

Calcul des modes non-linéaires de modèles réduits de structures avec conditions aux limites à jeu

E. H. Moussi^{a,b}, S. Bellizzi^a, B. Cochelin^{a,c}, I. Nistor^b

a. *Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA), 31 chemin Joseph Aiguier, 13402 MARSEILLE*

b. *LaMSID EDF-CNRS-CEA 2832, 1 Avenue du Général de Gaulle, 92141 CLAMART*

c. *École Centrale de Marseille (ECM), 38 rue Frédéric Joliot-Curie, 13451 MARSEILLE*

Résumé :

On analyse, à l'aide des modes non-linéaires, le comportement vibratoire des structures soumises à des conditions aux limites à jeu. Les applications concernent les composantes des installations de centrale nucléaire. Dans cette perspective, on considère un système à un degré de liberté avec impact unilatéral, et un système à deux degrés de liberté doté d'un contact bilatéral. Pour ces deux problèmes simples, on compare des solutions analytiques de référence et des solutions numériques obtenues avec le logiciel MANLAB (équilibre harmonique, régularisation).

Abstract :

We analyze, with nonlinear normal modes, the vibratory behaviour of structures subject to localized contact conditions. The applications concerns components of nuclear station facilities. In this prospect, we consider a system of one degree of freedom with unilateral impact, and a system of two degree of freedom with bilateral contact. For both problems we compare reference analytical solution with numerical ones obtained by MANLAB software (harmonic balance, regularization).

Mots clefs : mode non-linéaire ; impact localisé ; régularisation

1 Introduction

Les structures vibrantes incluant des conditions de contact à jeu sont très nombreuses dans les installations de centrale nucléaire. A titre d'exemple, on peut citer les tubes Générateur de Vapeur (GV) qui sous l'effet des forces fluide élastique de l'écoulement diphasique secondaire ambiant viennent impacter les plaques entretoises. L'étude de la dynamique de ces structures a pour but de déterminer l'usure et les risques d'instabilités.

Pour aborder ce type de problème, on considère des modèles réduits de structures élastiques linéaires qui comportent un petit nombre de conditions de contact à jeu localisées. On modélise les forces de contact en régularisant des lois linéaires par morceaux et en conservant certaines symétries. On se trouve alors dans le cadre des structures élastiques non-linéaires régulières pour lesquelles on peut définir et calculer une famille de modes non-linéaires (MNL) selon la définition de Shaw et Pierre [7] et ses variantes [1][2], ou encore selon la définition de Rosenberg si les symétries sont suffisantes. On peut également utiliser directement le logiciel MANLAB [4] qui calcule les MNL par équilibre harmonique d'ordre élevée. Dans la suite, on se limite pour l'instant à un oscillateur à un degré de liberté avec impact unilatéral, et un oscillateur à deux degrés de libertés avec impact bilatéral, représentatif du tube GV. Ces modèles sont semblables à ceux de [6][5].

Pour ces deux modèles simples, on sait construire des solutions analytiques de référence pour des lois de contact non-régularisées. Elles permettent d'évaluer la qualité des solutions numériques obtenues avec MANLAB qui reposent sur une régularisation et une troncature finie de la méthode d'équilibre harmonique (MBH).

Ces comparaisons vont permettre de maîtriser les paramètres d'ajustement de la méthode numérique, qui sera la seule applicable sur des modèles plus complexes.

2 Modèle à un degré de liberté

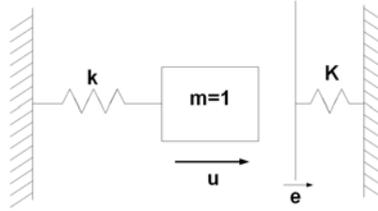


FIG. 1 – Modèle à un degré de liberté avec impact unilatéral.

Le modèle étudié comprend une masse reliée à un ressort k qui peut impacter sur un ressort de raideur K distant de e de la masse. On note u le déplacement de la masse et F la force de contact. Cette dernière est non-régulière et s'écrit $F(u(t)) = 0$ si $u(t) \leq e$, $K(u(t) - e)$ si $u(t) > e$. Pour faciliter l'étude du modèle, les variables t , u , et F sont adimensionnées, $\tau = \sqrt{k}t$, $\mu(t) = \frac{u(t)}{e}$, $\phi(u(t)) = \frac{F(u(t))}{ke}$ conduisant à

$$\ddot{\mu}(\tau) + \mu(\tau) + \phi(\mu(\tau)) = 0 \quad (1)$$

Ces changements de variables permettent d'éliminer la variable e , et font apparaître comme seul paramètre le rapport des raideurs K/k .

2.1 Calcul analytique des solutions périodiques

On s'intéresse ici au calcul des solutions périodiques du système (1) caractérisant ainsi le mode non-linéaire représenté dans l'espace des phases sous la forme d'une orbite périodique. Le problème non-linéaire est résolu en considérant deux problèmes linéaires l'un correspond à $\mu(\tau) \leq 1$ (hors impact), et l'autre à $\mu(\tau) > 1$ (pendant l'impact).

2.1.1 Mouvement de la masse hors impact

L'équation s'écrit simplement

$$\ddot{\mu}(\tau) + \mu(\tau) = 0. \quad (2)$$

S'appuyant sur les symétries des orbites cherchées, on s'intéresse au mouvement de la masse partant en $t = 0$ de $\mu(0) = \mu_{min}$ et $\dot{\mu}(0) = 0$ et arrivant en $t = T_1/2$ en $\mu(T_1/2) = 1$. Il est commode d'introduire l'énergie mécanique $E = \frac{1}{2}\dot{\mu}(0)^2 + \frac{1}{2}\mu(0)^2$ du système comme paramètre ce qui donne $\mu_{min} = -\sqrt{2E}$. La variable T_1 (durée de la phase hors impact) est obtenue en résolvant l'équation algébrique $-\sqrt{2E} \cos(\frac{T_1}{2}) = 1$ ce qui conduit à

$$T_1 = 2 \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2E}}\right). \quad (3)$$

2.1.2 Mouvement de la masse pendant l'impact

Dans ce cas, l'équation fait apparaître un terme forçant

$$\ddot{\mu}(\tau) + \mu(\tau) + \frac{K}{k}(\mu(\tau) - 1) = 0 \quad (4)$$

Pour simplifier les calculs, le changement de variable $\hat{\mu}(\tau) = \mu(\tau) - \mu_{eq}$ est introduit où $\mu_{eq} = \frac{K}{K+k}$ désigne le point d'équilibre statique de (4). Le même raisonnement permet de caractériser la durée T_2 de l'impact en résolvant $\frac{K}{K+k} + \sqrt{\frac{2kE}{K+k}} \cos\left(\sqrt{\frac{k+K}{k}} \frac{T_2}{2}\right) = 1$ ce qui conduit à

$$T_2 = 2\sqrt{\frac{k}{K+k}} \arccos\left(\sqrt{\frac{k}{2E(K+k)}}\right). \quad (5)$$

La période des solutions est donnée par $T_1 + T_2$.

2.2 Approche des solutions périodiques par régularisation et MBH

La mise en oeuvre de la méthode numérique repose sur une régularisation de la force d'impact ϕ à l'aide de la fonction ϕ_η (définie de façon implicite dans (6)) et la résolution du système algébro-différentiel

$$\begin{cases} \dot{\mu} = \nu \\ \dot{\nu} = -\mu - \phi_\eta \\ 0 = -\eta \frac{K}{k} + \phi_\eta(\phi_\eta - \frac{K}{k}(\mu - 1)) \end{cases} \quad (6)$$

par une méthode d'équilibrage harmonique d'ordre élevé et la méthode de continuation MAN (logiciel MANLAB). Les paramètres seront le nombre d'harmonique H et $\eta \ll 1$ qui détermine la finesse de régularisation des lois de contact.

2.3 Comparaison entre les solutions analytiques et numériques

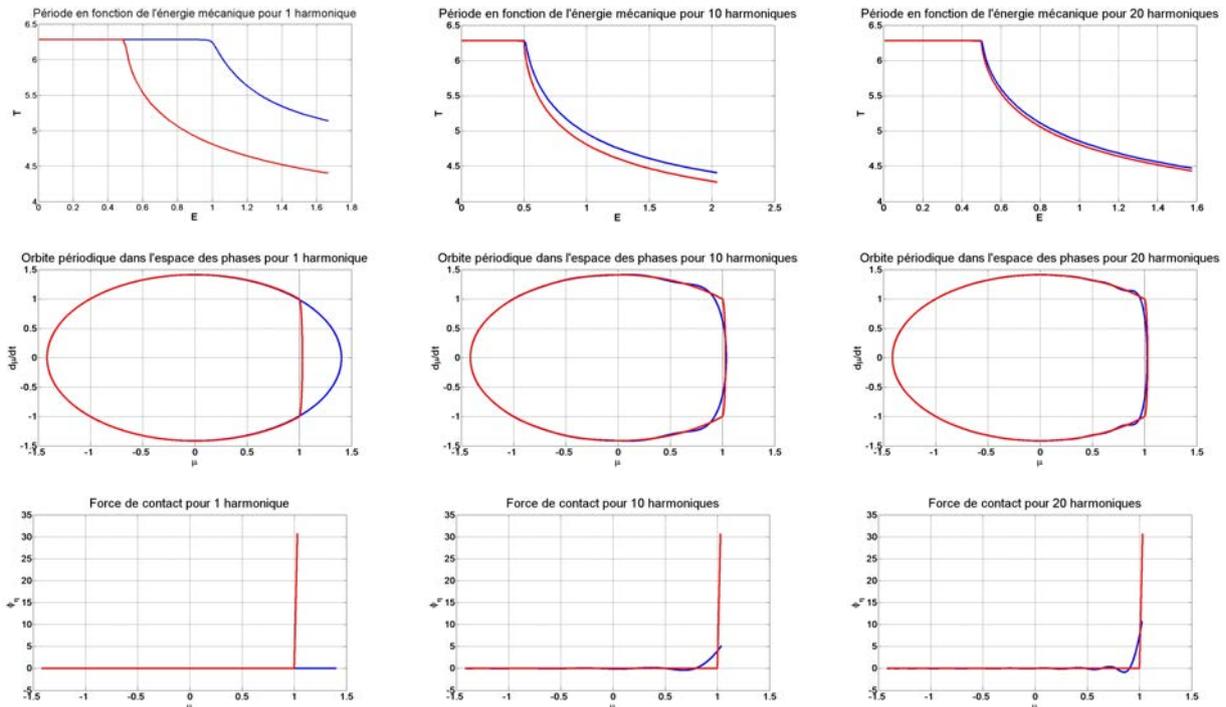


FIG. 2 – Modèle 1 DDL : solutions analytiques (en rouge) et numériques (en bleu).

La figure 2 résume les résultats obtenus avec $k = 1$, $K = 1000$ et $\eta = 0.0001$. Le choix de ce dernier paramètre résulte d'un compromis : il doit être suffisamment petit pour que la loi régularisée ϕ_η reste proche de ϕ , mais pas trop petit, sous peine d'utiliser un grand nombre d'harmonique. Pour l'approche numérique, le nombre d'harmonique vaut successivement $H = 1, 10, 20$. On constate que l'augmentation du nombre d'harmonique permet l'amélioration de la qualité de la solution numérique pour estimer la période sur une large plage de l'énergie mécanique (première ligne de la figure 2). A noter que l'utilisation d'un seul terme dans le développement en harmonique est à proscrire. Pour $E = 1$, la comparaison des orbites périodiques (deuxième ligne de la figure 2) et de la force d'impact (troisième ligne de la figure 2) confirme l'importance et l'apport des harmoniques. Pour $H = 10$ ou 20 , le temps de rebond est plus long et la force est plus faible que dans la solution de référence, globalement on obtient une orbite périodique semblable à celle qui est obtenue analytiquement.

3 Modèle à deux degrés de liberté

Le modèle considéré (voir figure 3) comprend deux masses (m_1 et m_2) et deux ressorts (k_1 et k_2). La masse m_1 peut impacter un ressort de raideur K distant de $\pm e$. On note u_i le déplacement de la

masse m_i pour $i = 1, 2$ et F la force d'impact définie par

$$F(u_1(t)) = \begin{cases} K(u_1(t) - e) & \text{si } u_1(t) > e \\ 0 & \text{si } |u_1(t)| \leq e \\ K(u_1(t) + e) & \text{si } u_1(t) < -e \end{cases} \quad (7)$$

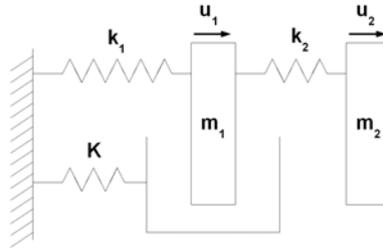


FIG. 3 – Modèle à deux degrés de liberté avec impact bilatéral.

Pour faciliter l'étude du modèle, les variables t , u , et F sont adimensionnées, $\tau = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}t$, $\mu_i(t) = \frac{u_i(t)}{e}$, $\phi(u_1(t)) = \frac{F(u_1(t))}{k_1 e}$ conduisant à

$$\begin{cases} \ddot{\mu}_1(\tau) + \mu_1(\tau) + \frac{k_2}{k_1}(\mu_1(\tau) - \mu_2(\tau)) + \phi(\mu_1(\tau)) = 0 \\ \frac{m_2}{m_1}\ddot{\mu}_2(\tau) + \frac{k_2}{k_1}(\mu_2 - \mu_1) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Ces changements de variables permettent d'éliminer la variable e , et font apparaître comme seul paramètre le rapport des raideurs K/k_1 .

3.1 Calcul analytique des solutions périodiques

Suivant la procédure appliquée pour le système à 1 DDL, le problème non linéaire est décomposé en trois problèmes linéaires l'un correspondant à $|\mu_1(\tau)| \leq 1$ (hors impact), l'autre à $\mu_1(\tau) < -1$ (pendant impact) et le dernier à $\mu_1(\tau) > 1$ (pendant impact). On notera T_1 (respectivement T_2 et T_3) le temps de parcours dans la phase 1 (respectivement 2 et 3). S'appuyant sur les symétries du problème, $T_2 = T_3$. Pour calculer T_1 , on considère le mouvement partant du point où le déplacement est nul dans l'espace des phases et arrivant au point d'impact, ce qui correspond à une durée égale à $T_1/4$. A partir du point d'impact, on continue jusqu'au point où la vitesse est nulle, on obtient alors une durée égale à $T_2/2$. L'obtention de ces périodes nous permet de faire un raccordement des solutions périodiques, et ainsi décrire une famille d'orbites périodiques dans l'espace des phases paramétrée par l'énergie E définissant ainsi un mode non-linéaire.

3.1.1 Mouvement des masses hors impact

Dans ce cas, le système devient,

$$\begin{cases} \ddot{\mu}_1(\tau) + \mu_1(\tau) + \frac{k_2}{k_1}(\mu_1(\tau) - \mu_2(\tau)) = 0 \\ \frac{m_2}{m_1}\ddot{\mu}_2(\tau) + \frac{k_2}{k_1}(\mu_2 - \mu_1) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Pour obtenir T_1 , on prend comme point de départ $\mu_1 = 0$, $\dot{\mu}_1 = \dot{\mu}_{10}$ et $\mu_2 = 0$, $\dot{\mu}_2 = \dot{\mu}_{20}$. Les variables $\dot{\mu}_{10}$ et $\dot{\mu}_{20}$ sont des inconnues qui restent à déterminer. Le système (9) est résolu en passant par la base modale. La variable T_1 qui caractérise l'instant d'impact de la masse m_1 sur la butée conduit aux équations suivantes

$$\mu_1\left(\frac{T_1}{4}\right) = -1 \text{ et } \mu_2\left(\frac{T_1}{4}\right) = B \quad (10)$$

où la variable B est une inconnue. Il est à noter que dans ce problème, une condition implicite est posée, celle que les deux masses passent en même temps par zéro (en accord avec la définition de Rosenberg des modes non-linéaires).

3.1.2 Mouvement des masses pendant l'impact

Dans ce cas, le système devient,

$$\begin{cases} \ddot{\mu}_1(\tau) + \mu_1(\tau) + \frac{k_2}{k_1}(\mu_1(\tau) - \mu_2(\tau)) + \frac{K}{k_1}(\mu_1 - 1) = 0 \\ \frac{m_2}{m_1}\ddot{\mu}_2(\tau) + \frac{k_2}{k_1}(\mu_2 - \mu_1) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Le point de départ est le point d'arrivée du problème précédent hors impact. La méthode de calcul est identique à celle du cas précédent. Les solutions sont exprimées en passant par la base modale. Le point d'arrivée correspond à l'instant où les vitesses de deux masses sont nulles ce qui conduit aux équations

$$\mu_1\left(\frac{T_2}{2}\right) = C_1, \dot{\mu}_1\left(\frac{T_2}{2}\right) = 0 \text{ et } \mu_2\left(\frac{T_2}{2}\right) = C_2, \dot{\mu}_2\left(\frac{T_2}{2}\right) = 0 \quad (12)$$

où C_1 et C_2 sont deux nouvelles inconnues.

Les six équations (10)(12) algébriques faisant intervenir les sept inconnues T_1 , T_2 , $\dot{\mu}_{10}$ et $\dot{\mu}_{20}$, B , C_1 et C_2 sont résolues par la MAN [3]. La période des solutions est donnée par $T_1 + 2T_2$.

3.2 Approche des solutions périodiques par régularisation et MBH

De la même manière que le cas à un degré de liberté la résolution purement numérique de ce modèle à deux degrés de liberté passe par une régularisation de la fonction de contact ϕ .

$$\begin{cases} \dot{\mu}_1 & = \nu_1 \\ \dot{\nu}_1 & = -\mu_1 - \frac{k_2}{k_1}(\mu_1 - \mu_2) - \phi_\eta \\ \dot{\mu}_2 & = \nu_2 \\ \frac{m_2}{m_1}\dot{\nu}_2 & = -\frac{k_2}{k_1}(\mu_2 - \mu_1) \\ 0 & = \eta\left(\frac{K}{k_1}\right)^2\mu_1 + \phi_\eta\left(\phi_\eta - \frac{K}{k_1}(\mu_1 - 1)\right)\left(\phi_\eta - \frac{K}{k_1}(\mu_1 + 1)\right) \end{cases} \quad (13)$$

3.3 Comparaison entre les solutions analytiques et numériques

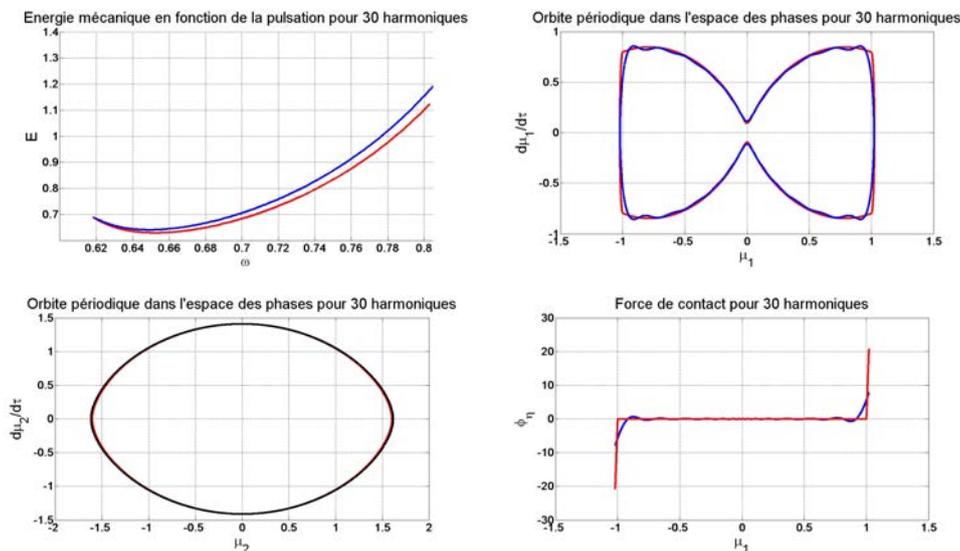


FIG. 4 – Solution analytique (en rouge) et numérique (en bleue) pour le premier mode. a) Énergie en fonction de la pulsation. b) Orbite périodique dans l'espace $(\mu_1, \frac{d\mu_1}{dt})$. c) Orbite périodique dans l'espace $(\mu_2, \frac{d\mu_2}{dt})$. d) Force de contact ϕ et son approximation ϕ_η en fonction du déplacement μ_1 .

On compare les solutions obtenues par le biais de quatre graphiques différents (figure 4), pour les paramètres suivants, $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, $K = 1000$, $\eta = 0.0001$ et $H = 30$. On prend comme point de départ le premier mode linéaire ($\omega_1 = 0.618$) du cas sans impact (figure 4).

L'énergie semble, dans un premier temps, diminuer légèrement lorsqu'on augmente la pulsation. On peut penser que cette diminution est due au fait que la vitesse de la masse m_1 (coincée entre les butées) diminue tandis que l'autre reste constante.

On poursuit notre comparaison en partant du second mode linéaire ($\omega_2 = 1.618$). On utilise ici les mêmes valeurs des paramètres sauf pour l'énergie $E = 2.5$.

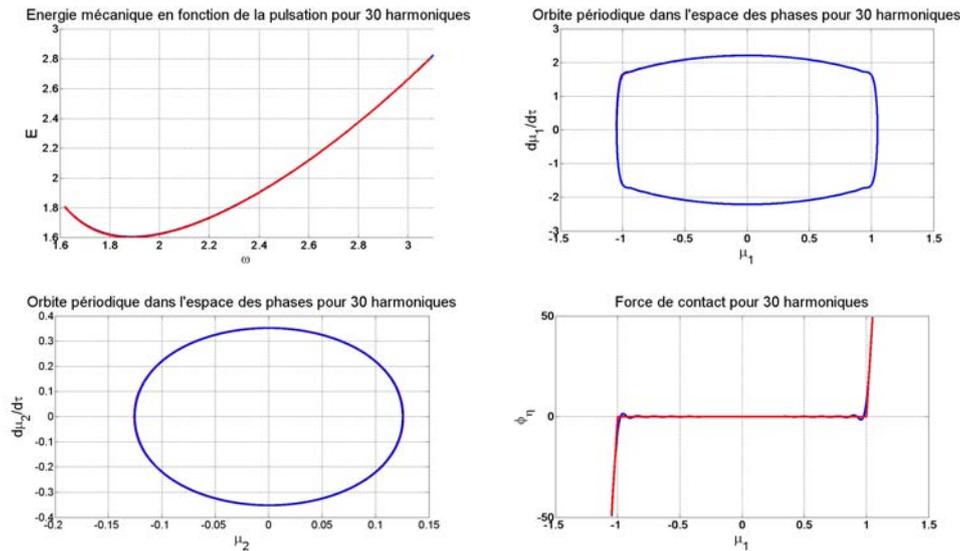


FIG. 5 – Solution analytique (en rouge) et numérique (en bleue) pour le second mode.

Pour un même nombre d'harmonique le second mode est mieux approché que le premier. Ceci est dû à la complexité de l'orbite périodique dans $(\mu_1, \frac{d\mu_1}{dt})$ pour le premier mode (figure 4 b.). De la même manière que précédemment l'énergie commence par décroître légèrement (figure 5 a.), du cette fois-ci à une diminution de la vitesse pour la masse m_2 .

4 Conclusion et Perspectives

L'étude de ces cas discrets a permis de comparer des résultats analytiques aux résultats numériques et de choisir les paramètres H et η conduisant à des approximations satisfaisantes des modes non-linéaires. Ces travaux se poursuivront par le traitement de problèmes continus de structures plus complexes discrétisées par éléments finis. On commencera par une poutre encastree soumise à plusieurs contacts localisés.

Références

- [1] Arquier, R., Bellizzi, S., Bouc, R., Cochelin, B. 2006 Two methods for the computation of non linear modes of vibrating systems at larges amplitudes. *Computers and Structures*. **84** 1565-1576.
- [2] Bellizzi, S., Bouc, R. 2005 A new formulation for the existence and calculation of nonlinear normal modes. *Journal of Sound and Vibration*. **287(3)** 545-569.
- [3] Cochelin, B., Damil, N., Potier-Ferry, M. 2007 Méthode asymptotique numérique. *Hermes Science Publications*.
- [4] Cochelin, B., Vergez, C. 2009 A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions. *Journal of Sound and Vibration*. **324** 243-262.
- [5] Jiang, D., Pierre, C., Shaw, S.W. 2006 Large-amplitude non-linear normal modes of piecewise linear systems. *Journal of Sound and Vibration*. **272** 869-891.
- [6] Pascal, M. 2006 Dynamics and stability of a two degree freedom oscillator with an elastic stop. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. **1** 94-102.
- [7] Shaw, S.W., Pierre, C. 1993 Normal modes for non-linear vibratory systems. *Journal of Sound and Vibration*. **164** 85-124.