



HAL
open science

Condensation de la matrice de masse pour les éléments finis mixtes de H (rot)

Yves Haugazeau, Patrick Lacoste

► **To cite this version:**

Yves Haugazeau, Patrick Lacoste. Condensation de la matrice de masse pour les éléments finis mixtes de H (rot). Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I, Mathématique, Elsevier, 1993, 316 (5), pp.509-512. cea-03607855

HAL Id: cea-03607855

<https://hal-cea.archives-ouvertes.fr/cea-03607855>

Submitted on 14 Mar 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Condensation de la matrice masse pour les éléments finis mixtes de $H(\text{rot})$

YVES HAUGAZEAU et Patrick LACOSTE

Résumé — Le remplacement par une matrice diagonale de la matrice masse, celle qui traduit le produit $L^2(\Omega)$ sur un espace d'éléments finis, est source d'une économie de calcul dans divers problèmes : équations d'évolution, problèmes spectraux. C'est ce que l'on réalise ici pour les éléments finis les plus simples de $H(\text{rot}, \Omega)$.

Lumping techniques for mixed finite elements of $H(\text{curl}, \Omega)$ space

Abstract — The replacement by a diagonal matrix of the consistent mass matrix, expressing the $L^2(\Omega)$ scalar product, result in less calculation in different numerical applications such as evolution or eigenvalue problems. This is what we do here with the simplest finite elements of $H(\text{curl}, \Omega)$ space.

INTRODUCTION AU SUJET. — L'utilisation effective de la masse condensée (*condensation* correspond à l'expression anglaise *lumping*), présentée ci-dessous, s'avère plus délicate que celle des éléments P_1 par exemple. Des expériences numériques en ont montré l'efficacité [1], mais cet aspect n'est pas abordé ici. On se limite, d'une part à construire la matrice condensée, d'autre part à établir une majoration de l'erreur commise.

I. CONSTRUCTION. — (a) *Rappels* [2], [3]. — Les éléments finis de $H(\text{rot}, \Omega)$ ont pour degrés de liberté les circulations du champ sur les arêtes des mailles τ (trois arêtes pour les triangles en bidim, six arêtes pour les tétraèdres en tridim). Les fonctions de base

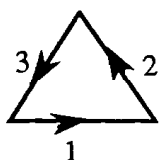


Fig. 1

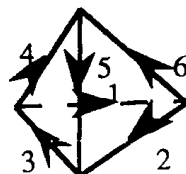


Fig. 2

s'en déduisent naturellement (on adopte les orientations des figures 1 et 2). La dimension m de l'espace V_τ des restrictions à la maille τ , est donc 3 en bidim, 6 en tridim.

(b) *Principes et constructions effectives*. — De même que la matrice de masse M est obtenue par assemblage des matrices élémentaires m_τ qui traduisent le produit $L^2(\Omega)$ sur la maille τ relativement aux degrés de liberté de $H(\text{rot}, \Omega)$, de même la matrice condensée M^L s'obtient par assemblage de matrices élémentaires condensées m_τ^L . L'association de m_τ^L à m_τ résulte du

THÉORÈME 1. — Il existe une matrice diagonale m_τ^L et une seule telle que les formes bilinéaires symétriques définies respectivement par m_τ et m_τ^L sur l'espace V_τ , coïncident sur le sous-espace des champs constants.

Preuve. — On note $m_\tau^L(\cdot, \cdot)$ et $m_\tau(\cdot, \cdot)$ les formes bilinéaires définies par les matrices m_τ^L et m_τ .

Note présentée par Jacques-Louis LIONS.

Cas de la dimension 2. — L'espace des champs constants sur la maille est de dimension 2. Les gradients des 3 coordonnées barycentriques $\nabla\lambda_1, \nabla\lambda_2, \nabla\lambda_3$ en sont un système générateur.

Sur la base canonique relative aux degrés de liberté (*fig. 1*), les coordonnées de ces gradients sont données ci-dessous :

$$(1) \quad \begin{cases} \text{pour } \nabla\lambda_1 \text{ par } A_1 = (0, 1, -1) \\ \text{pour } \nabla\lambda_2 \text{ par } A_2 = (-1, 0, 1) \\ \text{pour } \nabla\lambda_3 \text{ par } A_3 = (1, -1, 0) \end{cases}$$

Il apparaît immédiatement que :

$$(2) \quad \begin{cases} (m_\tau^L)_{11} = -((m_\tau^L A_2, A_3)) = -m_\tau^L (\nabla\lambda_2, \nabla\lambda_3) \\ (m_\tau^L)_{22} = -((m_\tau^L A_3, A_1)) = -m_\tau^L (\nabla\lambda_3, \nabla\lambda_1) \\ (m_\tau^L)_{33} = -((m_\tau^L A_1, A_2)) = -m_\tau^L (\nabla\lambda_1, \nabla\lambda_2) \end{cases}$$

où $((.,.))$ désigne le produit scalaire usuel de \mathbf{R}^3 .

En conséquence la condition nécessaire et suffisante de coïncidence des deux formes sur les champs constants s'écrit :

$$(3) \quad \begin{cases} (m_\tau^L)_{11} = -m_\tau (\nabla\lambda_2, \nabla\lambda_3) \\ (m_\tau^L)_{22} = -m_\tau (\nabla\lambda_3, \nabla\lambda_1) \\ (m_\tau^L)_{33} = -m_\tau (\nabla\lambda_1, \nabla\lambda_2) \end{cases}$$

C'est cette condition qui, d'une part prouve l'existence et l'unicité annoncées, et d'autre part fournit l'expression de $(m_\tau^L)_{11}, (m_\tau^L)_{22}, (m_\tau^L)_{33}$ en fonction des coefficients de m_τ . La preuve est donc aussi la méthode constructive.

Cas de la dimension 3. — L'espace des champs constants est de dimension 3. Il y a quatre gradients $\nabla\lambda_i$, et six paires différentes $(\nabla\lambda_i, \nabla\lambda_j)$ de gradients distincts, et les valeurs de $m_\tau (\nabla\lambda_i, \nabla\lambda_j)$ sont encore les opposés des six coefficients diagonaux de m_τ^L . Tout s'obtient comme en dimension 2 à partir du tableau des coordonnées des gradients sur la base canonique des $\nabla\lambda_i$.

(c) *Expressions explicites des termes diagonaux des matrices lumpées.* — Cas de la dimension 2, avec l'orientation de la figure 1 :

$$(4) \quad \begin{cases} (m_\tau^L)_{11} = (m_\tau)_{11} + (m_\tau)_{23} - (m_\tau)_{12} - (m_\tau)_{13} \\ (m_\tau^L)_{22} = (m_\tau)_{22} + (m_\tau)_{13} - (m_\tau)_{12} - (m_\tau)_{23} \\ (m_\tau^L)_{33} = (m_\tau)_{33} + (m_\tau)_{12} - (m_\tau)_{13} - (m_\tau)_{23} \end{cases}$$

Cas de la dimension 3, avec l'orientation de la figure 2 :

$$(5) \quad \begin{cases} (m_\tau^L)_{11} = (m_\tau)_{11} - (m_\tau)_{13} + (m_\tau)_{14} - (m_\tau)_{21} + (m_\tau)_{23} - (m_\tau)_{24} - (m_\tau)_{61} + (m_\tau)_{63} - (m_\tau)_{64} \\ (m_\tau^L)_{22} = -(m_\tau)_{12} + (m_\tau)_{13} - (m_\tau)_{15} + (m_\tau)_{22} - (m_\tau)_{23} + (m_\tau)_{25} + (m_\tau)_{62} - (m_\tau)_{63} + (m_\tau)_{65} \\ (m_\tau^L)_{33} = (m_\tau)_{12} - (m_\tau)_{13} + (m_\tau)_{15} - (m_\tau)_{32} + (m_\tau)_{33} - (m_\tau)_{35} + (m_\tau)_{42} - (m_\tau)_{43} + (m_\tau)_{45} \\ (m_\tau^L)_{44} = (m_\tau)_{14} - (m_\tau)_{15} + (m_\tau)_{16} - (m_\tau)_{34} + (m_\tau)_{35} - (m_\tau)_{36} + (m_\tau)_{44} - (m_\tau)_{45} + (m_\tau)_{46} \\ (m_\tau^L)_{55} = -(m_\tau)_{24} + (m_\tau)_{25} - (m_\tau)_{26} + (m_\tau)_{34} - (m_\tau)_{35} + (m_\tau)_{36} - (m_\tau)_{54} + (m_\tau)_{55} - (m_\tau)_{56} \\ (m_\tau^L)_{66} = -(m_\tau)_{14} + (m_\tau)_{15} - (m_\tau)_{16} + (m_\tau)_{24} - (m_\tau)_{25} + (m_\tau)_{26} + (m_\tau)_{64} - (m_\tau)_{65} + (m_\tau)_{66} \end{cases}$$

II. MAJORATION D'ERREUR. — Soit τ_h un maillage en triangles ou tétraèdres de Ω , de diamètre h , avec h vérifiant, pour tout triangle :

(H) $h/\rho \leq \chi$, où χ est une constante, et ρ le rayon du cercle inscrit.

On utilise les normes $L^2(\Omega)$ et $H(\text{rot}, \Omega)$ des champs de l'espace $H(\text{rot}, \Omega)$ et de son approximation V_h sur le maillage, et on les note $|\cdot|_\Omega$ et $\|\cdot\|_\Omega$ respectivement.

De même pour les restrictions à une maille τ , on a les normes $|\cdot|_\tau$ et $\|\cdot\|_\tau$ respectivement, et donc :

$$(6) \quad \|u\|_\Omega^2 = |u|_\Omega^2 + |\text{rot } u|_\Omega^2 = \sum_{\tau \in \tau_h} \|u\|_\tau^2 \quad \text{et} \quad |u|_\Omega^2 = \sum_{\tau \in \tau_h} |u|_\tau^2$$

En outre on pose :

$$(7) \quad d_\tau(\cdot, \cdot) = m_\tau^L(\cdot, \cdot) - m_\tau(\cdot, \cdot)$$

On a le

THÉORÈME 2. — Pour tout champ u_h de V_h et toute maille τ , on a l'inégalité suivante :

$$(8) \quad |d_\tau(u_h, u_h)| \leq c_1 h^2 |\text{rot } u_h|_\tau^2 + c_2 h |u_h|_\tau |\text{rot } u_h|_\tau$$

où c_1, c_2 sont des constantes qui ne dépendent que de la déformation de maille χ .

Preuve. — Notons u la restriction de u_h à la maille τ .

On a alors la décomposition suivante :

$$(9) \quad u = u^0 + \sum_{v=1}^n \eta^v \psi^v$$

où u^0 appartient aux sous-espace des champs constants $\{\nabla \lambda_i\}$ sur la maille τ , et où $\{\psi^v\}_{v=1, n} = \{\nabla \lambda_i\}^\perp$ et l'entier n vaut 1 en dimension 2, et 3 en dimension 3, de telle sorte que :

en dimension 2 : $\psi^1 = (1, 1, 1)$

en dimension 3 :

$$\psi^1 = (0, 1, 1, -1, 0, -1); \quad \psi^2 = (1, 0, 1, 1, -1, 0); \quad \psi^3 = (1, -1, 0, 0, 1, -1).$$

On a alors :

$$(10) \quad d_\tau(u_h, u_h) = 2 \sum_{v=1}^n \eta^v d_\tau(u^0, \psi^v) + \sum_{v, v'=1}^n \eta^v \eta^{v'} d_\tau(\psi^v, \psi^{v'})$$

D'autre part si on pose :

$$u^0 = \sum_{i=1}^m \alpha_i^0 p_i,$$

et de même :

$$\psi^v = \sum_{i=1}^m \psi_i^v p_i, \quad \text{avec} \quad \psi_i^v = -1, 0 \text{ ou } 1.$$

il vient encore :

$$(11) \quad d_\tau(u_h, u_h) = 2 \sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^n \alpha_i^0 \eta^v d_\tau(p_i, \psi^v) + \sum_{v, v'=1}^n \eta^v \eta^{v'} d_\tau(\psi^v, \psi^{v'})$$

Or le module de tout vecteur w , constant sur la maille τ vérifie l'égalité :

$$(12) \quad |w| = (\text{mes } \tau)^{-1/2} |w|_\tau$$

d'où :

$$(13) \quad |\alpha_j^0| \leq h |u^0| \quad \text{et donc} \quad |\alpha_j^0| \leq h (\text{mes } \tau)^{-1/2} |u^0|_\tau$$

et donc il vient la majoration suivante pour tout indice j :

$$(14) \quad |\alpha_j^0| \leq h (\text{mes } \tau)^{-1/2} |u_h|_\tau$$

D'autre part les termes η^ν qui représentent les circulations du champ u , sur le bord du triangle en dimension 2, le long de courbes fermées du tétraèdre en dimension 3, admettent les majorations suivantes (théorème de Stokes) :

$$(15) \quad |\eta^\nu| \leq h^2 (\text{mes } \tau)^{-1/2} |\text{rot } u_h|_\tau$$

Enfin en utilisant le

LEMME. — Pour tout i, j on a en dimension 2 et 3 :

$$(16) \quad |m_{ij}| \leq \frac{1}{h^2} c \text{ mes } \tau$$

où c est une constante ne dépendant que de la déformation de maille χ .

En effet : $|m_{ij}| \leq \text{mes } \tau \max_i \max_{x \in \tau} |p_i(x)|^2$ et d'autre part : $\max_{x \in \tau} |p_i(x)| \leq 2/\rho \leq 2\chi/h$.

Alors le second membre de (11) est une somme finie de termes qu'on majore indépendamment, à l'aide des inégalités (14), (15) et (16).

En conséquence, il existe des constantes c_1 et c_2 telles qu'on ait les deux inégalités :

$$(17) \quad \left| \sum_{\nu, \nu'=1}^n \eta^\nu \eta^{\nu'} d_\tau(\psi^\nu, \psi^{\nu'}) \right| \leq c_1 h^2 |\text{rot } u_h|_\tau^2$$

$$(18) \quad \left| 2 \sum_{i=1}^m \sum_{\nu=1}^n \alpha_i^0 \eta^\nu d_\tau(p_i, \psi^\nu) \right| \leq c_2 h |u_h|_\tau |\text{rot } u_h|_\tau$$

La conséquence du résultat précédent est la majoration suivante :

$$(19) \quad |d_\tau(u_h, u_h)| \leq (c_1 h + c_2) h \|u_h\|_\tau$$

d'où découle le

THÉORÈME 3. — Soit un maillage τ_h de diamètre au plus h , assujetti aux hypothèses (H).

Soient $u \in H(\text{rot}, \Omega)$ et $\pi_h u$ son interpolé sur V_h dont on note α le vecteur des degrés de libertés.

Soit M^L la matrice diagonale définie par (4) en dimension 2 ou par (5) en dimension 3.

Il existe $h_0 > 0$, tel que pour tout $h \leq h_0$ on ait :

$$(20) \quad |((M^L - M)\alpha, \alpha)| \leq Ch \|u_h\|_\Omega$$

où C est une constante ne dépendant que de la déformation de maille χ .

Un corollaire de ce théorème est le résultat de convergence suivant :

$$\lim_{h \rightarrow 0} ((M^L \alpha, \alpha)) = \lim_{h \rightarrow 0} |\pi_h u|_\Omega^2 = |u|_\Omega^2.$$

Note remise le 21 septembre 1992, acceptée le 6 octobre 1992.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] J. GAY, Y. HAUGAZEAU et P. LACOSTE, *La possibilité d'utiliser les techniques de lumping avec les éléments finis mixtes de $H(\text{rot})$* , Rapport CEA-CESTA DAM, janvier 1992.
- [2] P.-A. RAVIART et J.-M. THOMAS, *A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems*, Lecture Notes in Math., Springer Verlag, Berlin, 1977.
- [3] J.-C. NEDELEC, *Mixed finite elements in \mathbb{R}^3* , *Numer. Math.*, 35, 1980, p. 315-341.

Y. H. : Département de Mathématiques appliquées,
CeReMab, Unité associée au C.N.R.S. n° 226, Université Bordeaux-I,
351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex;

P. L. : C.I.S.I.-Ingénierie, C.E.A.-C.E.S.T.A., 33114 Le Barp.