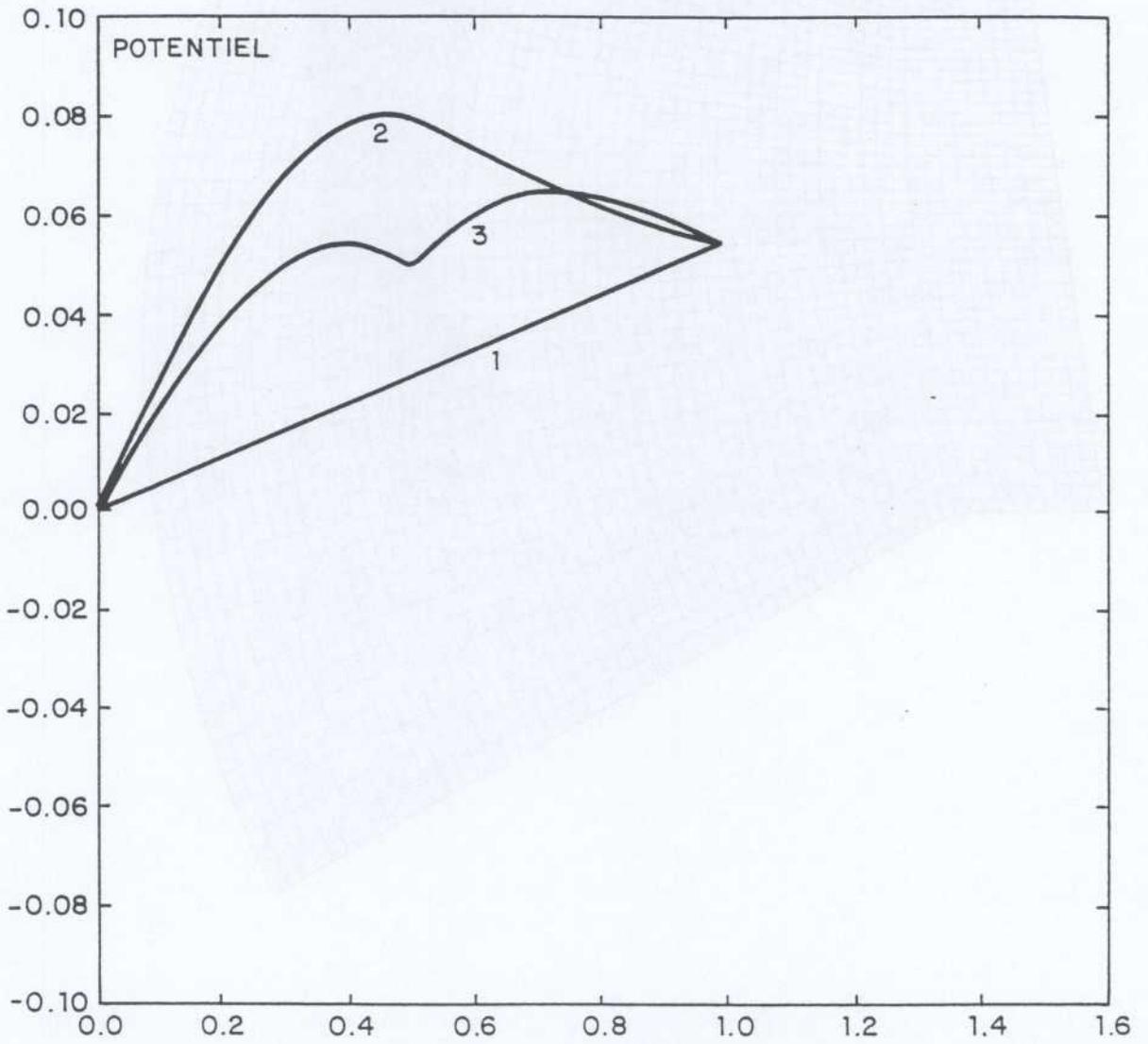


Figure 8

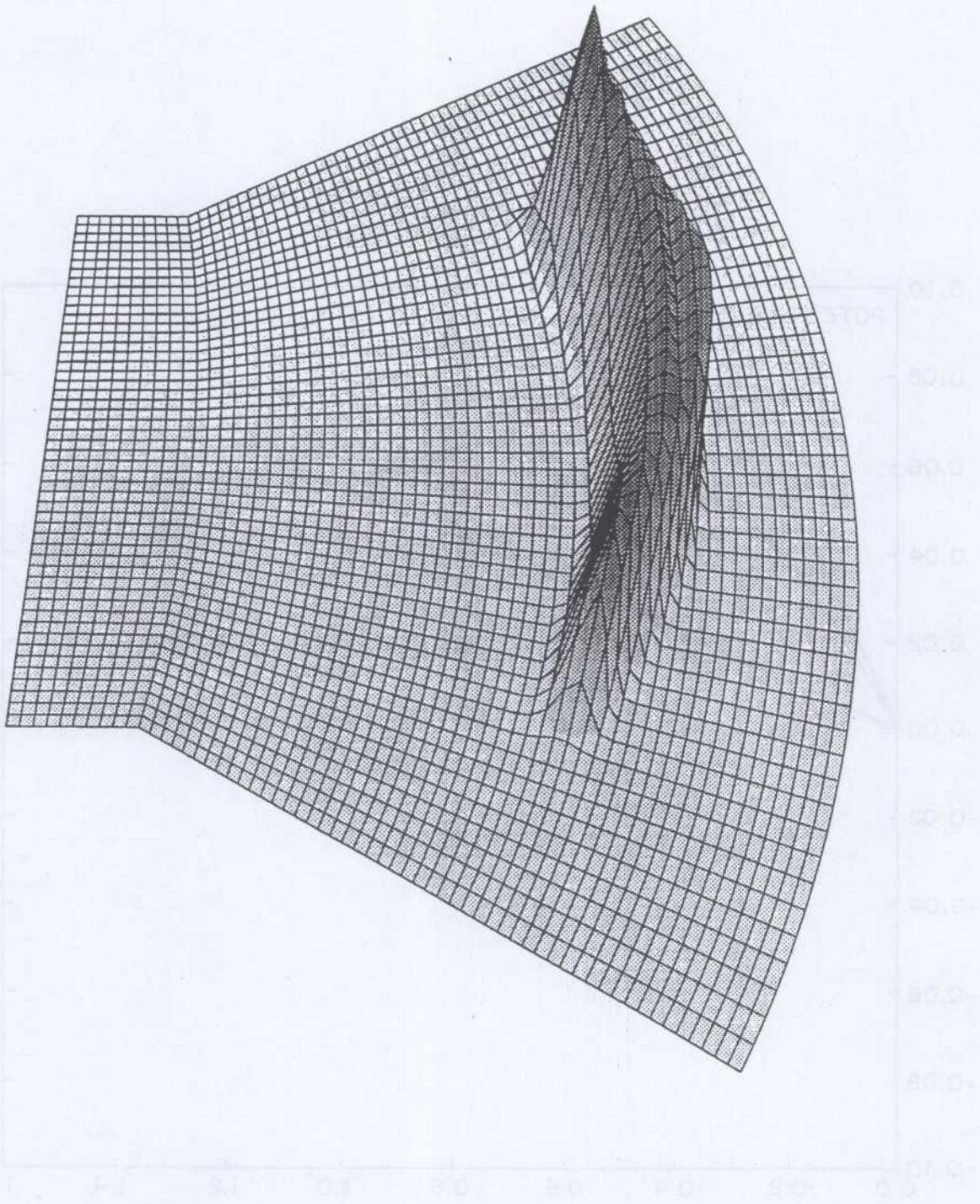
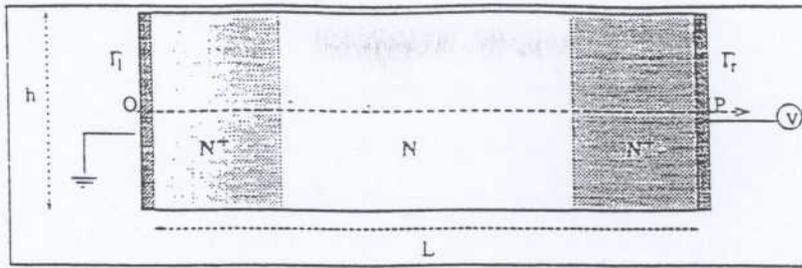


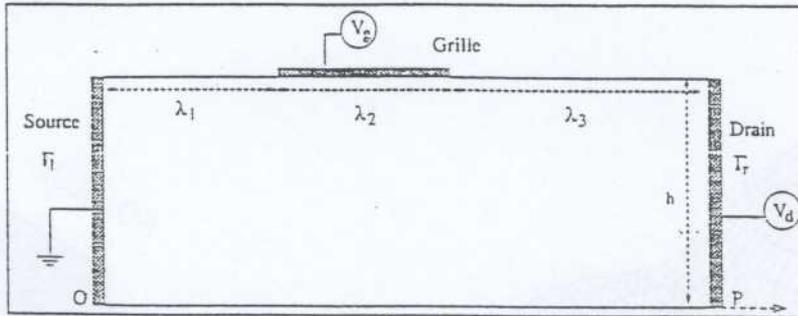
Figure 9 : Test 2D Simulation d'un plasma

1° La diode plane



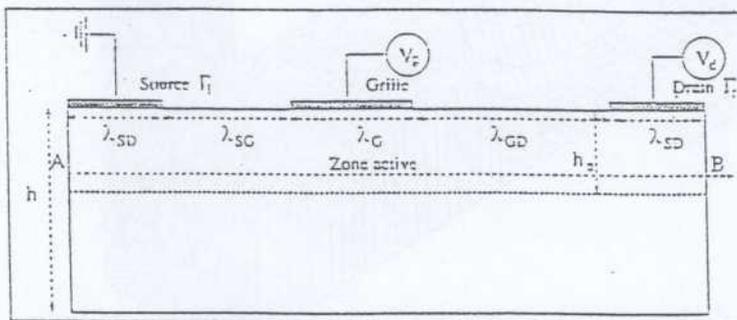
Diode N<sup>+</sup>-N-N<sup>+</sup>

2° Le Mesfet simple



Structure Mesfet simple

3° Le Mesfet bidimensionnel



Structure Mesfet bidimensionnel

Dans le cas de la diode le dopage  $n_D$  est représenté par une fonction discontinue

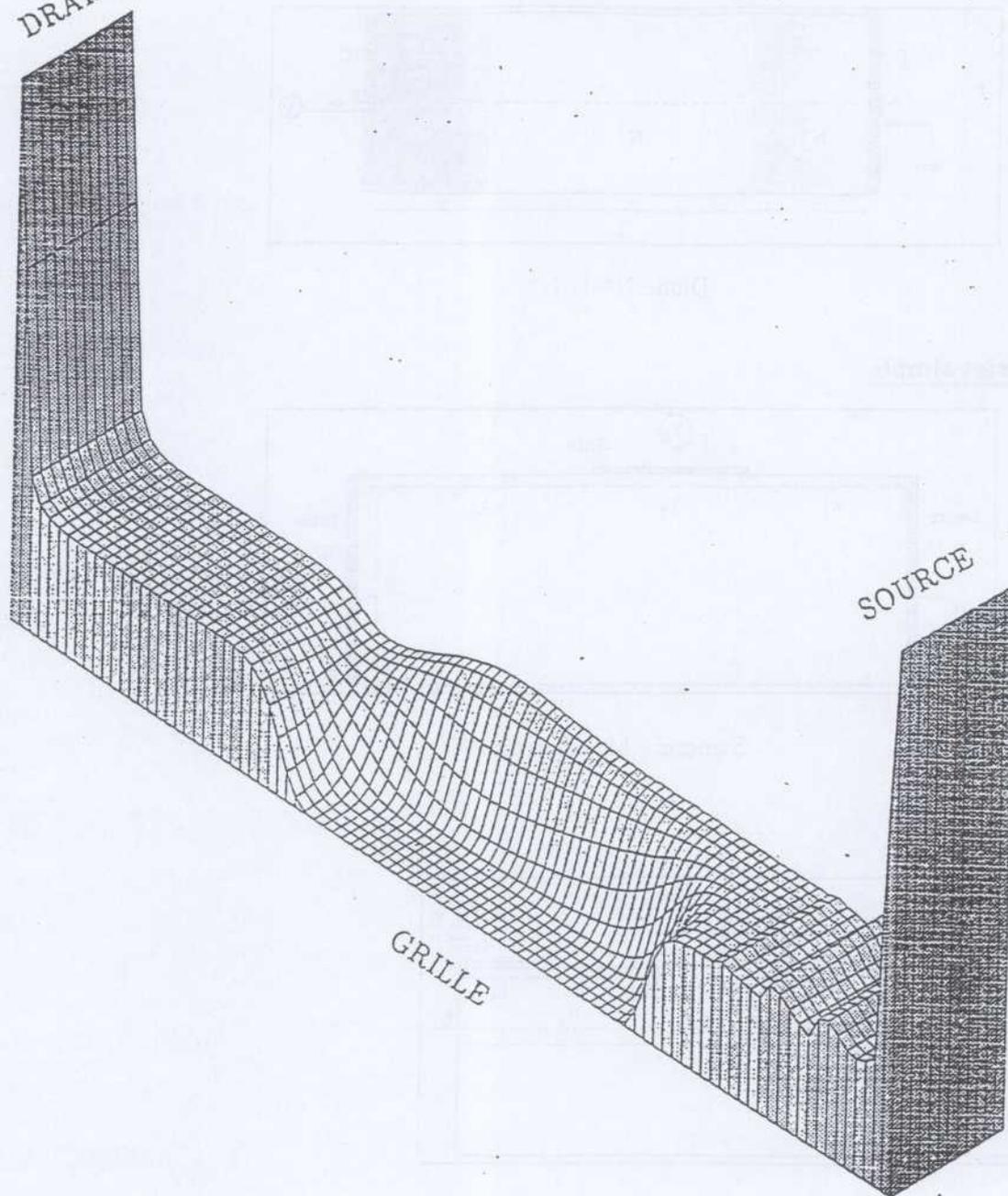
$$n_D(x) = \begin{cases} N^+ & \text{si } 0 < x_1 < L_1 \text{ et } L_2 < x_1 < L \\ N & \text{si } L_1 < x_1 < L_2 \end{cases} \quad (1.3)$$

Le dopage est constant pour le mesfet simple et dans la zone active du mesfet bidimensionnel.

On pose  $V_g = \Phi_g - \Phi_{bn}$  où  $\Phi_{bn}$  représente le niveau de barrière de Schottky.

Figure 10: Dispositifs étudiés

DRAIN



SOURCE

GRILLE

Figure 11: MESFET Simple

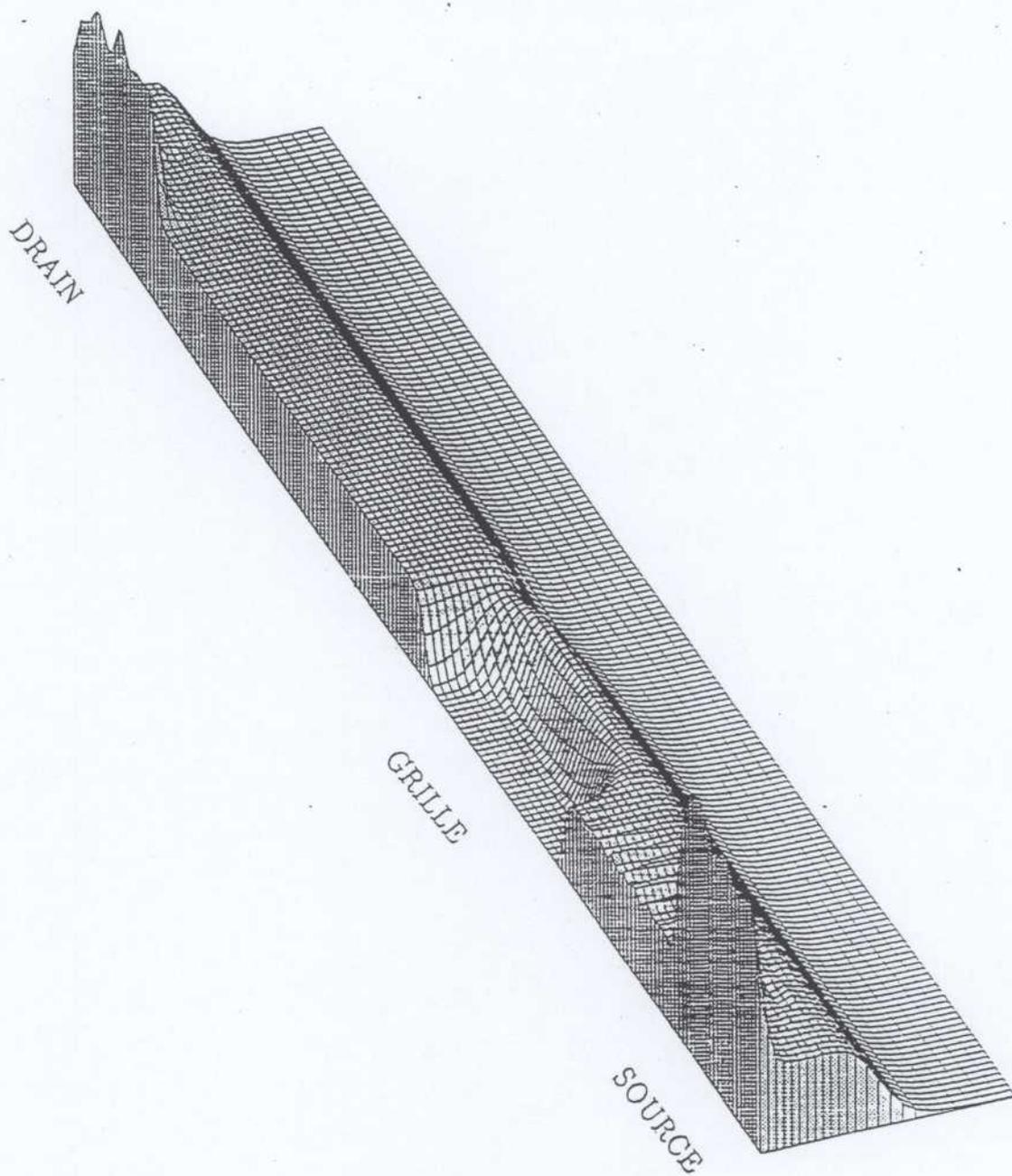


Figure 12: MESFET Bidimensionnel

Central scheme:



Upwind scheme:

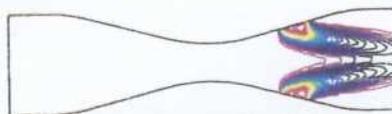


Plate 1. Particle density contours at steady state

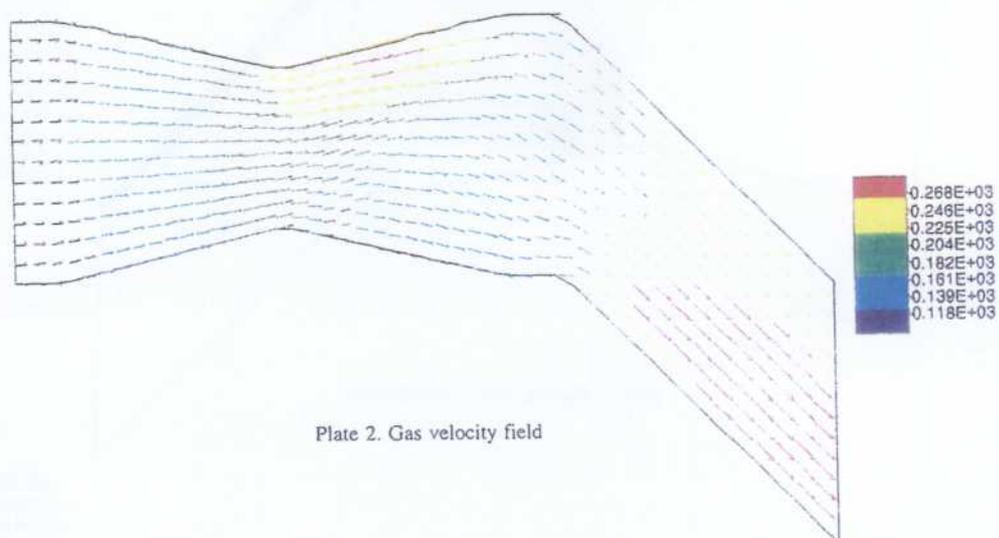


Plate 2. Gas velocity field

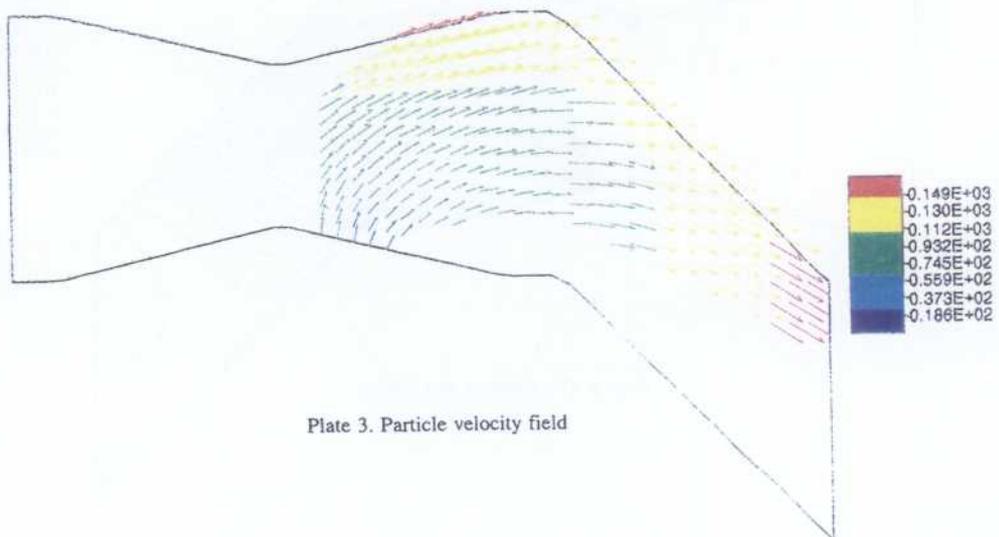


Plate 3. Particle velocity field

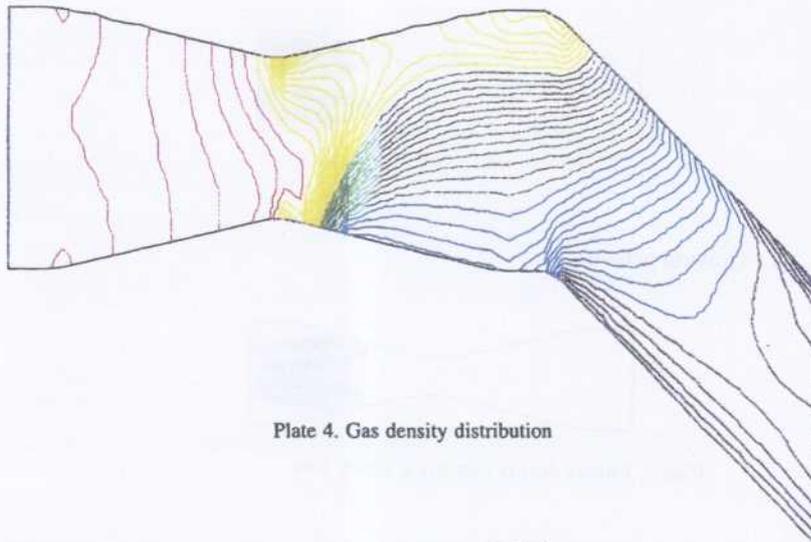


Plate 4. Gas density distribution

- LEGEND**
- 0.8856E+00
  - 0.9006E+00
  - 0.9243E+00
  - 0.9595E+00
  - 0.9830E+00
  - 0.1018E+01
  - 0.1042E+01
  - 0.1077E+01
  - 0.1100E+01
  - 0.1136E+01
  - 0.1159E+01
  - 0.1194E+01
  - 0.1218E+01
  - 0.1253E+01
  - 0.1277E+01
  - 0.1312E+01
  - 0.1336E+01
  - 0.1370E+01
  - 0.1394E+01
  - 0.1429E+01

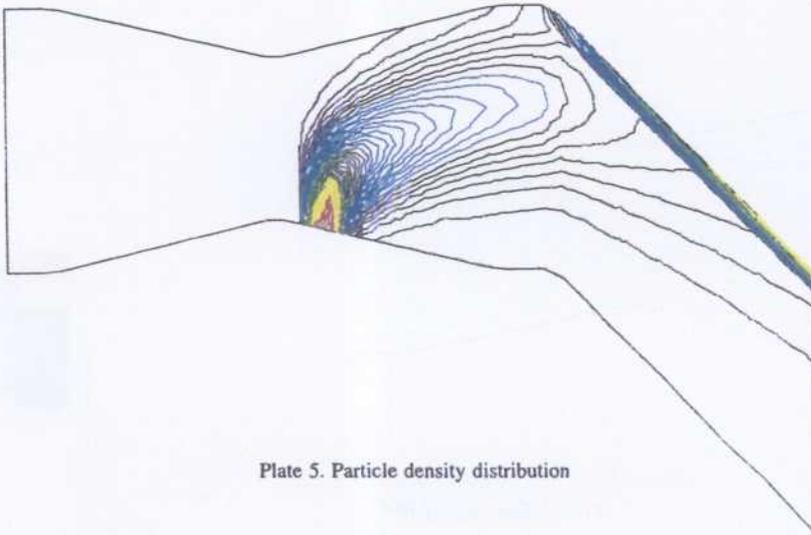


Plate 5. Particle density distribution

- LEGEND**
- 0.1586E+01
  - 0.4757E+01
  - 0.6872E+01
  - 0.1004E+02
  - 0.1216E+02
  - 0.1533E+02
  - 0.1744E+02
  - 0.2062E+02
  - 0.2273E+02
  - 0.2590E+02
  - 0.2802E+02
  - 0.3119E+02
  - 0.3330E+02
  - 0.3647E+02
  - 0.3860E+02
  - 0.4176E+02
  - 0.4387E+02
  - 0.4705E+02
  - 0.4916E+02
  - 0.5233E+02

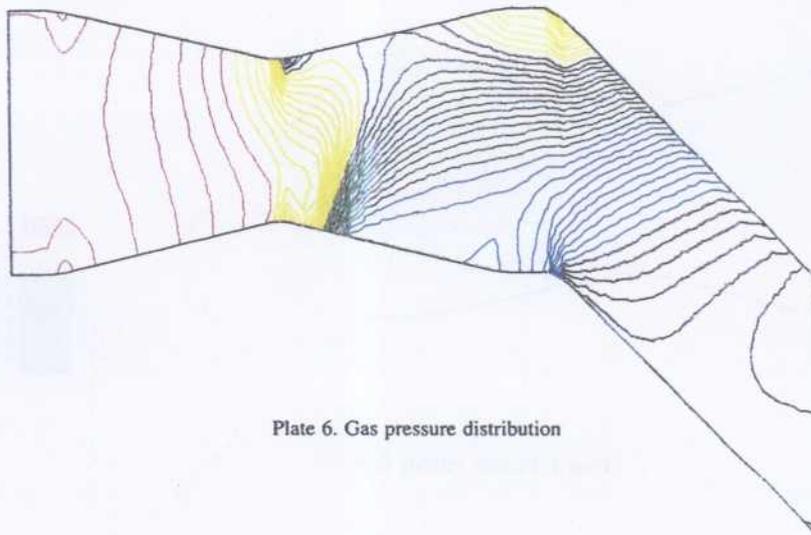


Plate 6. Gas pressure distribution

- LEGEND**
- 0.2058E+06
  - 0.2143E+06
  - 0.2200E+06
  - 0.2285E+06
  - 0.2342E+06
  - 0.2427E+06
  - 0.2484E+06
  - 0.2570E+06
  - 0.2626E+06
  - 0.2712E+06
  - 0.2769E+06
  - 0.2854E+06
  - 0.2911E+06
  - 0.2996E+06
  - 0.3053E+06
  - 0.3138E+06
  - 0.3195E+06
  - 0.3281E+06
  - 0.3337E+06
  - 0.3423E+06

## Chapitre 8

# Acoustique 3D

Il s'agit de traiter par équations intégrales l'acoustique transitoire. On rappelle que, si  $\Omega$  désigne l'obstacle sur lequel l'onde est parfaitement réfléchissante, la solution  $u$  peut donc s'écrire sous forme intégrale et :

Pour  $t \in R, x \in \Omega$

$$u(t, x) = u^I(t, x) + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left( \partial_\nu \left( \frac{1}{r} \right) u_r - \frac{1}{r} \partial_\nu(r) u_r \right) dy \quad (8.1)$$

Cette formule de représentation permet de calculer  $u$  dans  $R \times \Omega$  si l'on connaît sa trace sur  $R \times \partial\Omega$ . L'intégrale de second membre précédent est un potentiel retardé de double couche. Sa trace est bien connue aussi et l'on a l'équation suivante :

$$\forall x \in \partial\Omega$$
$$\frac{1}{2} u(t, x) = u^I(t, x) + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left( \partial_\nu \left( \frac{1}{r} \right) u_r - \frac{1}{r} \partial_\nu(r) u_r \right) dy \quad (8.2)$$

Le traitement a été effectué par une méthode variationnelle en temps et en espace dont la suite illustre les résultats obtenus.

La figure 1 représente la solution en 2 points et compare la sensibilité au maillage dans le cas d'une boîte. La source est toujours par la suite concentrée en un point et a la forme d'une Maxwellienne en temps.

La figure 2 traite le même problème sur une sphère.

les figures 3 et 4 montrent les résultats en différents points d'un dièdre de 90 degré dont la source incidente est au milieu du domaine tandis que la figure 5 traite du même problème mais pour un dièdre de 120 degrés.

Pour finir, la figure 6 illustre la transmission à travers deux compartiments dont la source initiale est concentrée dans un des deux et la figure 7 montre l'apport de la méthode en particulier pour les points cachés.

Il est cependant important de noter que même si le traitement 3D spatial se

ramène à du 2D surfacique, le fait de stoker tous les pas de temps alourdit la méthode et impose une limitation du calcul.

## Chapitre 8

# Acoustique 3D

Le but de ce chapitre est de présenter les équations de l'acoustique 3D et de discuter les méthodes numériques pour leur résolution. On se concentrera sur les méthodes basées sur les différences finies et les éléments finis.

$$\begin{aligned} \text{div}(\rho_0 \mathbf{v}) + \rho_0 \text{div} \mathbf{v} &= -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} \\ \rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\nabla p \end{aligned}$$

Les équations de l'acoustique 3D sont des équations aux dérivées partielles hyperboliques. Elles décrivent la propagation des ondes acoustiques dans un milieu homogène et isotrope. Les variables principales sont la pression acoustique  $p$  et la vitesse des particules  $\mathbf{v}$ . Les équations sont résolues numériquement en utilisant des méthodes de différences finies ou d'éléments finis.

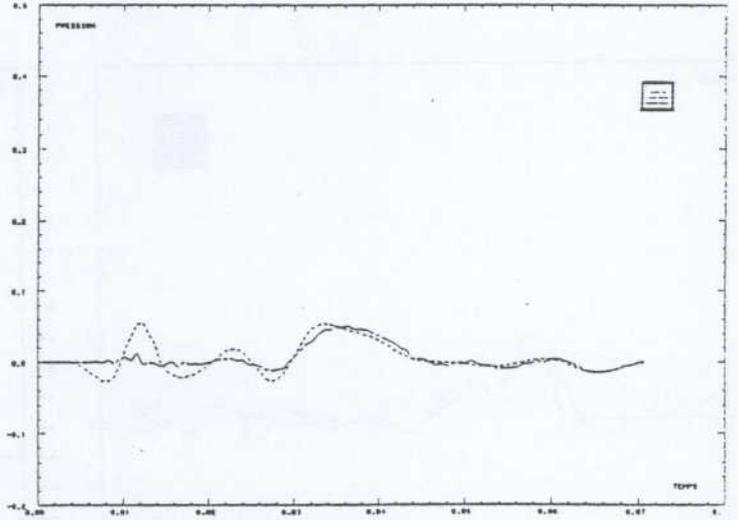
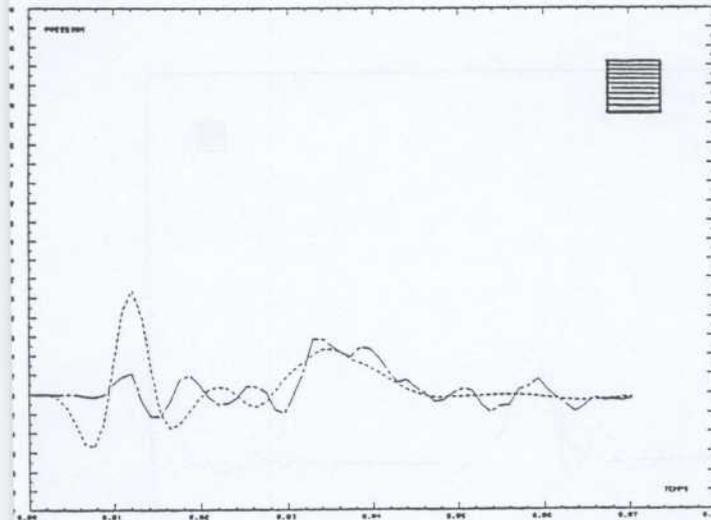
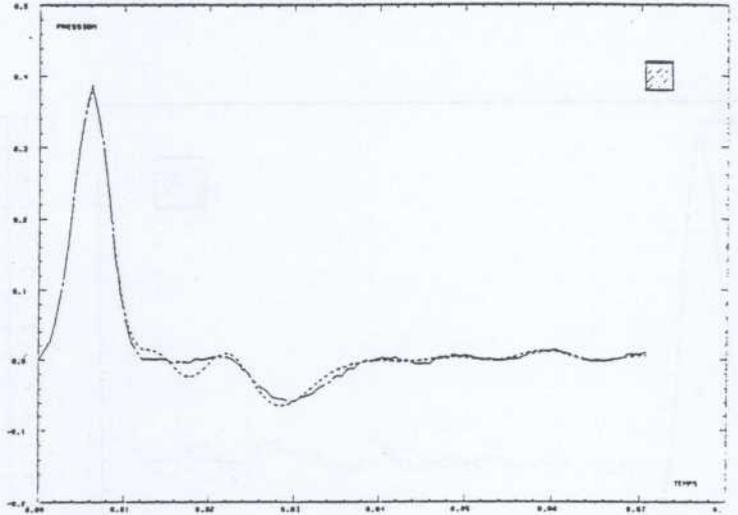
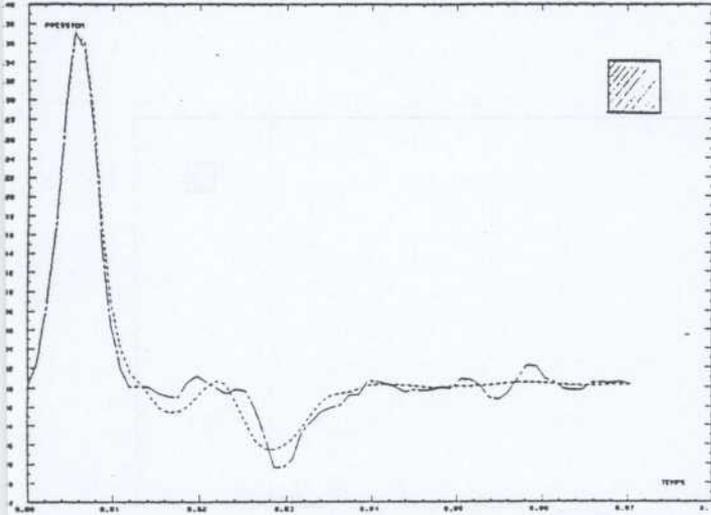
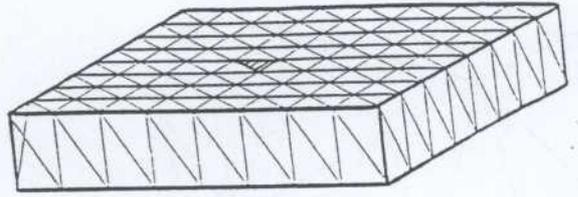
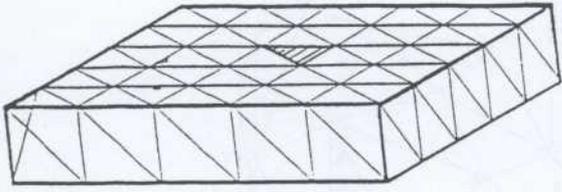


Figure 1 : Cas de la boîte

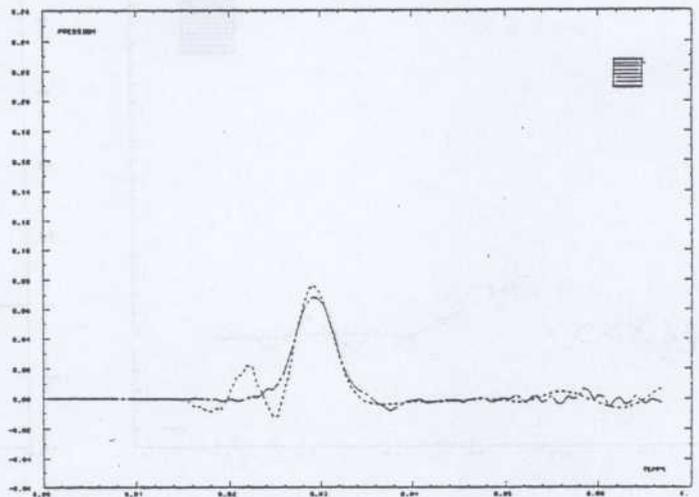
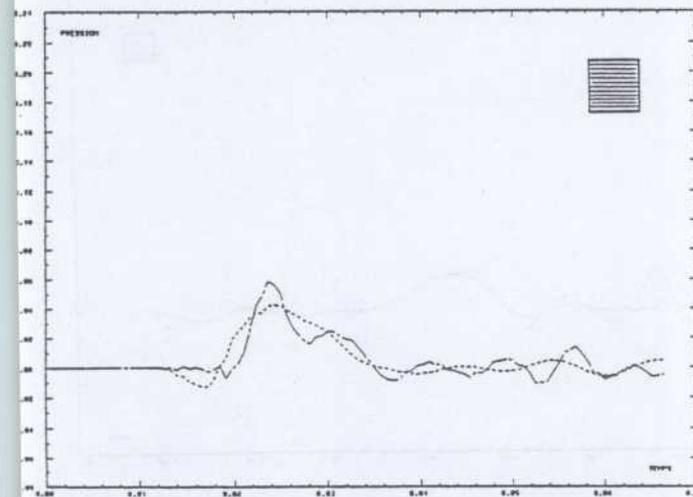
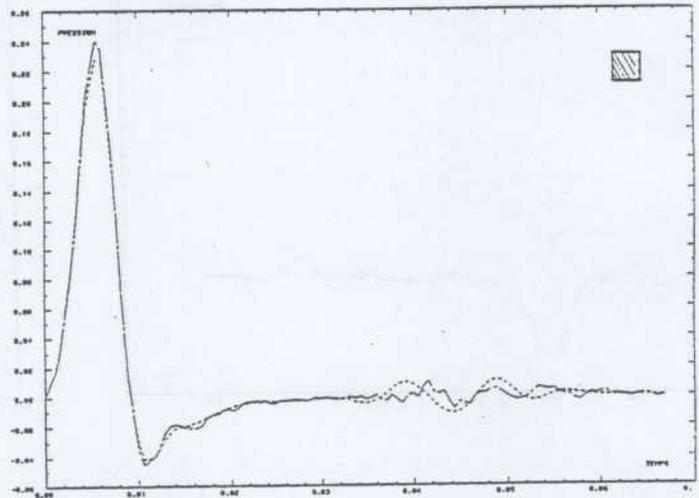
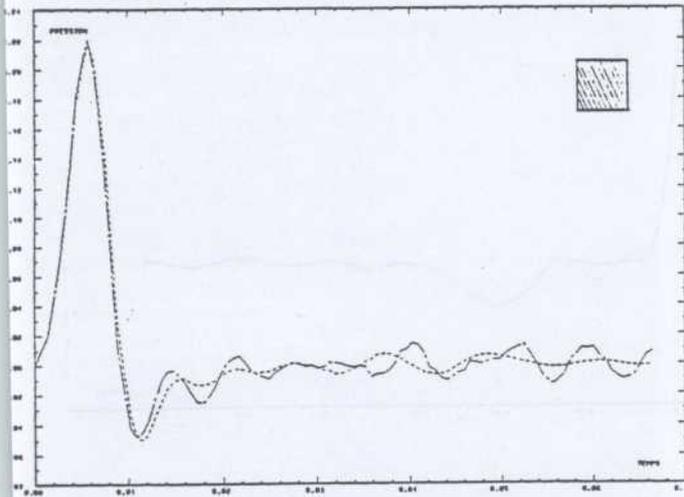
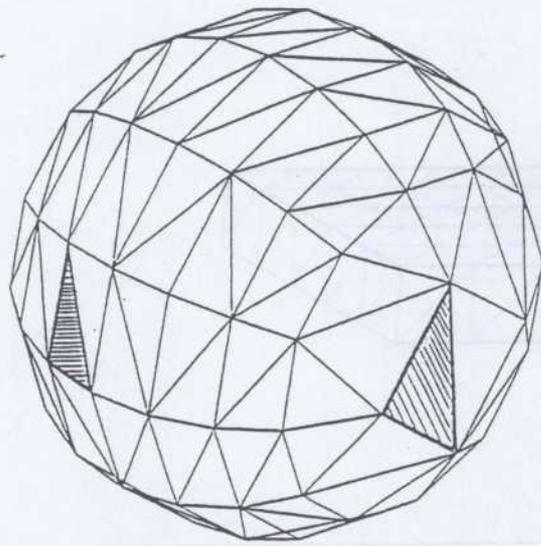
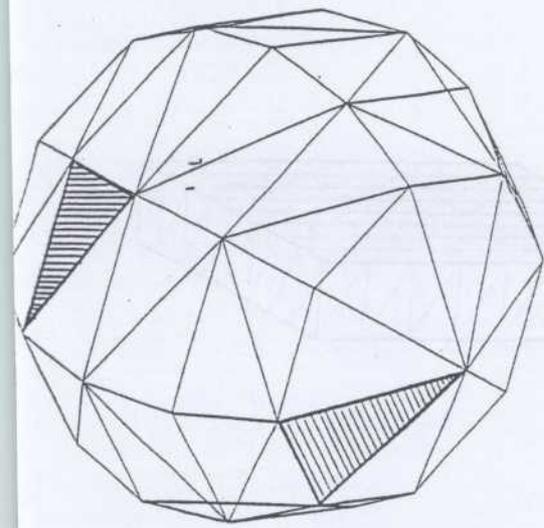


Figure 2: Cas de la sphère

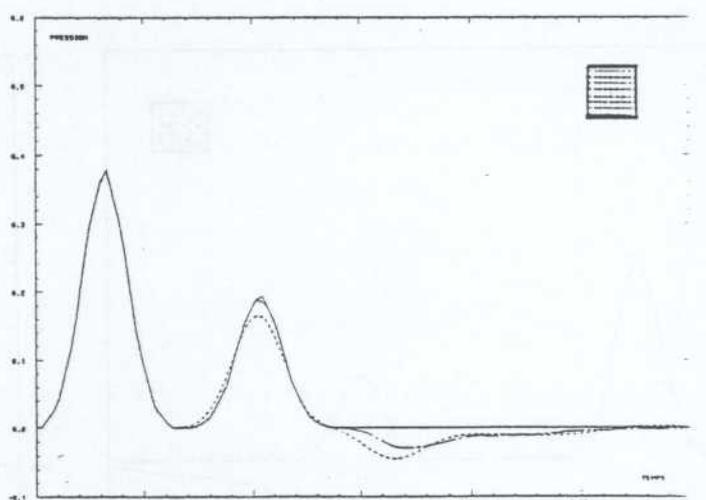
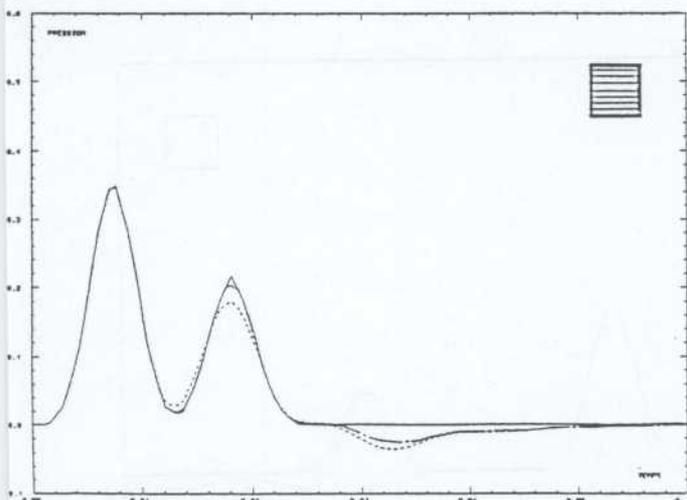
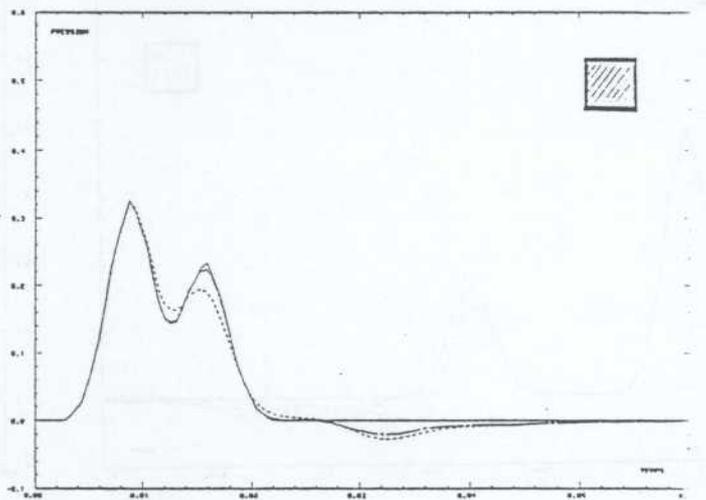
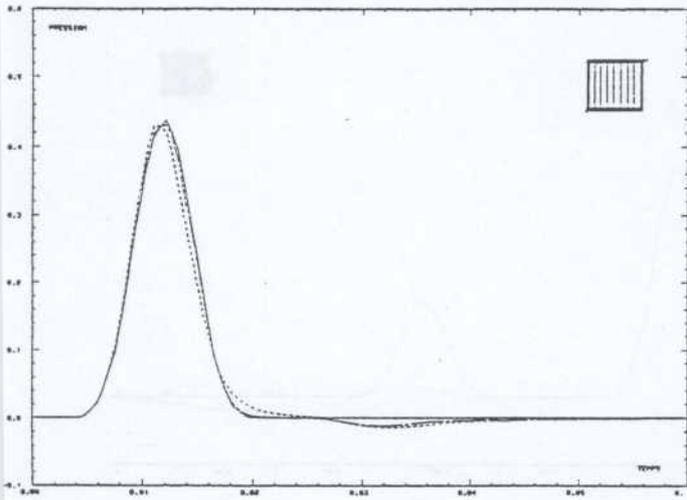
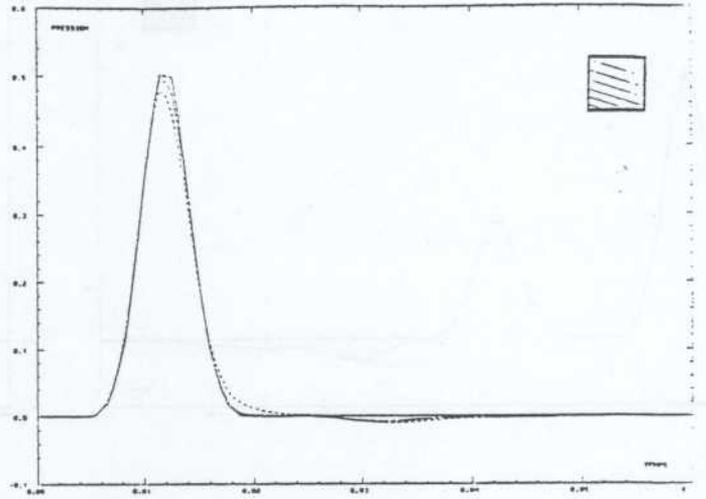
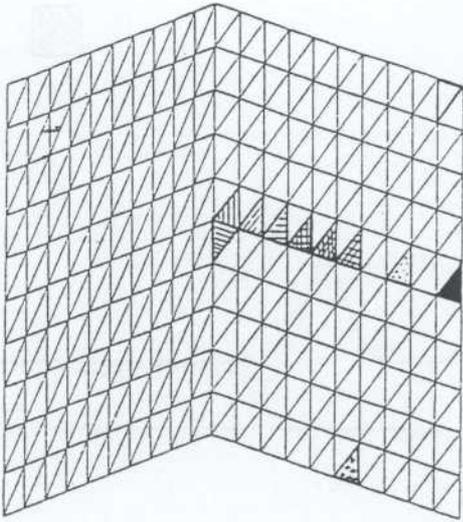


Figure 3 : Cas du dièdre orthogonal

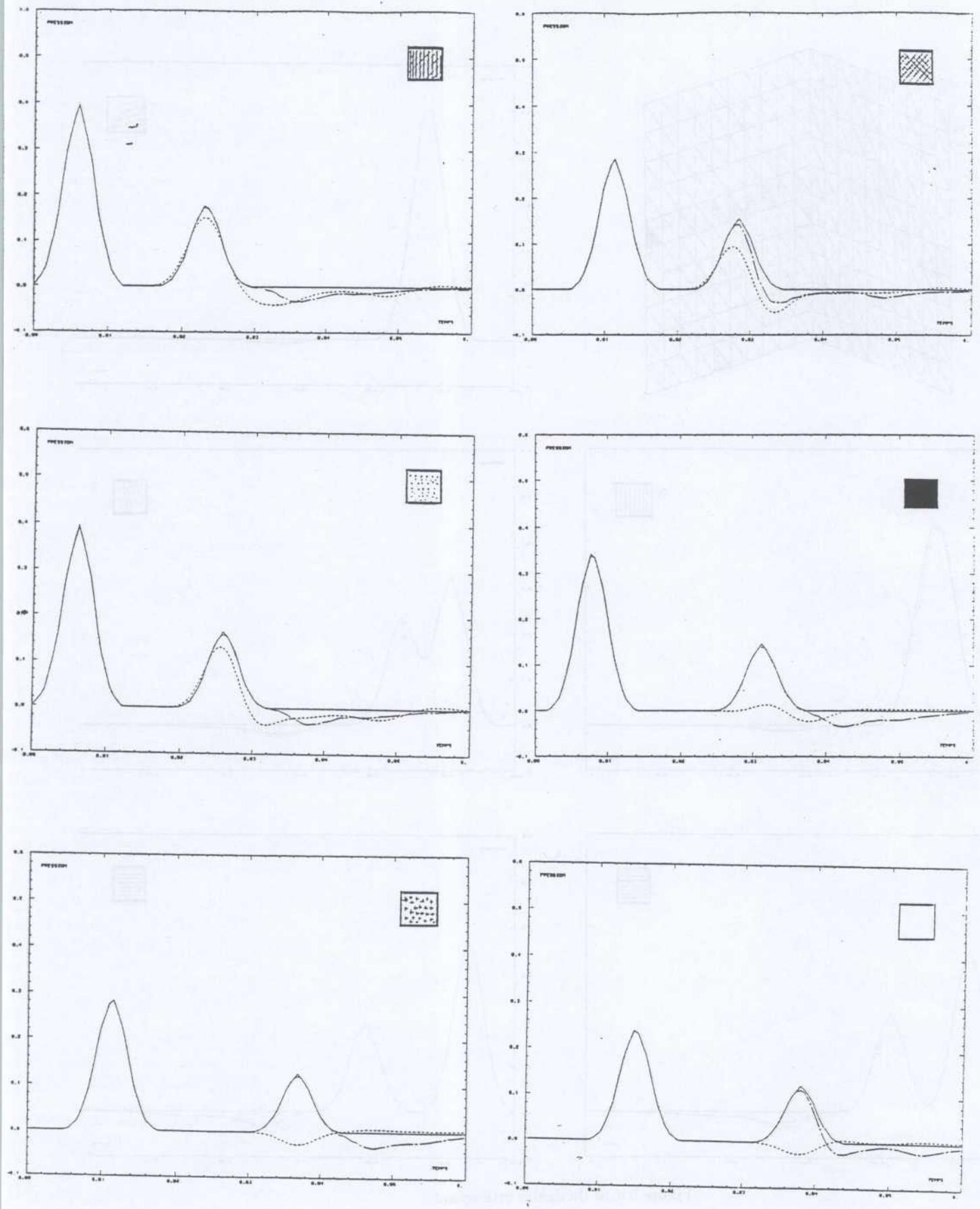


Figure 4 : Cas du dièdre orthogonal

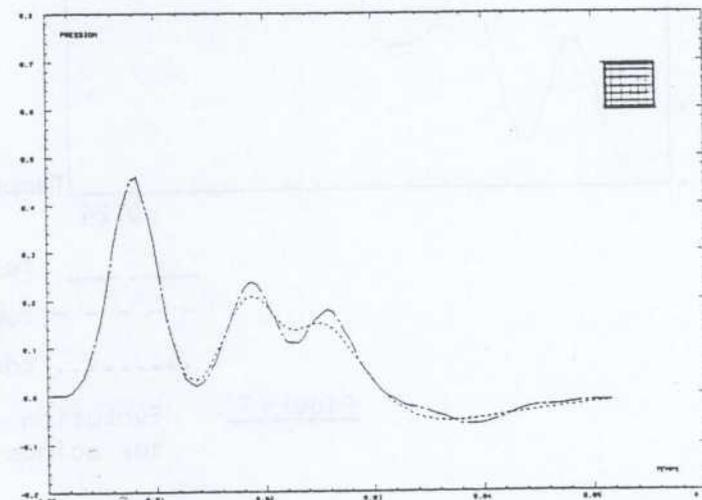
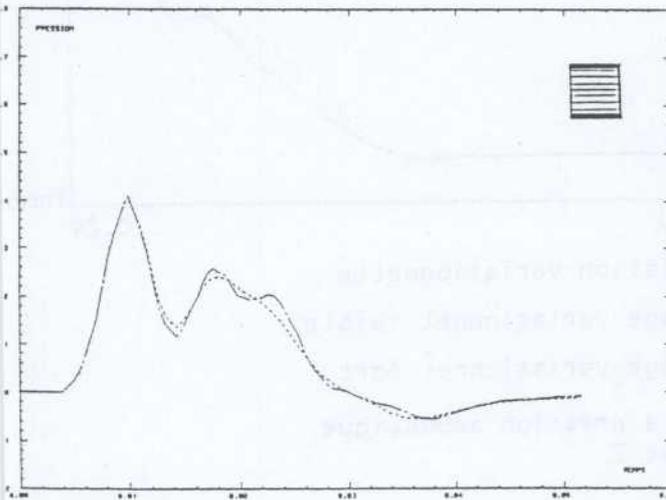
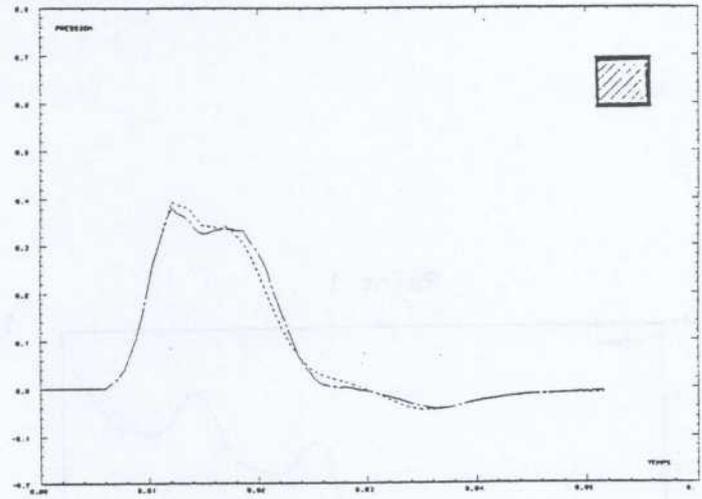
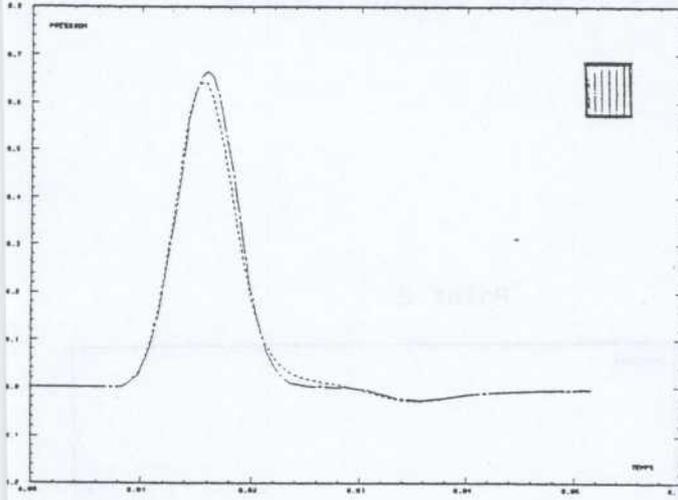
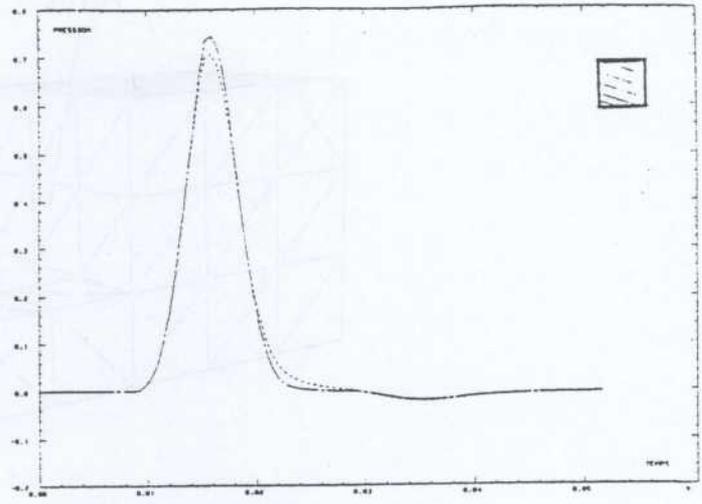
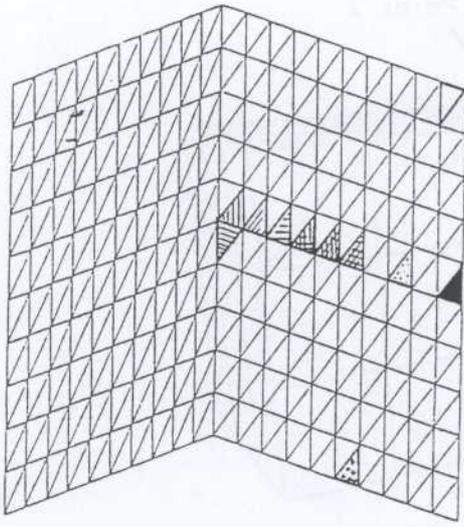


Figure 5 : Cas du dièdre à 120 degrés

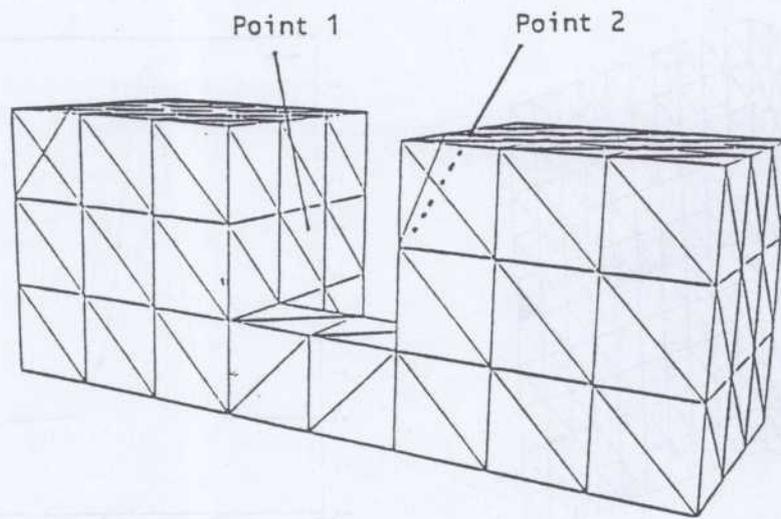


Figure 6. Onde acoustique éclatant dans un bâtiment et transmise à un autre domaine interne.

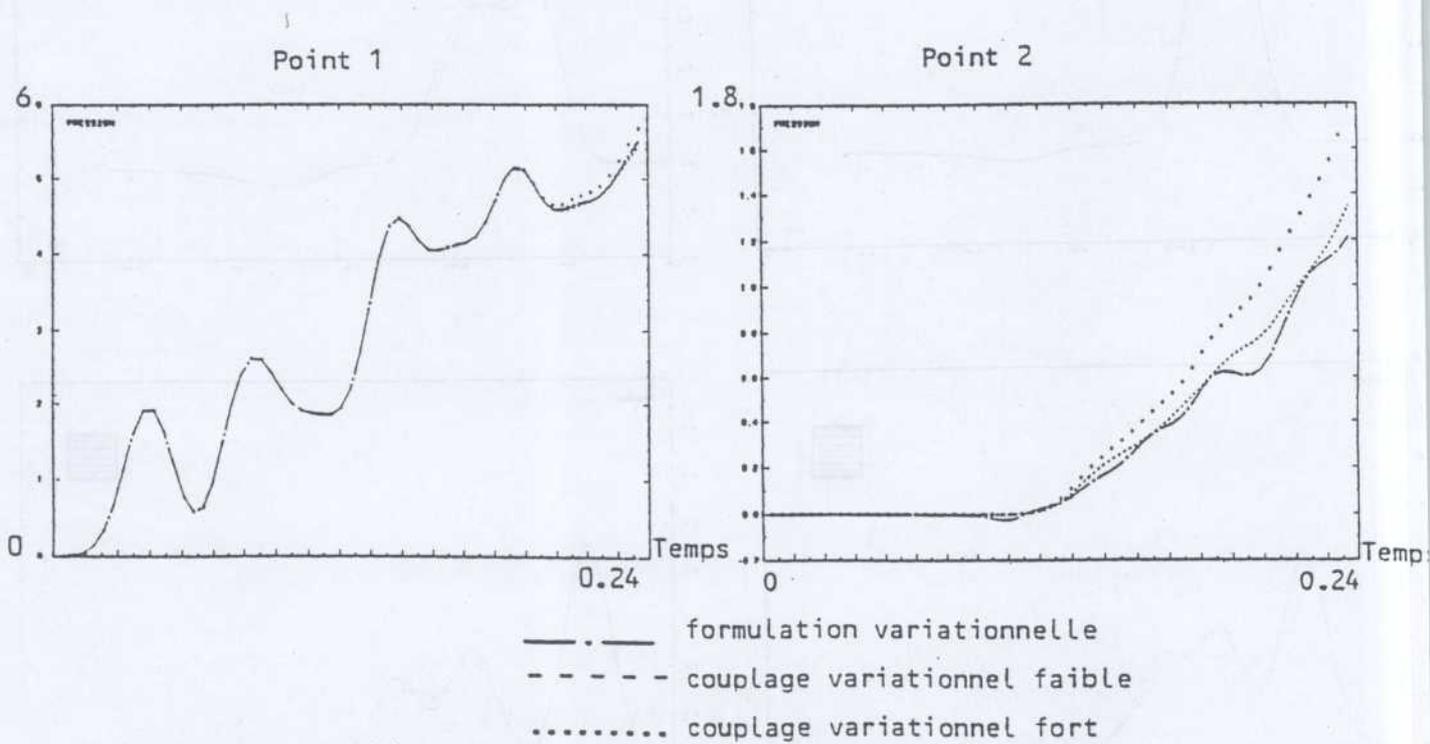


Figure 7. Evolution de la pression acoustique aux points 1 et 2

