



**HAL**  
open science

# Hyper-réduction d'ordre de modèles pour la mécanique du contact

Isabelle Ramière

► **To cite this version:**

Isabelle Ramière. Hyper-réduction d'ordre de modèles pour la mécanique du contact. Clefs du CEA, 70, , pp.29-31, 2020, Sacrées Mathématiques. cea-03581254

**HAL Id: cea-03581254**

**<https://cea.hal.science/cea-03581254>**

Submitted on 19 Feb 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Auteur** : Isabelle RAMIÈRE, ingénieur-chercheur en méthodes numériques, Département d'Études des Combustibles, Cadarache.

**Surtitre** : Mathématiques appliquées et Mécanique non-linéaire.

**Titre** : Hyper-réduction d'ordre de modèles pour la mécanique du contact.

## Résumé

La réduction d'ordre de modèles consiste à chercher la solution d'un problème à grand nombre d'inconnues dans un espace de dimension réduite. Cette approche trouve tout son intérêt pour l'accélération d'études paramétriques. La réduction d'ordre de modèles de problèmes fortement non-linéaires, comme le problème du contact en mécanique des solides, demeure un sujet de recherche important.

## Texte

### 1 Réduction d'ordre de modèle pour les équations aux dérivées partielles

La simulation numérique des différents phénomènes physiques passe le plus souvent par la résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP). De nombreuses méthodes d'approximation numérique ont été développées pour résoudre toutes sortes d'EDP. Parmi les plus connues, on peut citer la méthode des éléments finis, des différences finies, des volumes finis, des éléments discrets, des éléments frontières, etc. Bien que les progrès faits dans le domaine de l'informatique soient considérables et nous permettent actuellement de résoudre numériquement un grand nombre de problèmes qui semblaient insolubles il y a quelques dizaines d'années, nous souhaitons en permanence pousser la modélisation dans ses retranchements (petites échelles ou très grandes échelles) et obtenir davantage de précision pour des temps de calcul toujours plus faibles. Pour réduire le temps de calcul, des moyens indépendants de l'évolution de la puissance des processeurs ont été développés. Le plus connu est le calcul parallèle dans le domaine de l'informatique mais cela revient à faire des calculs avec un plus gros équipement informatique. Un autre moyen est la réduction d'ordre de modèles qui propose un complément, ou une alternative, aux méthodes d'approximation classiques dans le but de diminuer la taille du problème à résoudre.

Dans sa définition la plus générale, la réduction d'ordre de modèles consiste à proposer un modèle dont le nombre de degrés de liberté (ddl) est réduit, ROM pour Reduced-Order Model en anglais, comparé à un modèle d'ordre plein, abrégé FOM pour Full-Order Model en anglais, obtenu par une méthode d'approximation numérique classique. Pour réduire le nombre de ddl, l'idée est de chercher la solution du problème dans un espace d'approximation le plus petit possible. La réduction du temps de calcul dépend directement de la faculté de l'espace des solutions, pour un certain espace paramétrique d'étude, à être approximé par un espace de petite dimension. C'est la construction de cet espace d'approximation qui différencie les méthodes de réduction d'ordre de modèles.

Le domaine que recouvre le terme de réduction d'ordre de modèles est très vaste. C'est pourquoi nous ne tenterons pas de faire un inventaire des méthodes existantes. Deux catégories principales de méthodes existent dans la littérature : les méthodes dites *a priori* pour lesquelles l'espace d'approximation est construit à la volée et les méthodes dites *a posteriori* qui utilisent des résultats de calcul obtenus avec le FOM, communément appelés snapshots d'après la terminologie de Sirovich [1], pour construire l'espace d'approximation réduit. Ces dernières rentrent dans le cadre des méthodes d'apprentissage automatique (ou « machine learning » en anglais). Les méthodes *a posteriori*, qui nous intéressent ici, sont en général plus faciles à mettre en place dans un solveur existant.

Dans ces méthodes, la base réduite engendrant l'espace d'approximation réduit est soit directement composée de snapshots, soit de vecteurs obtenus en extrayant avec une méthode de compression de données l'information la plus importante contenue dans ces snapshots. La méthode la plus connue est alors la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD pour Proper Orthogonal Decomposition en anglais [2, 1]) car elle permet d'obtenir une base réduite optimale. Cette méthode s'appuie sur une approche de factorisation de matrice, la décomposition en valeurs singulières (abrégée SVD pour Singular Value Decomposition en anglais [3]) qui peut être vue comme la généralisation de la

diagonalisation aux matrices rectangles. Par ailleurs, la SVD permet d'obtenir les vecteurs propres par ordre décroissant des valeurs singulières (représentant l'énergie transportée et directement liées à l'erreur d'approximation) et ainsi de trouver, pour un nombre de vecteurs donné, la meilleure approximation d'une matrice  $S$  (pour nous, la matrice des snapshots) : les vecteurs singuliers associés aux plus grandes valeurs singulières sont ceux qui vont le mieux approximer la matrice  $S$ . Une fois la base réduite construite, le ROM est obtenu par projection du FOM sur la base réduite.

Ainsi, en appliquant une méthode d'approximation numérique standard, on se ramène généralement au problème discrétisé linéaire suivant correspondant au FOM :

$$\begin{cases} \text{Trouver } U \in \mathbb{R}^N \text{ tel que} \\ KU = F \end{cases} \quad (1)$$

avec  $K \in \mathbb{R}^{N \times N}$  et  $F \in \mathbb{R}^N$ . Le vecteur d'inconnues  $U$  est de taille  $N$ .

Pour obtenir le problème d'ordre réduit, on écrit la solution recherchée  $U$  dans la base réduite discrète  $V$  (de taille  $N \times l$ ) :  $U = V\gamma$ , où  $\gamma$  est le nouveau vecteur d'inconnues de taille  $l$ ,  $l$  étant petit devant  $N$ , contenant les ddl associés aux fonctions de la base réduite. Puis on projette le problème (1) à gauche sur la base réduite discrète (qui correspond à la discrétisation des fonctions tests de la base réduite dans la base complète). Le ROM s'écrit alors ainsi pour  $l \ll N$

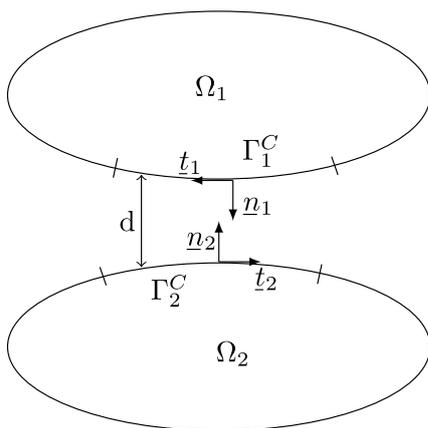
$$\begin{cases} \text{Trouver } \gamma \in \mathbb{R}^l \text{ tel que} \\ V^T K V \gamma = V^T F. \end{cases} \quad (2)$$

En posant  $\tilde{K} = V^T K V$  et  $\tilde{F} = V^T F$ , on reconnaît un problème de type (1) mais de taille  $l \times l$  au lieu de  $N \times N$ . Il est à noter cependant que la matrice  $\tilde{K}$  est en général pleine contrairement à la matrice  $K$  qui est une matrice creuse.

## 2 Réduction d'ordre de modèles en mécanique du contact

### 2.1 Mécanique du contact

D'un point de vue mécanique, le contact est la notion d'interaction entre un ou plusieurs objets qui vont échanger de l'énergie. Il intervient à l'interface entre deux objets qui se rencontrent. Sa nature discontinue en fait un phénomène très non-linéaire.



Ici l'interface de contact potentielle est  $\Gamma_1^C$  pour le solide  $\Omega_1$  et  $\Gamma_2^C$  pour le solide  $\Omega_2$ . Le jeu initial est  $d$ .

FIGURE 1 – Géométrie d'un problème de contact générique entre deux solides. Figure issue de l'article [4]

Nous nous intéressons ici à la résolution d'un problème mécanique avec contact sans frottement entre solides. Sans perte de généralité, nous considérons un problème de contact entre deux solides élastiques.

Les équations qui régissent le contact s'écrivent avec des inégalités ce qui mène à une inégalité variationnelle lors l'application standard des méthodes de discrétisation numérique (en particulier pour la méthode des éléments finis utilisée en mécanique des solides). Parmi les approches existantes pour traiter numériquement le contact, nous nous intéressons ici à la méthode des multiplicateurs de Lagrange qui permet de vérifier exactement l'ensemble des conditions de contact, notamment la condition de non-pénétration. Le multiplicateur de Lagrange introduit est en fait équivalent à la force de contact (au signe près). Le problème discrétisé (correspondant au FOM) s'écrit alors

$$\begin{cases} \text{Trouver } (U, \Lambda) \in \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^+)^{N_\lambda} \text{ tel que} \\ KU + B^T \Lambda = F \\ BU \leq D \\ \Lambda^T (D - BU) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

où  $N$  et  $N_\lambda$  correspondent respectivement au nombre de ddl associés à la variable primale ( $U$ ) et à la variable duale ( $\Lambda$ ),  $K \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{N_\lambda \times N}$ ,  $F \in \mathbb{R}^N$ ,  $D \in \mathbb{R}^{N_\lambda}$ . Ici  $N_\lambda$  représente le nombre total de contacts potentiels. La matrice  $B$  est appelée matrice de rigidité de contact. Chaque ligne de  $B$  correspond à un contact potentiel et le produit  $BU$  correspond au déplacement relatif sur la zone de contact avec  $D$  le jeu initial. Le problème (3) est en fait un problème d'optimisation de type point-selle. La méthode de résolution la plus utilisée pour résoudre le problème (3) est une méthode des statuts [5], ou active-set strategy en anglais, qui permet de se ramener d'une inégalité variationnelle à une égalité variationnelle que l'on sait résoudre par les méthodes de résolution standard. En pratique, cette méthode consiste à chercher la matrice de rigidité des contacts « actifs », c'est-à-dire la sous-matrice  $B_{ac}$  de  $B$  qui vérifie  $B_{ac}U = D_{ac}$  (avec  $D_{ac}$  le jeu initial sur la zone de contacts actifs). Pour cela la méthode va activer/désactiver les statuts de contact (lignes de  $B$ ) jusqu'à trouver une solution qui vérifie l'ensemble des conditions de contact (cf. équations (3b) et (3c)).

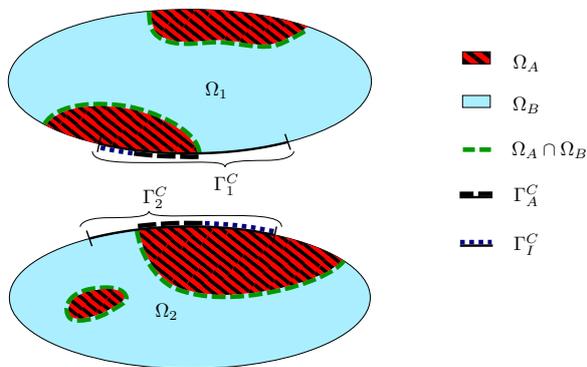
Le traitement du contact en mécanique du solide occupe la majeure partie du temps de résolution. L'intérêt de la réduction d'ordre de modèles pour ce type de problème est donc évident. La littérature à ce sujet est très récente et très limitée [6, 7].

Par rapport au problème général (1), le problème de contact (3) comporte des inconnues supplémentaires qui sont les multiplicateurs de Lagrange. Pour réduire au plus le modèle, il semble justifié de construire, en plus de la base réduite associée aux déplacements, une base réduite associée aux multiplicateurs de Lagrange. Il faut noter que la base duale (associée aux multiplicateurs de Lagrange) doit être positive. En pratique, il est très difficile de trouver une bonne base réduite approximant les multiplicateurs de Lagrange. De plus, après projection du modèle FOM sur les deux bases réduites, le ROM vérifie uniquement des conditions de contact projetées. Les conditions de contact initiales (notamment la condition de non-pénétration) ne sont alors plus vérifiées localement. C'est pourquoi nous nous sommes intéressés aux méthodes d'hyper-réduction de modèles afin de garantir la vérification des conditions de contact initiales.

## 2.2 Méthode d'Hyper-Réduction Hybride

La méthode d'hyper-réduction (HR) [8] repose à la fois sur la projection des équations sur une base réduite mais également sur la résolution du modèle sur un maillage réduit, appelé domaine d'intégration réduit (RID - Reduced Integration Domain en anglais). Cette particularité permet de réduire le temps de calcul puisque la projection se fait sur la base réduite restreinte au RID : il n'y a alors plus de dépendance à la taille du système obtenu avec la méthode d'approximation classique. Le gain en temps de calcul est particulièrement important pour des problèmes de mécanique avec des matériaux non-linéaires.

Au Département d'Etude des Combustibles de la Direction de l'Energie Nucléaire du CEA, nous avons travaillé sur l'extension de la méthode d'Hyper-Réduction à des problèmes de contact [4]. Dans ce travail, la définition du domaine d'intégration réduit a été revue afin de pouvoir garantir le calcul du jeu sur ce RID, cf. figure 2.



Avec  $\Omega_A$  : domaine d'intégration réduite (RID),  $\Omega_B$  : reste du domaine (où le modèle ne va pas être réduit),  $\Omega_A \cap \Omega_B$  : frontière fictive,  $\Gamma_A^C$  : zone de contact sur le RID avec jeu,  $\Gamma_I^C$  : zone de contact potentiel sur le RID où le jeu ne peut pas être calculé.

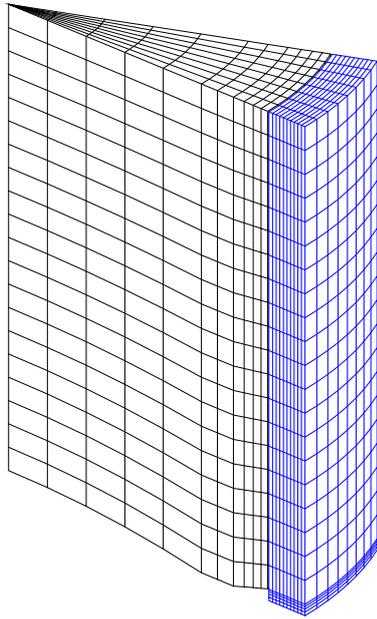
FIGURE 2 – Problème de contact entre deux solides sur un domaine réduit. Figure issue de l'article [4]

La base primale est obtenue par POD, et la base duale est obtenue par restriction de la base du FOM sur le RID. Ce choix est raisonnable car la restriction du domaine au RID va diminuer le nombre de contacts à traiter. Par ailleurs, il permet d'obtenir une très bonne prévision des forces de contact. Dans [4], le problème d'ordre réduit hybride ainsi obtenu est prouvé être bien posé et consistant avec la formulation FOM. Ainsi, le problème réduit tend bien vers la solution du problème d'ordre plein, avec notamment le respect des conditions de contact (sans projection). Une méthode de reconstruction des multiplicateurs de Lagrange sur tout le maillage a été également développée dans ces travaux.

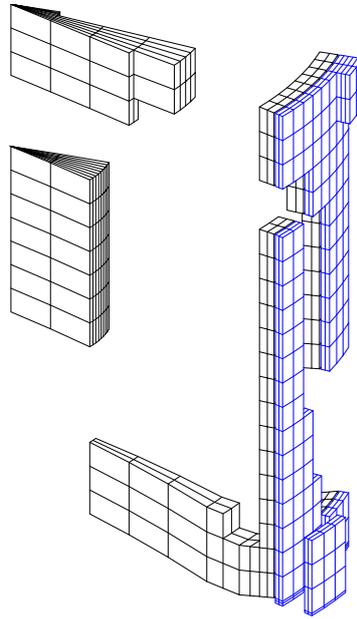
Cette méthode peu intrusive a pu être testée sur des problèmes de contact intervenant lors de la simulation mécanique du comportement des combustibles nucléaires [9]. Une illustration est donnée sur la figure 3. Les résultats obtenus sont très satisfaisants et permettent une réduction des temps de calculs d'un facteur de l'ordre de 10.

## Références

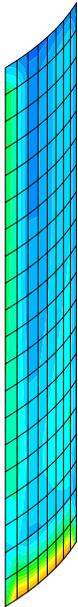
- [1] L. Sirovich. Turbulence and the dynamics of coherent structures. Parts I–III. *Quarterly of Applied Mathematics*, 45(3) :561–590, 1987.
- [2] J. L. Lumley. The Structure of Inhomogeneous Turbulent Flows. In A.M. Yaglom and V.I. Tatarski, editors, *Atmospheric turbulence and radio propagation*, pages 166–178. Nauka, Moscow, 1967.
- [3] C. Eckart and G. Young. The approximation of one matrix by another of lower rank. *Psychometrika*, 1(3) :211–218, Sep 1936.
- [4] J. Fauque, I. Ramière, and D. Ryckelynck. Hybrid hyper-reduced modeling for contact mechanics problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 115(1) :117–139, 2018.
- [5] S. Abide, M. Barbotou, and D. Danan. Analysis of two active set type methods to solve unilateral contact problems. *Applied Mathematics and Computation*, 284(C) :286–307, July 2016.
- [6] B. Haasdonk, J. Salomon, and B. Wohlmuth. A reduced basis method for parametrized variational inequalities. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 50(5) :2656–2676, 2012.
- [7] M. Balajewicz, D. Amsallem, and C. Farhat. Projection-based model reduction for contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 106(8) :644–663, 2016.
- [8] D. Ryckelynck. Hyper reduction of mechanical models involving internal variables. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77(1) :75–89, 2009.
- [9] J. Fauque. *Modèle d'ordre réduit en mécanique du contact. Application à la simulation du comportement des combustibles nucléaires*. PhD thesis, Université de recherche Paris Sciences et Lettres, MINES ParisTech, 2018.



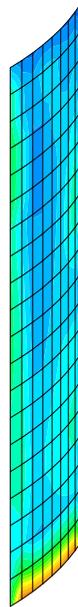
(a) Maillage éléments finis (3680 éléments) pour le FOM. Noir : pastille, bleu : gaine.



(b) RID (670 éléments) pour le ROM Hyper-Réduit. Noir : pastille, bleu : gaine.



(c) Force de contact avec le FOM



(d) Force de contact avec le ROM Hyper-Réduit

FIGURE 3 – Exemple d’Hyper-Réduction d’ordre de modèle pour le contact pastille-gaine, issu de la thèse de Jules Fauque [9].