
Description de la fissuration des éléments en béton armé : Méthode des Éléments Finis Intégrés Cracking description in reinforced concrete components : Embedded Finite Element Method

Ejona Kishta^{1,2}, Benjamin Richard¹, Cédric Giry², Frédéric Ragueneau²

1. CEA, DEN, DANS, DM2S, SEMT, Laboratoire d'Études de Mécanique Sismique
F-91191, Gif-sur-Yvette cedex

2. LMT-Cachan, ENS-Cachan, CNRS, Université Paris-Saclay
61, Avenue du Président Wilson, F-94230 Cachan cedex

RÉSUMÉ. La représentation physique de la fissuration nécessite une description fine du matériau, mais induit des temps de calculs prohibitifs dans une simulation numérique complète d'ouvrage. Une alternative permettant de décrire de manière naturelle la fissuration est la méthode des éléments finis enrichis (Embedded Finite Element Method). Cette méthode consiste à enrichir le champ de déplacement avec une discontinuité correspondant à l'ouverture de fissure. Elle est fondée sur un enrichissement local au niveau de l'élément fini, rendant son implantation numérique peu intrusive dans les codes de calcul actuels. Les phénomènes dissipatifs sont concentrés au sein d'une discontinuité dont le comportement peut être contrôlé grâce à une loi formulée en termes de vecteur traction/saut de déplacement. L'objectif de cet article est de décrire la fissuration de manière explicite et naturelle en utilisant la méthode E-FEM. Dans ce travail, cette méthode est couplée avec un modèle d'endommagement anisotrope décrivant les mécanismes non-linéaires à l'aide de familles de fissures orientées. Le modèle enrichi a été implanté dans le code de calcul Cast3M. Les simulations numériques au niveau du point d'intégration et sur structures en béton et béton armé illustrent les performances du modèle.

ABSTRACT. Failure mechanisms like cracking is not trivial to represent. Often it requires a fine description of the material inducing computational costs for a complete simulation of the building. Recently, the concept of displacement discontinuities embedded into a standard finite element has been proved to be efficient in modeling fracture of quasi-brittle materials. The enrichment is local at the element level and so it reduces calculation time. Hence, global system size remains unchanged and the structure of the element code too. Non-linear mechanisms are described by a traction/separation law at the discontinuity. The present paper aims at capturing crack openings in a natural way by using the E-FEM method. In this work, this method is coupled with an anisotropic damage model based on oriented cracks which can be tackled independently. This enriched constitutive model has been implemented in the finite element code Cast3M. Numerical simulations at the integration point level and on concrete and reinforced concrete structures show the performances of the model.

MOTS-CLÉS : Béton armé, Approche de Discontinuité Forte, E-FEM, endommagement, Cast3M.

KEYWORDS: Reinforced concrete, Strong Discontinuity Approach, E-FEM, damage, Cast3M.

1. Introduction

La fissuration des matériaux quasi-fragiles a été largement étudiée et demeure un sujet de recherche très actif car il est lié à diverses applications en ingénierie. De fait, les exigences en matière d'ouverture de fissure font

l'objet de critères de dimensionnement afin d'assurer la sûreté des ouvrages de génie civil, en particulier, les installations nucléaires. Les années 90 ont été marquées par le développement d'une nouvelle approche considérant la fissure comme un champ de déplacement discontinu. Dans ce domaine, la modélisation des structures en béton armé demeure une problématique ouverte. Cet article propose une contribution permettant d'apporter des éléments de réponse à cette problématique dans un cadre de modélisation anisotrope. Classiquement, les modèles d'endommagement [Richard and Ragueneau, 2013] ont montré leur efficacité et leur robustesse numérique, mais ne permettent pas d'aboutir à une information quantitative sur la fissuration, telle que l'ouverture de fissure ou encore l'espacement entre les fissures. De plus, des limiteurs de localisation [Giry et al., 2011] doivent être utilisés afin de diminuer les phénomènes pathologiques de dépendance au maillage. Des méthodes de post-traitement sont nécessaires afin d'accéder aux informations fines mentionnées ci-dessus [Oliver-Leblond et al., 2013]. D'autres approches, comme celle de la fissuration diffuse ou *smearred crack approach*, consistent à répartir la déformation inélastique sur un volume matériau sous forme d'une déformation de fissuration. Le phénomène de blocage en contraintes ou *stress locking* est observé pour les modèles à fissuration fixe ou tournante. Une étude complète de ces phénomènes a été réalisée par Jirasek [Jirásek and Zimmermann, 1998]. Le comportement des matériaux quasi-fragiles comme le béton est caractérisé par une anisotropie induite par le chargement : l'orientation des fissures dépend du trajet de chargement. Ce caractère anisotrope a été classiquement modélisé par une représentation tensorielle d'ordre deux ou quatre de la variable d'endommagement. L'objectif de ce travail est le développement d'un modèle numérique d'endommagement anisotrope capable de décrire explicitement les informations fines comme l'ouverture de fissure.

Récemment, les modèles introduisant une discontinuité au sein du champ de déplacement ont montré leur efficacité à quantifier la fissuration dans le béton. Deux grandes familles peuvent être distinguées : X-FEM [Dolbow and Belytschko, 1999] fondé sur un enrichissement nodal et E-FEM [Oliver, 1996] qui est fondé sur un enrichissement au niveau de l'élément. Les deux approches permettent de décrire la fissuration de manière naturelle et plus particulièrement l'ouverture de fissure ou l'espacement entre fissures. Dans cette étude, la méthode E-FEM a été choisie. Le caractère local de cette méthode permet de condenser la discontinuité et ainsi réduire le coût de calcul par rapport à la méthode X-FEM. De plus, la méthode E-FEM est peu intrusive dans les codes de calculs aux éléments finis actuels. Une loi de comportement dite discrète est obtenue à l'aide de modèles continus d'endommagement ou de plasticité formulés à partir d'une cinématique discontinue. Cette loi, exprimée en termes de vecteur traction/ouverture de fissure, rend compte des mécanismes dissipatifs concentrés au sein de la discontinuité.

Le modèle développé dans cet article couple l'approche E-FEM avec un modèle d'endommagement anisotrope [Bargellini, 2006]. Ce dernier est fondé sur des micro-fissures orientées pouvant représenter les mécanismes de rupture en mode-I, mode-II et mode-III. La loi discrète formulée permet de traiter les mécanismes dissipatifs liés à chaque famille de fissure indépendamment. L'article est organisé comme suit : premièrement, le modèle d'endommagement anisotrope considéré dans cette étude est présenté; deuxièmement, le principe des discontinuités fortes et le modèle discret obtenu sont exposés; enfin, les applications numériques au niveau du point d'intégration et à l'échelle de la structure sont traitées.

2. Modèle d'endommagement anisotrope

Dans ce paragraphe, le modèle d'endommagement anisotrope développé par Bargellini [Bargellini, 2006] est rappelé. Les principales caractéristiques et hypothèses du modèle sont exposées.

2.1. Endommagement anisotrope

La dégradation du matériau pendant le chargement est décrit comme la contribution d'un système de familles de fissures parallèles de normale \underline{n}_i auxquelles sont associées des variables internes scalaires représentant la densité de micro-fissuration ρ_i (voir figure 1).

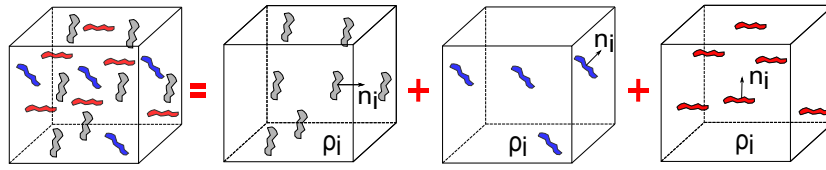


Figure 1: Familles de fissures de normale \underline{n}_i et densité ρ_i

Chacune des familles est indépendante et est liée à un mécanisme dissipatif de rupture comme le mode-I, mode-II ou mode-III. L'état d'endommagement est décrit par les couples $(\rho_i, \underline{N}_i)$ où \underline{N}_i sont des tenseurs directionnels fixes proportionnels au produit dyadique de la normale à la fissure \underline{n}_i .

$$\underline{N}_i = \underline{n}_i \otimes \underline{n}_i \quad [1]$$

où \otimes est le produit dyadique classique. Ces tenseurs sont définis de manière à assurer que : $\sum_i \rho_i \underline{N}_i \propto \rho_0 \underline{1}$ pour un état d'endommagement isotrope, où $\underline{1}$ est le tenseur identité.

Ces tenseurs, au nombre de 9 en 3D et 4 en 2D, s'expriment dans le repère local de la fissure $(\underline{n}, \underline{t}, \underline{s})$ comme :

$$\begin{aligned} \underline{N}_1 &= \underline{n} \otimes \underline{n} & \underline{N}_2 &= \underline{t} \otimes \underline{t} & \underline{N}_3 &= \underline{s} \otimes \underline{s} \\ \underline{N}_4 &= \frac{1}{2}(\underline{n} + \underline{t}) \otimes (\underline{n} + \underline{t}) & \underline{N}_5 &= \frac{1}{2}(\underline{n} + \underline{s}) \otimes (\underline{n} + \underline{s}) & \underline{N}_6 &= \frac{1}{2}(\underline{t} + \underline{s}) \otimes (\underline{t} + \underline{s}) \\ \underline{N}_7 &= \frac{1}{2}(\underline{n} - \underline{t}) \otimes (\underline{n} - \underline{t}) & \underline{N}_8 &= \frac{1}{2}(\underline{n} - \underline{s}) \otimes (\underline{n} - \underline{s}) & \underline{N}_9 &= \frac{1}{2}(\underline{t} - \underline{s}) \otimes (\underline{t} - \underline{s}) \end{aligned}$$

2.2. Potentiel d'état

Ce modèle est formulé dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles. Le potentiel d'état est construit sur la base de cinq hypothèses : (i) le matériau non endommagé est considéré isotrope, (ii) l'effet unilatéral est partiel, (iii) le frottement entre les lèvres de fissures est négligé, (iv) les familles de fissures n'interagissent pas entre-elles, (v) les paramètres matériaux liés aux densités de fissures sont identiques. Ce potentiel est construit sur la base de la théorie de représentation des formes tensorielles et est exprimé par l'équation [2].

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \underline{N}, \underline{\epsilon}, z) &= \psi_0 + \sum_{i=1}^9 \rho_i [\alpha \text{tr}(\underline{\epsilon} \cdot \underline{\epsilon}) - \frac{1}{2} \text{tr}^2(\underline{\epsilon}) + \text{tr}(\underline{\epsilon}) \text{tr}(\underline{\epsilon} \cdot \underline{N}_i)] + 2\beta \text{tr}(\underline{\epsilon} \cdot \underline{\epsilon} \cdot \underline{N}_i) \\ &- \left(\frac{3}{2} \alpha + 2\beta \right) \text{tr}^2(\underline{\epsilon} \cdot \underline{N}_i) H(-\text{tr}(\underline{\epsilon} \cdot \underline{N}_i)) + \sum_{i=1}^9 H_i(z_i) \end{aligned} \quad [2]$$

où ψ_0 est l'énergie libre élastique associé au matériau non endommagé, $\underline{\underline{\epsilon}}$ est le tenseur des déformations, α, β sont des paramètres matériaux ($\alpha, \beta < 0$), $H(\cdot)$ la fonction Heaviside et $\bar{H}_i(z_i)$ est la fonction de consolidation associé à la famille i dépendant de la variable d'érouissage z_i . Les lois d'état sont obtenues par dérivation du potentiel d'état. Les lois d'évolution des densités de fissuration, obtenues en fonction des surfaces de charge et les conditions de consistance, complètent le modèle [Bargellini, 2006].

3. Modèle d'endommagement anisotrope enrichi

Le modèle continu décrit dans la section précédente est enrichi par l'approche des discontinuités fortes. Premièrement, la cinématique enrichie considérée est décrite. Une régularisation de la distribution de Dirac est effectuée d'après le travail de [Oliver, 1996]. Ensuite, le passage du modèle continu au modèle enrichi, appelé modèle discret, est traité.

3.1. Cinématique enrichie et régularisation

Considérons un domaine Ω traversé par une discontinuité Γ_S qui divise le domaine en deux parties Ω^- et Ω^+ (voir figure 1).

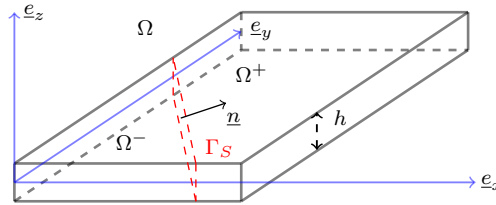


Figure 2: Surface de discontinuité Γ_S dans le domaine Ω

Soit \underline{n} la normale sortante de la discontinuité dirigée vers Ω^+ . Le champ de déplacements $\underline{u}(\underline{x}, t)$, dans un point \underline{x} du domaine à un temps t , est enrichi avec une discontinuité $[[\underline{u}]](\underline{x}, t)$ selon l'équation [3].

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \bar{\underline{u}}(\underline{x}, t) + H_{\Gamma_S}(\underline{x})[[\underline{u}]](\underline{x}, t) \quad [3]$$

où $\bar{\underline{u}}(\underline{x}, t)$ est la partie continue du champ de déplacements et $H_{\Gamma_S}(\underline{x})$ est la fonction Heaviside tel que $H_{\Gamma_S}(\underline{x}) = 1$ si $\underline{x} \in \Gamma_S$ et 0 sinon. Le champ de déformations est obtenu en prenant le gradient symétrique du champ de déplacements :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underbrace{\nabla^s \bar{\underline{u}} + H_{\Gamma_S}(\underline{x}) \nabla^s [[\underline{u}]]}_{\text{continu borné}} + \underbrace{\delta_{\Gamma_S} ([[\underline{u}]]) \otimes \underline{n}}_{\text{discontinu non borné}} = \bar{\underline{\underline{\epsilon}}} + \delta_{\Gamma_S} ([[\underline{u}]]) \otimes \underline{n} \quad [4]$$

où $(\cdot)^s$ est la partie symétrique de (\cdot) , δ_{Γ_S} est la distribution de Dirac sur Γ_S et ∇^s est le gradient symétrique. Ainsi, le champ de déformations est composé d'une partie continue et bornée et d'une partie singulière. Cette singularité est traitée suivant la proposition de [Oliver, 1996]. La fonction Dirac est approximée comme suit :

$$\delta_{\Gamma_S}^k(\underline{x}) = \frac{1}{k} \mu_{\Gamma_S^k}(\underline{x}) \quad [5]$$

avec $\mu_{\Gamma_S^k}(\underline{x}) = 1$ si $\underline{x} \in \Gamma_S^k$ et 0 sinon, où Γ_S^k est une bande de localisation de mesure k la plus petite possible tel que, $\lim_{k \rightarrow 0} \delta_{\Gamma_S^k}(\underline{x}) = \delta_{\Gamma_S}(\underline{x})$. Cette approximation consiste à considérer un solide avec une bande de localisation de taille non nulle qui tend vers une discontinuité forte lorsque la taille de cette bande tend vers zéro.

3.2. Construction du modèle enrichi

Dans le régime de discontinuité forte sur Γ_S , le champ de déformations peut être exprimé par l'équation [6].

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\bar{\epsilon}}} + \delta_{\Gamma_S}(\llbracket \underline{u} \rrbracket \otimes \underline{n})^s \approx \underline{\underline{\bar{\epsilon}}} + \frac{1}{k}(\llbracket \underline{u} \rrbracket \otimes \underline{n})^s \quad [6]$$

L'équation [6] est introduite dans les équations du modèle continu. Une analyse du champ de déformations singulier souligne les conditions nécessaires à la construction du modèle discret. En effet, même si le champ de déformations est singulier sur l'interface Γ_S , les conditions de continuité des contraintes doivent être vérifiées. Ces conditions sont exprimées en contrainte et vitesse de contrainte selon l'équation [7] [Kishta et al., 2015].

$$\underline{\underline{t}}_{\Gamma_S} = \underline{\underline{\sigma}}_{\Omega \setminus \Gamma_S} \cdot \underline{n} = \underline{\underline{\sigma}}_{\Gamma_S} \cdot \underline{n} \quad \underline{\underline{\dot{t}}}_{\Gamma_S} = \underline{\underline{\dot{\sigma}}}_{\Omega \setminus \Gamma_S} \cdot \underline{n} = \underline{\underline{\dot{\sigma}}}_{\Gamma_S} \cdot \underline{n} \quad [7]$$

Étant donné les conditions de continuité, les contraintes et vitesses des contraintes ont des valeurs bornées sur l'interface Γ_S alors que le champ de déformations est singulier. La définition de variables dites discrètes comme les densités de fissuration et le module d'écrouissage, bornées sur la discontinuité Γ_S , permettent de construire le modèle discret qui découle directement du modèle continu. Ce modèle discret est entièrement fonction de la quantité d'intérêt qu'est l'ouverture de fissure. Á titre d'illustration, l'énergie libre discrète est donnée par l'équation [8].

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{\Gamma_S} = & \sum_{i=1}^9 \bar{\rho}_i [\alpha \text{tr}((\llbracket \underline{u} \rrbracket \otimes \underline{n})^s \cdot (\llbracket \underline{u} \rrbracket \otimes \underline{n})^s) - \frac{1}{2} \text{tr}^2((\llbracket \underline{u} \rrbracket \otimes \underline{n})^s) + \text{tr}((\llbracket \underline{u} \rrbracket \otimes \underline{n})^s) \text{tr}((\llbracket \underline{u} \rrbracket \otimes \underline{n})^s \cdot \underline{\underline{N}}_i)] \\ & + 2\beta \text{tr}((\llbracket \underline{u} \rrbracket \otimes \underline{n})^s \cdot (\llbracket \underline{u} \rrbracket \otimes \underline{n})^s \cdot \underline{\underline{N}}_i) - \left(\frac{3}{2}\alpha + 2\beta\right) \text{tr}^2((\llbracket \underline{u} \rrbracket \otimes \underline{n})^s \cdot \underline{\underline{N}}_i) H(-\text{tr}((\llbracket \underline{u} \rrbracket \otimes \underline{n})^s \cdot \underline{\underline{N}}_i)) \\ & + \sum_{i=9}^9 \mathbf{H}_i(\bar{z}_i) \quad \forall \llbracket \underline{u} \rrbracket > \underline{0}, \text{ avec } \bar{\psi}_{\Gamma_S} \in [\psi_u, \infty[\end{aligned} \quad [8]$$

Á l'instant de la localisation, les contraintes dans le matériau ont atteint la limite élastique. Ainsi, l'énergie libre élastique de l'équation [2] est égale à une constante ψ_u qui dépend de la limite élastique. Une correspondance terme à terme est retrouvée en comparant l'énergie libre continue et celle discrète. Le modèle discret construit présente l'avantage de dépendre de l'ouverture de fissure pouvant donc l'obtenir explicitement. Les performances de ce modèle seront exposées par la suite.

4. Étude numérique

Le modèle anisotrope discret a été implanté dans le logiciel Cast3M [Cast3M, 2014]. La procédure d'intégration numérique, présentée dans [Kishta et al., 2015] ne sera pas traitée ici. Les premiers résultats obtenus sont présentés. Premièrement, des résultats au niveau du point de Gauss sont exposés. Ensuite, deux exemples à l'échelle de la

structure sont présentés. Les résultats numériques sont comparés à ceux expérimentaux non seulement en matière de réponse globale force-déplacement mais aussi d'ouverture de fissure.

4.1. Cas tests locaux

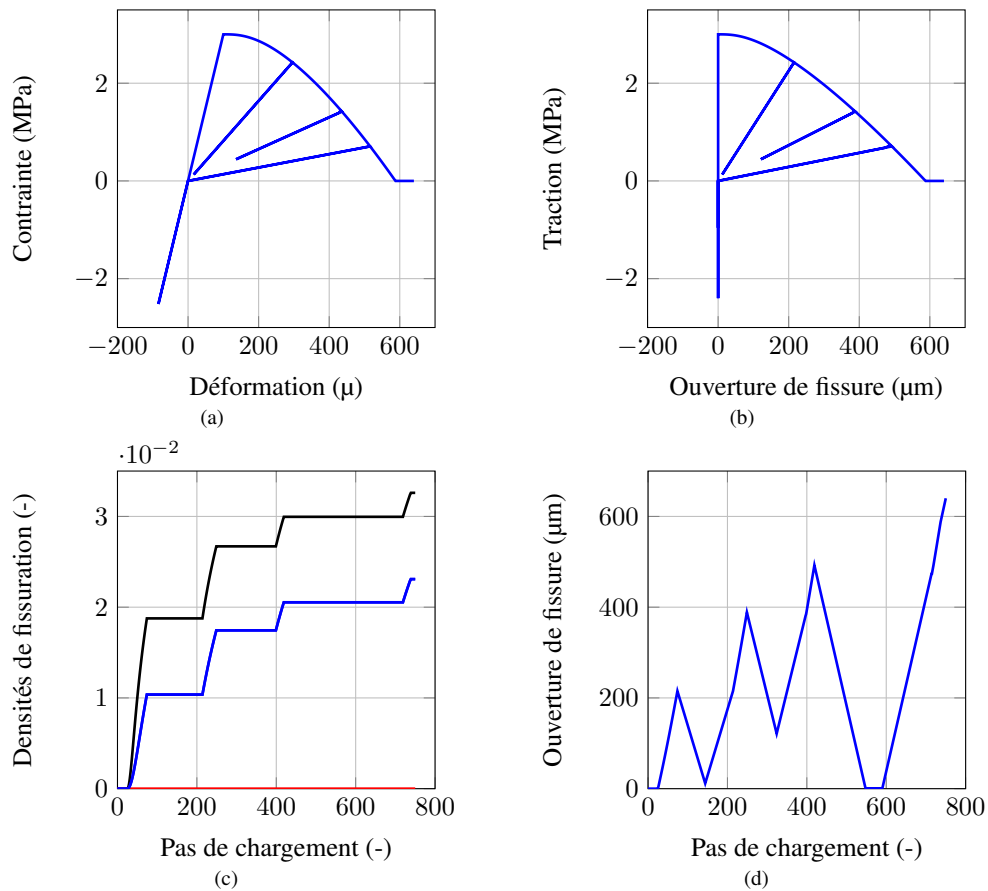


Figure 3: *Modèle continu 3(a), évolution de la loi traction-ouverture de fissure 3(b), évolution des densités de fissuration ($\rho_1, \rho_{4,7}, \rho_2$) 3(c), évolution de l'ouverture de fissure ($\llbracket u_n \rrbracket$) 3(d)*

Les tests au niveau du point de Gauss ont été réalisés en 2D en contraintes planes. Un essai de traction avec des phases de décharge est présenté sur la figure 3. Dans ce cas, la compression est linéaire. Des modifications ont été apportées au modèle afin de prendre en compte une unilatéralité complète. Le comportement adoucissant du béton est bien reproduit. La correspondance entre la réponse continue contrainte-déformation et discrète traction-ouverture de fissure est mise en évidence. Pour un essai de traction dans la direction 1, deux groupes de familles de fissures sont activés : fissures normales à la direction du chargement ρ_1 et autres familles $\rho_{4,7}$ qui évoluent plus lentement. L'évolution de l'ouverture de fissure est bien celle attendue. Quand le matériau est complètement ruiné, cette ouverture est égale au déplacement imposé. Les propriétés élastiques sont totalement reprises en compression, un effet unilatéral total est bien reproduit.

4.2. Cas tests structuraux

4.2.1. Flexion trois points sur poutre entaillée

Une campagne expérimentale de flexion trois points, effectuée au LMT Cachan, est utilisée [Oliver-Leblond et al., 2013]. Des spécimens de section carrée de dimension $D = 70$ cm et de longueur $4D$ ont été testés (figure 4). Une entaille de 3 mm et de profondeur $D/2$ a été réalisée avant le test.

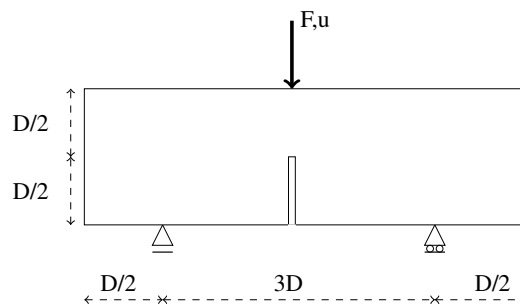


Figure 4: Géométrie et conditions aux limites de l'essai de flexion trois points

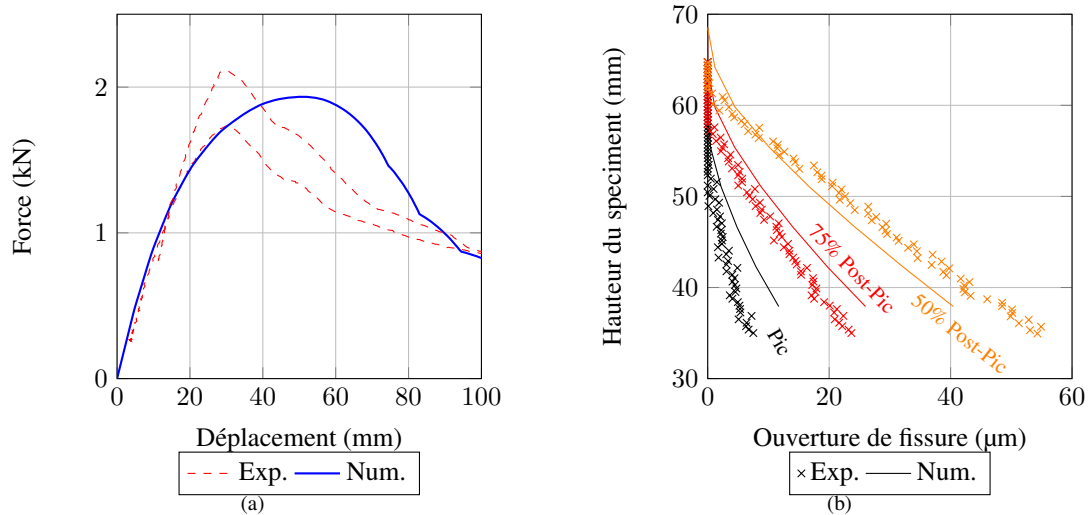


Figure 5: Comparaison du modèle numérique à l'expérimental: réponse force-déplacement 5(a), hauteur du spécimen-ouverture de fissure 5(b)

Les résultats globaux force-déplacement obtenus par le modèle sont comparés à ceux expérimentaux et sont donnés sur la figure 5(a). Nous pouvons observer une différence au pic et un peu après le pic car notre modèle concentre la fissuration diffuse en une macro-fissure. Ensuite, lorsque la fissure est bien enclenchée, l'estimation de l'ouverture de fissure tend à être de plus en plus proche de la valeur expérimentale. Afin de montrer les performances du modèle à décrire les informations fines comme l'ouverture de fissure, l'évolution de la hauteur

du spécimen en fonction de l'ouverture de fissure est présentée sur la figure 5(b). Les résultats sont donnés pour différents pas de chargement - au pic de l'effort, à 75% post-pic et 50% post-pic. Le modèle est capable de reproduire correctement le comportement global et local.

4.2.2. Tirant en béton armé

Un des tests de la campagne expérimentale des tirants en béton armé est étudié [Mivelaz, 1996]. Le but de cette campagne était la détermination du débit d'air à travers les fissures engendrées par les sollicitations mécaniques sur différents tirants en béton armé. La section et la répartition des armatures du tirant utilisé ici sont données sur la figure 6. Le tirant est soumis à un déplacement imposé en trois étapes : la première étape consiste en une traction jusqu'à 0,3‰ qui correspond au développement des premières fissures; la seconde est une phase relaxation à 0,3‰ pendant 3 semaines et enfin une traction jusqu'à 1,5‰. Cette étude est limitée à la première phase de traction. Les calculs ont été menés en 2D (contraintes planes). Une adhérence parfaite entre le béton et l'acier a été considérée.

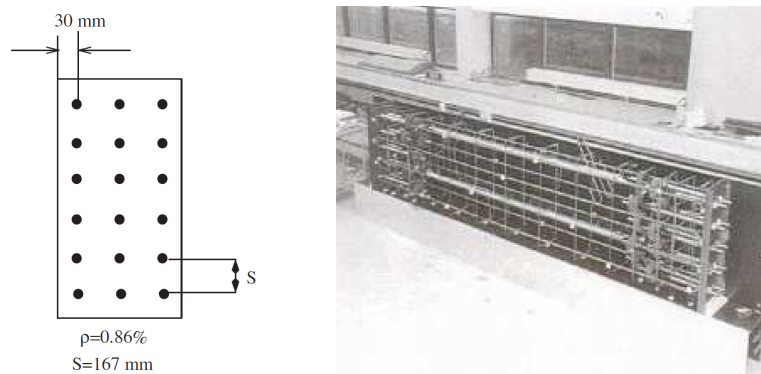


Figure 6: Répartition des armatures dans le tirant

Le champ de fissuration, donné explicitement par le modèle, est présenté sur la figure 7. Sur la même figure est présentée aussi l'évolution de l'effort dans deux barres d'acier. Les pics de cette évolution correspondent aux fissures dans le tirant. Ces résultats montrent que le modèle est capable de reproduire la multi-fissuration. Cependant, nous pouvons observer une certaine diffusion dans les bandes de fissures.

La courbe force-déformations est présentée sur la figure 8(a). La force de première fissuration est bien reproduite par le modèle. L'allure globale de la courbe est satisfaisante. La modélisation 2D de l'étude et la prise en compte d'une interface parfaite acier-béton expliquent les écarts entre les courbes. Localement, le modèle est capable de décrire la fissuration. L'évolution de la somme des ouvertures de fissure en fonction des déformations (figure 8(b)) montre une bonne concordance entre le modèle et le résultat expérimental.

5. Conclusions

Dans cet article, un modèle numérique représentant de manière explicite la fissuration a été exposé. Le modèle d'endommagement anisotrope utilisé, décrit l'état d'endommagement comme la contribution de familles de fissures de normale \underline{n}_i et densité de micro-fissuration ρ_i . Ce modèle est fondé sur des micro-fissures orientées pouvant représenter les mécanismes de rupture en mode-I, mode-II et mode-I/II. L'approche des discontinuités fortes a été utilisée pour décrire la fissuration de manière naturelle. La méthode E-FEM a l'avantage d'être peu

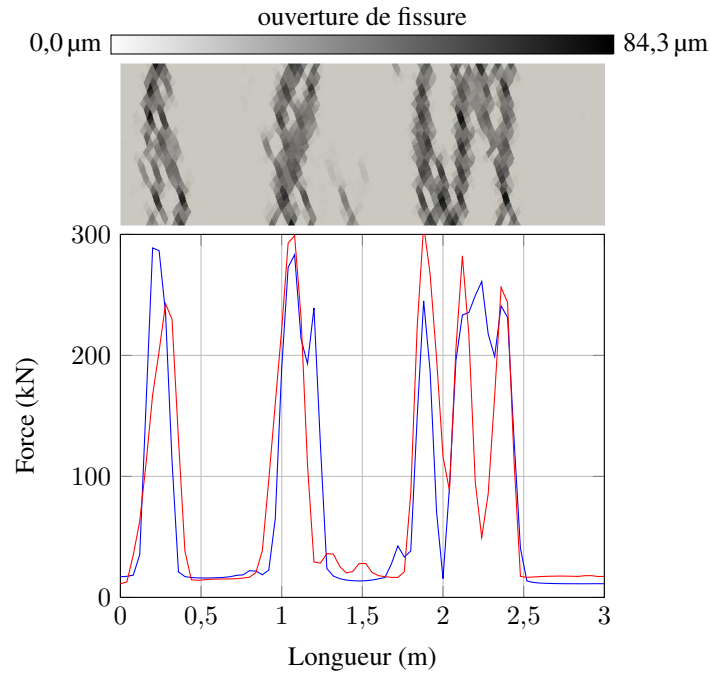


Figure 7: Champ d'ouverture de fissure et évolution de l'effort de traction dans deux barres d'acier

intrusive dans un code de calcul et son caractère local réduit les coûts de calculs par rapport à d'autres méthodes. Les simulations numériques au niveau du point d'intégration et sur structures en béton et béton armé ont montré les performances du modèle. Le comportement global et aussi les informations locales sont bien décrits. Ainsi, pour les deux cas test structuraux, l'ouverture de fissure est obtenue explicitement. Aucune méthode de post-traitement est nécessaire. De plus, l'essai de traction sur le tirant en béton armé montre que le modèle est capable de reproduire la multi-fissuration. Pour faciliter l'utilisation de ce modèle dont le nombre de paramètres reste restreint, une procédure d'identification est actuellement développée. En perspective à ces travaux, la prise en compte d'une ouverture en mode II est envisagée. Dans le cas du test de traction sur le tirant, ces développements permettrait de s'affranchir du problème d'interface acier-béton. De plus, la formulation du modèle dans le cadre d'une cinématique plaque permettrait de traiter d'autres cas complexes de structures en béton armé comme les voiles en cisaillement.

References

- [Bargellini, 2006] Bargellini, R. (2006). *Contribution d'une approche discrète à la modélisation de l'endommagement de matériaux microfissurés*. PhD thesis, Poitiers.
- [Cast3M, 2014] Cast3M (2014). Site internet Cast3M. <http://www-cast3m.cea.fr/>.
- [Dolbow and Belytschko, 1999] Dolbow, J. and Belytschko, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 46(1):131–150.

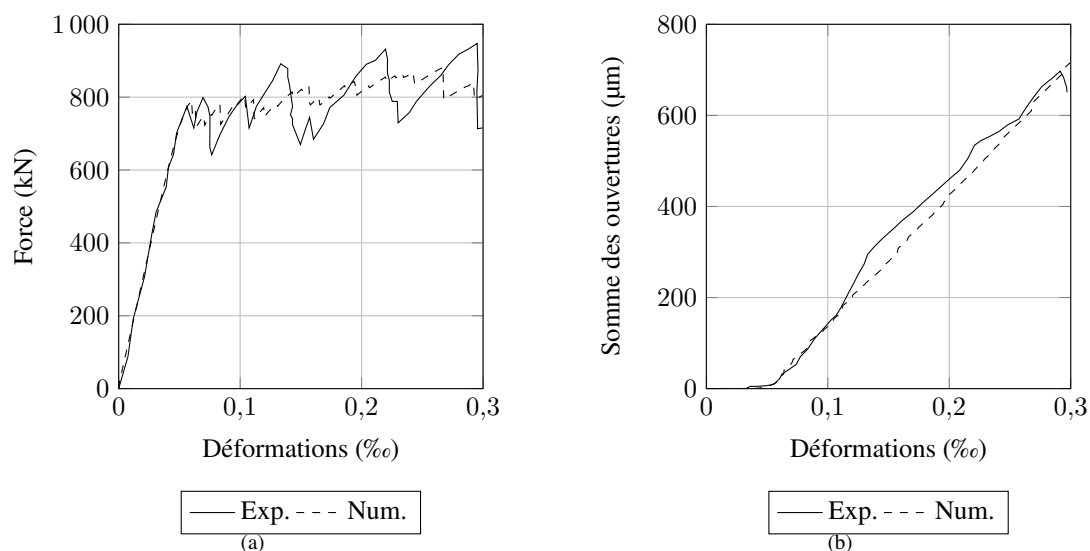


Figure 8: Comparaison du modèle numérique à l'expérimental: réponse force-déformations 8(a), somme des ouvertures de fissure-déformations 8(b)

[Giry et al., 2011] Giry, C., Dufour, F., and Mazars, J. (2011). Stress-based nonlocal damage model. *International Journal of Solids and Structures*, 48(25):3431–3443.

[Jirásek and Zimmermann, 1998] Jirásek, M. and Zimmermann, T. (1998). Analysis of rotating crack model. *Journal of engineering mechanics*, 124(8):842–851.

[Kishta et al., 2015] Kishta, E., Richard, B., Giry, C., and Ragueneau, F. (2015). Reduced kinematic formulation based on the strong discontinuity method for reinforced concrete components. In *Thirteenth International Conference on Computational Plasticity*.

[Mivelaz, 1996] Mivelaz, P. (1996). Étanchéité des structures en béton armé. Fuites au travers d'un élément fissuré. *École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne*.

[Oliver, 1996] Oliver, J. (1996). Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. *International journal for numerical methods in engineering*, 39(21):3601–3623.

[Oliver-Leblond et al., 2013] Oliver-Leblond, C., Delaplace, A., Ragueneau, F., and Richard, B. (2013). Non-intrusive global/local analysis for the study of fine cracking. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 37(8):973–992.

[Richard and Ragueneau, 2013] Richard, B. and Ragueneau, F. (2013). Continuum damage mechanics based model for quasi brittle materials subjected to cyclic loadings: Formulation, numerical implementation and applications. *Engineering Fracture Mechanics*, 98:383–406.