



**HAL**  
open science

## Méthodes d'éléments finis de Trio\_U stabilité et expériences numériques

S. Gounand

► **To cite this version:**

S. Gounand. Méthodes d'éléments finis de Trio\_U stabilité et expériences numériques. Séminaire Trio\_U 2015, Jan 2015, saclay, France. cea-02489502

**HAL Id: cea-02489502**

**<https://hal-cea.archives-ouvertes.fr/cea-02489502>**

Submitted on 24 Feb 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Méthodes d'éléments finis de Trio\_U : stabilité et expériences numériques

Stéphane Gounand<sup>1</sup>

<sup>1</sup>CEA-Saclay, DEN/DANS/DM2S/STMF/LMSF (stephane.gounand@cea.fr)

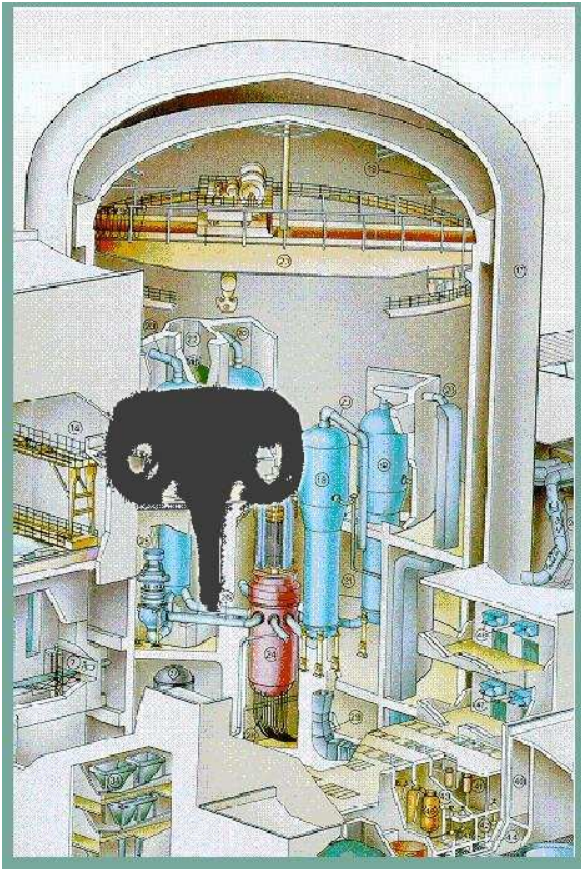
29 janvier 2015



# Plan

1. Problématique des vitesses parasites ;
2. Éléments finis de Trio\_U 2D et 3D ;
3. Extension 1 : décomposition de Helmholtz-Hodge ;
4. Extension 2 : éléments quadrangulaires.

## *Problématique des vitesses parasites : situation physique*

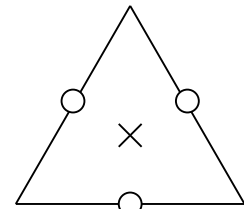
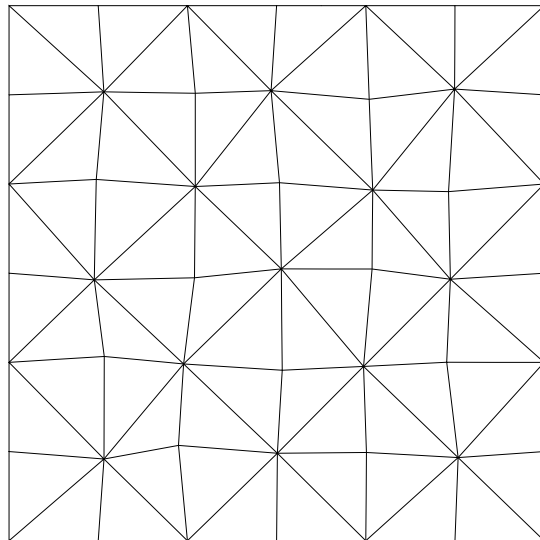


- zones en écoulement fort :  $u \gg 1$  ;
- zones stratifiées :
  - $u \approx 0$  ;
  - $f = \begin{pmatrix} 0 \\ f_z(z) \end{pmatrix} = \nabla F(z)$

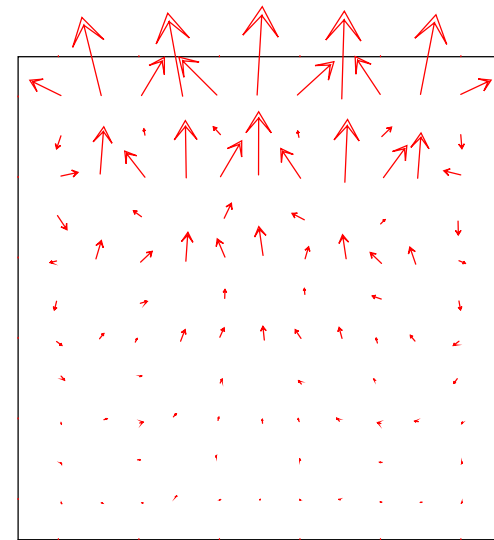
Accident grave dans les centrales  
nucléaires

# Problématique des vitesses parasites : modèle numérique

$$\textcircled{1} \begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad \text{avec } \mathbf{f} = \nabla F(y) = \nabla \{y^4\}$$



$$\begin{array}{ll} \circ & \mathbf{u} \quad \mathbb{P}_1^{nc} \\ \times & p \quad \mathbb{P}_0 \end{array}$$



Maillage  $\Omega = [0, 1]^2$

$$\|\mathbf{u}\|_{\infty} = 1.2 \times 10^{-2}$$

## *Problématique des vitesses parasites : modèle numérique*

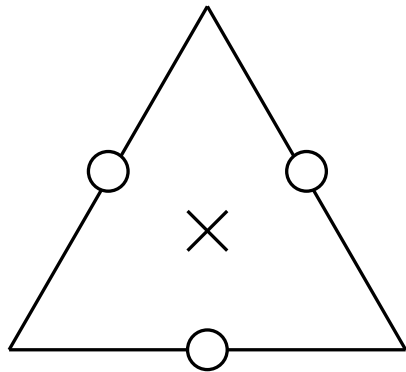
### **Vitesses parasites :**

- absentes en maillage structuré aligné sur les horizontales ;
- gênantes ? Pas toujours en tant que telles mais modèle de turbulence :  $\nu_{\text{turb}} \propto \|\nabla u + \nabla^t u\|_2$ .

### **Solutions envisagées :**

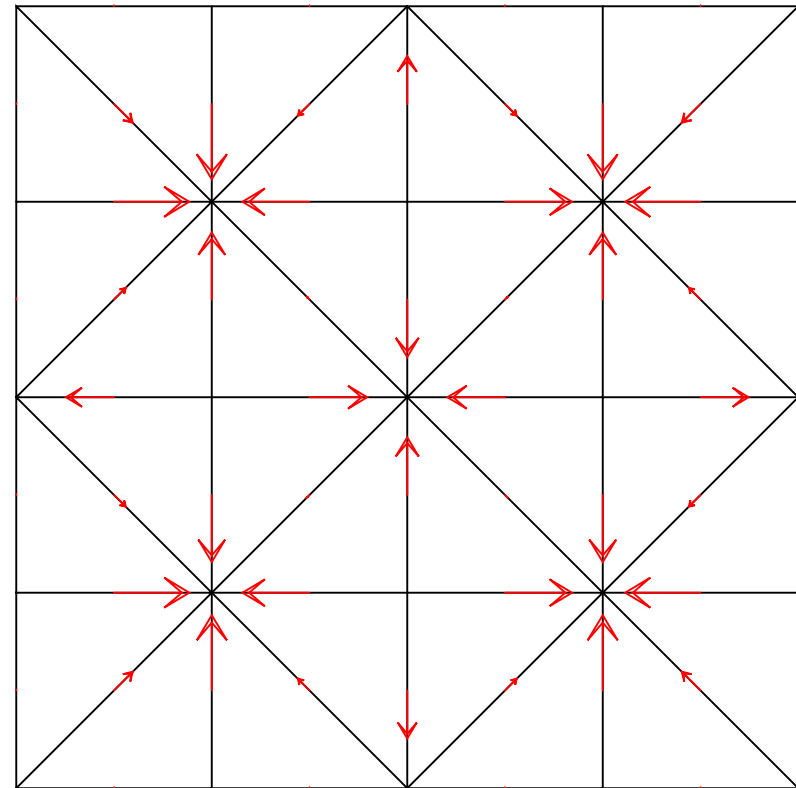
- raffiner ;
- éléments finis plus riches en pression (Trio\_U) ;
- décomposition de Helmholtz explicite du terme source :  $f = \nabla\phi + \text{rot}\psi$

# Éléments finis Trio\_U 2D



$$\begin{array}{l} \circ \quad \mathbf{u} \quad \mathbb{P}_1^{\text{nc}} \\ \times \quad p \quad \mathbb{P}_0 \end{array}$$

- Stable pour Stokes ;
- Ordre 2 en  $\mathbf{u}$ , 1 en  $p$  ;
- $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  en presque tout point et globalement.



Mode "parasite"

## Éléments finis Trio\_U : historique

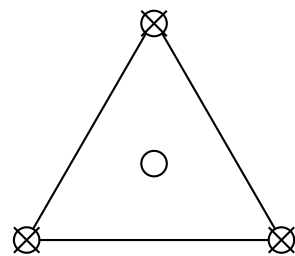
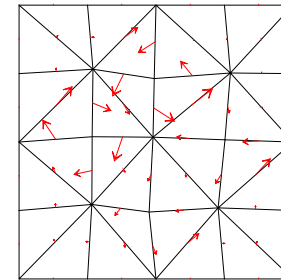
- [Émonot, 1992]** : méthodologie Volumes Éléments Finis (VEF) basé sur l'élément de Crouzeix-Raviart  $\mathbb{P}_1^{\text{nc}}/\mathbb{P}_0$  ;
- [Clément, 1996]** : écoulements océaniques, éléments  $\mathbb{P}_1^{\text{nc}}/\mathbb{P}_1^+$  et  $\mathbb{P}_1^{\text{nc}}/\mathbb{P}_1$  (2D) ;
- [Bernardi and Hecht, 2000]** : analyse numérique du  $\mathbb{P}_1^{\text{nc}}/\mathbb{P}_1^+$  (2D, 3D) ;
- [Benhamadouche and Laurence, 2002]** : conservation de l'énergie cinétique, utilisation du  $\mathbb{P}_1^{\text{nc}}/\mathbb{P}_1^+$  (2D, 3D) ;
- [Heib, 2003]** : analyse numérique du  $\mathbb{P}_1^{\text{nc}}/\mathbb{P}_0 + \mathbb{P}_1$  (2D, 3D), superconvergence en 2D ;
- [Fortin, 2006]** : analyse numérique du  $\mathbb{P}_1^{\text{nc}}/\mathbb{P}_0 + \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_A$  (3D), superconvergence en 3D.



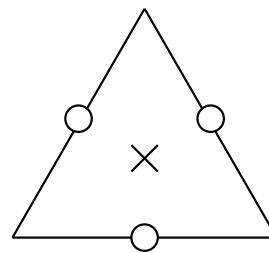
# Éléments finis Trio\_U 2D : convergence

$$\begin{cases} -\nu \Delta u = -\nabla p + f \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases}$$

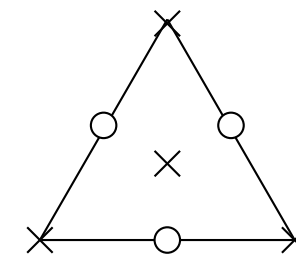
avec  $f = \nabla F(x, y) = \nabla \left\{ (x + 1.23y)^4 \right\}$



$P_1^+ / P_1$



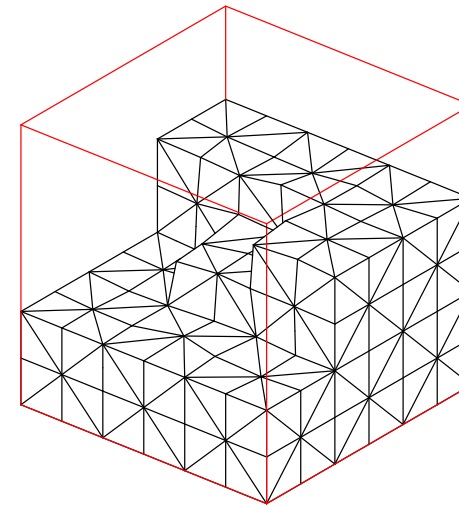
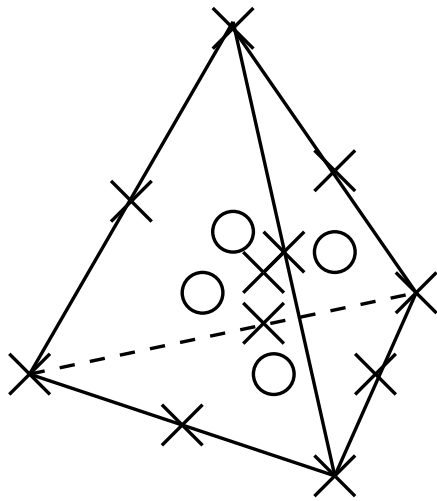
$P_1^{nc} / P_0$



$P_1^{nc} / P_0 + P_1$

	$n$	$\ u_h\ $	$\ p_h - p\ $	$n$	$\ u_h\ $	$\ p_h - p\ $	$n$	$\ u_h\ $	$\ p_h - p\ $
	8	$4.0 \times 10^{-4}$	$4.8 \times 10^{-2}$		$2.7 \times 10^{-2}$	$6.5 \times 10^{-1}$		$1.3 \times 10^{-5}$	$3.6 \times 10^{-2}$
	16	$4.9 \times 10^{-5}$	$1.2 \times 10^{-2}$		$7.4 \times 10^{-3}$	$3.1 \times 10^{-1}$		$7.7 \times 10^{-7}$	$8.8 \times 10^{-3}$
	32	$6.8 \times 10^{-6}$	$3.1 \times 10^{-3}$		$2.0 \times 10^{-3}$	$1.5 \times 10^{-1}$		$5.9 \times 10^{-8}$	$2.2 \times 10^{-3}$
ordre		3	2		2	1		4	2

## Éléments finis Trio\_U 3D

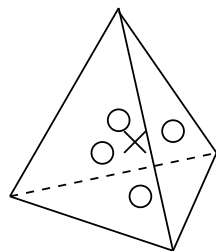
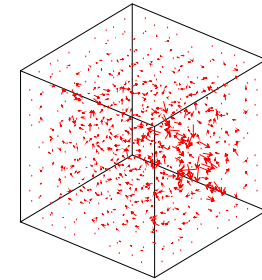


- $\mathbb{P}_1^{nc}/\mathbb{P}_0 + \mathbb{P}_1$  non super-convergent en 3D ;
- ajout de la pression aux arêtes  $\mathbb{P}_1^{nc}/\mathbb{P}_0 + \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_A \approx \mathbb{P}_1^{nc}/\mathbb{P}_0 + \mathbb{P}_2$  ;
- $\mathbb{P}_1^{nc}/\mathbb{P}_0 + \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_A$  a  $n_{\text{sommets}}$  pressions en trop  $\Rightarrow$  élimination de  $n_{\text{sommets}}$  arêtes ;
- $\mathbb{P}_1^{nc}/\mathbb{P}_0 + \mathbb{P}_A$  ok en vitesse, pas de convergence en pression ;
- stabilité (conditionnelle) montrée dans [Fortin, 2006].

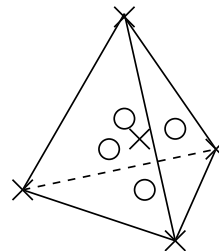
# Éléments finis Trio\_U 3D : convergence

$$\begin{cases} -\nu \Delta u = -\nabla p + f \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases}$$

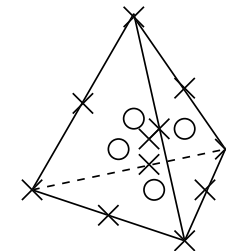
avec  $f = \nabla F(x, y, z) = \nabla \left\{ (x + 1.23y - 0.89z)^4 \right\}$



$\mathbb{P}_1^{nc}/\mathbb{P}_0$



$\mathbb{P}_1^{nc}/\mathbb{P}_0 + \mathbb{P}_1$



$\mathbb{P}_1^{nc}/\mathbb{P}_0 + \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_A$

	$\mathbb{P}_1^{nc}/\mathbb{P}_0$			$\mathbb{P}_1^{nc}/\mathbb{P}_0 + \mathbb{P}_1$			$\mathbb{P}_1^{nc}/\mathbb{P}_0 + \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_A$		
$n$	$\ u_h\ $	$\ p_h - p\ $	$t$	$\ u_h\ $	$\ p_h - p\ $	$t$	$\ u_h\ $	$\ p_h - p\ $	$t$
8	$4.1 \times 10^{-3}$	$1.4 \times 10^{-1}$	1	$2.8 \times 10^{-4}$	$1.3 \times 10^{-2}$	2	$3.1 \times 10^{-6}$	$1.7 \times 10^{-2}$	30
12	$2.0 \times 10^{-3}$	$9.1 \times 10^{-2}$	5	$9.1 \times 10^{-5}$	$5.9 \times 10^{-3}$	14	$6.8 \times 10^{-7}$	$8.5 \times 10^{-3}$	500
16	$1.2 \times 10^{-3}$	$6.6 \times 10^{-2}$	20	$4.0 \times 10^{-5}$	$3.3 \times 10^{-3}$	60	$2.3 \times 10^{-7}$	$5.7 \times 10^{-3}$	4000
ordre	2	1		3	2		4	2	

## Éléments finis Trio\_U : bilan

### Avantages

- $\mathbb{P}_1^{\text{nc}}/\mathbb{P}_0 + \mathbb{P}_1 (+\mathbb{P}_A)$  : précision, super-convergence ;
- $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  en presque tout point et globalement ;
- stable pour Stokes et Darcy (2D, 3D ?) ;
- $\mathbb{P}_1^{\text{nc}}$  Matrice masse diagonale (2D sauf axi-symétrique) ;

### Inconvénients

- $\mathbb{P}_1^{\text{nc}}$  : maillage pas trop déformé ;
- $\mathbb{P}_1^{\text{nc}}$  : pas stable pour Stokes en formulation tenseur des contraintes :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) = -\nabla p + \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

- coût (surtout  $\mathbb{P}_A$ ) ;
- gestion des coins.

## Décomposition de Helmholtz : méthode



Équivalence continue :

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \textcircled{1} \quad \mathbf{f} = \nabla \phi + \text{rot } \psi \\ \textcircled{2} \quad \begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{v} = -\nabla p_2 + (\mathbf{f} - \nabla \phi) \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$(\mathbf{u}, p) = (\mathbf{v}, p_2 + \phi)$$

Calcul de  $\phi$  :

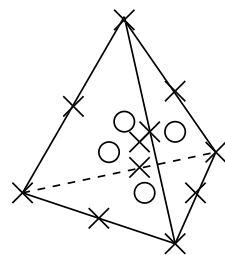
$$\Delta \phi = \text{div } \mathbf{f} \quad (\text{approche moindres carrés})$$

**Remarque** : le choix de l'espace pour  $\phi$  n'est pas contraint par la condition inf-sup de  $\textcircled{2}$ .

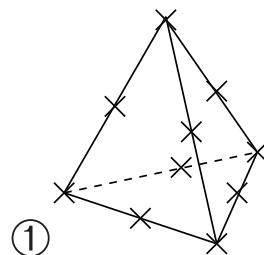
# Décomposition de Helmholtz : convergence 3D

①  $\Delta\phi = \text{div } f$  avec  $f = \nabla F(x, y, z) = \nabla \left\{ (x + 1.23y - 0.89z)^4 \right\}$

② 
$$\begin{cases} -\nu\Delta v = -\nabla p_2 + (f - \nabla\phi) \\ \nabla \cdot v = 0 \end{cases}$$

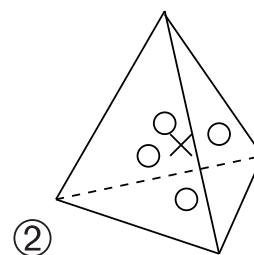


$\mathbb{P}_1^{nc}/\mathbb{P}_0 + \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_A$



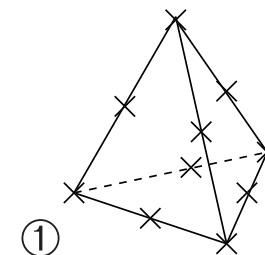
①

$\mathbb{P}_2$



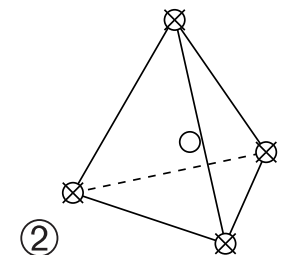
②

$\mathbb{P}_1^{nc}/\mathbb{P}_0$



①

$\mathbb{P}_2$



②

$\mathbb{P}_1^+ / \mathbb{P}_1$

$n$	$\mathbb{P}_1^{nc}/\mathbb{P}_0 + \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_A$			$\mathbb{P}_2$			$\mathbb{P}_1^{nc}/\mathbb{P}_0$			$\mathbb{P}_2$			$\mathbb{P}_1^+ / \mathbb{P}_1$		
	$\ u_h\ $	$\ p_h - p\ $	$t$	$\ u_h\ $	$\ p_h - p\ $	$t$	$\ u_h\ $	$\ p_h - p\ $	$t$	$\ u_h\ $	$\ p_h - p\ $	$t$	$\ u_h\ $	$\ p_h - p\ $	$t$
8	$3.1 \times 10^{-6}$	$1.7 \times 10^{-2}$	30	$2.6 \times 10^{-5}$	$9.0 \times 10^{-4}$	1	$3.3 \times 10^{-6}$	$1.0 \times 10^{-3}$	1	$3.3 \times 10^{-6}$	$1.0 \times 10^{-3}$	1	$2.5 \times 10^{-7}$	$1.3 \times 10^{-4}$	25
12	$6.8 \times 10^{-7}$	$8.5 \times 10^{-3}$	500	$5.7 \times 10^{-6}$	$2.7 \times 10^{-4}$	6	$7.3 \times 10^{-7}$	$3.1 \times 10^{-4}$	7	$7.3 \times 10^{-7}$	$3.1 \times 10^{-4}$	7	$2.5 \times 10^{-7}$	$1.3 \times 10^{-4}$	25
16	$2.3 \times 10^{-7}$	$5.7 \times 10^{-3}$	4000	$1.9 \times 10^{-6}$	$1.1 \times 10^{-4}$	24	$2.5 \times 10^{-7}$	$1.3 \times 10^{-4}$	25	$2.5 \times 10^{-7}$	$1.3 \times 10^{-4}$	25	$2.5 \times 10^{-7}$	$1.3 \times 10^{-4}$	25
ordre	4	2		4	3		4	3		4	3		4	3	

## Décomposition de Helmholtz : bilan

### Avantages

- précision en pression (ordre 3 avec  $\mathbb{P}_2$  pour  $\phi$ );
- découplage : liberté de choix sur les éléments finis pour  $\phi$  et  $(\mathbf{u}, p)$ ;
- gain en temps calcul;
- gestion des coins.

### Inconvénients

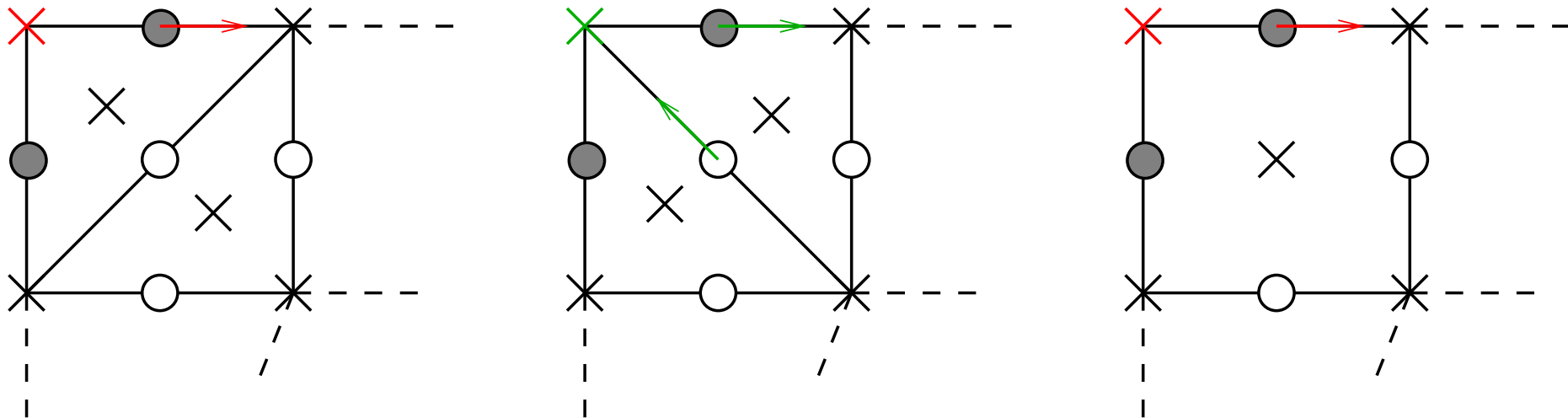
- résolution d'un Laplacien en plus;
- post-traitement de la pression;
- découplage  $\Rightarrow$  pas de prise en compte équilibre terme implicite–pression :

$$\begin{cases} (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} = -\nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

# Éléments quadrangulaires 2D

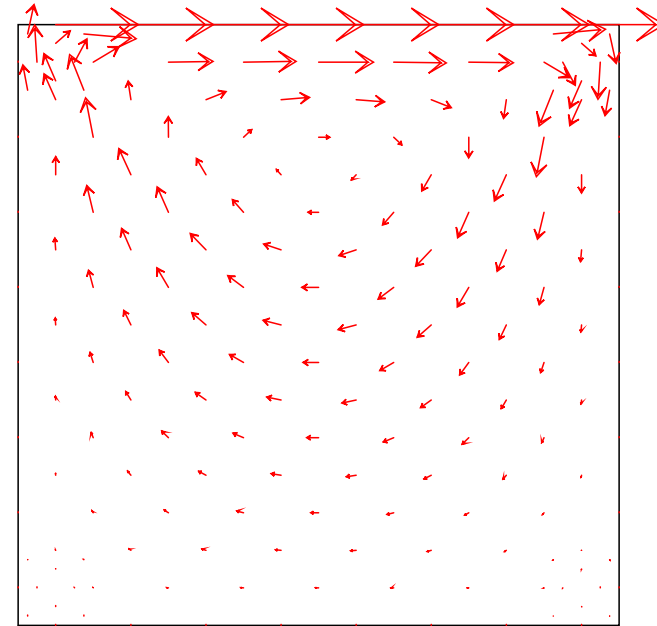
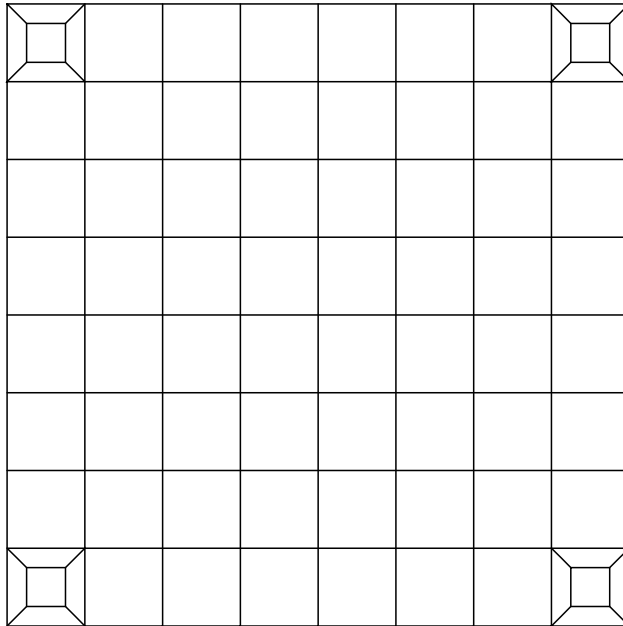
Problèmes des coins pour l'élément  $\mathbb{P}_1^{nc}/\mathbb{P}_0 + \mathbb{P}_1$  :

- [Bernardi and Hecht, 2000] : au plus une arête sur le bord en 2D, au plus 2 faces sur le bord en 3D ;
- mot-clé `VerifierCoin` dans Trio\_U.





## Éléments quadrangulaires 2D : exemple



En éléments finis, lorsque les quadrangles sont déformés, perte de bonnes propriétés : superconvergence,  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  en presque tout point, matrice de masse diagonale...

## Conclusion

1. État des lieux ;
2. Décomposition de Helmholtz-Hodge pour les vitesses parasites ;
3. Problématique des coins pour le  $\mathbb{P}_1^{\text{nc}}/\mathbb{P}_0 + \mathbb{P}_1$  et extension aux quadrangles ;

### Perspectives :

- applications réalistes ;
- Darcy-Stokes 3D ;
- Décomposition de Helmholtz “riche” :  $\mathbf{f} = \nabla\phi + \text{rot}\psi$  ;
- extension du  $\mathbb{P}_1^{\text{nc}}/\mathbb{P}_0 + \mathbb{P}_1$  aux prismes et hexaèdres ;
- extension du  $\mathbb{P}_1^{\text{nc}}/\mathbb{P}_0 + \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_A$  aux prismes et hexaèdres ;
- existe-t-il un autre EF 3D différent du  $\mathbb{P}_1^{\text{nc}}/\mathbb{P}_0 + \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_A$  ayant des propriétés similaires ?
- instabilité du  $\mathbb{P}_1^{\text{nc}}$  pour l’opérateur  $-\nabla\cdot\mu(\nabla\mathbf{u} + \nabla^t\mathbf{u})$  (pistes explorées dans [Fortin, 2006]).

## Bibliographie

- [**Émonot, 1992**] Émonot, P. (1992). *Méthodes de Volumes Éléments Finis : applications aux équations de Navier-Stokes et résultats de convergence*. PhD thesis, Université Claude Bernard - Lyon I.
- [**Clément, 1996**] Clément, P. (1996). *Développements et applications de méthodes numériques Volumes Finis pour la description d'écoulements océaniques*. PhD thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble I.
- [**Bernardi and Hecht, 2000**] Bernardi, C. and Hecht, F. (2000). More pressure in the finite element discretization of the stokes problem. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 34 :953–980.
- [**Benhamadouche and Laurence, 2002**] Benhamadouche, S. and Laurence, D. (2002). Global kinetic energy conservation with unstructured meshes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 40(3-4) :561–571.
- [**Heib, 2003**] Heib, S. (2003). *Nouvelles discrétisations non structurées pour des écoulements de fluides à incompressibilité renforcée*. PhD thesis, Université Paris VI.
- [**Fortin, 2006**] Fortin, T. (2006). *Une méthode Éléments Finis à Décomposition  $L^2$  d'ordre élevé motivée par la simulation d'écoulement diphasique bas Mach*. PhD thesis, Paris VI.