



La méthode FIC-EBC : une méthode de domaine fictif avec sauts immergés et raffinement de maillage multi-niveaux

Isabelle Ramière

► To cite this version:

Isabelle Ramière. La méthode FIC-EBC : une méthode de domaine fictif avec sauts immergés et raffinement de maillage multi-niveaux. MATAPLI, 89, pp.1-28, 2009. cea-01403307

HAL Id: cea-01403307

<https://cea.hal.science/cea-01403307>

Submitted on 25 Nov 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LA MÉTHODE FIC-EBC : UNE MÉTHODE DE DOMAINE FICTIF AVEC SAUTS IMMERGÉS ET RAFFINEMENT DE MAILLAGE MULTI-NIVEAUX

Isabelle RAMIÈRE

CEA Cadarache,

Direction de l'Energie Nucléaire, DEC/SESC/LSC

13108 St-Paul-Lez-Durance, France

[isabelle.ramire]/@cea.fr

3 janvier 2013

Introduction

Depuis plusieurs années, de nouvelles recherches sur l'utilisation de méthodes numériques basées sur des maillages structurés réguliers (principalement cartésiens) sont en cours, notamment dans le milieu industriel pour la simulation numérique en mécanique des fluides. L'objectif est de pouvoir bénéficier des nombreux avantages de ces méthodes (solveurs rapides, bonnes propriétés de convergence, formulation tensorielle naturelle...) tout en essayant d'en limiter les inconvénients (difficulté de prendre en compte les frontières complexes des domaines physiques) qui font que jusqu'à présent la majorité des logiciels industriels utilisent des maillages non structurés.

L'idée de base des méthodes dites « méthodes de domaine fictif » et introduites pour la première fois par V.K. Saul'ev en 1963 dans [30] (repris en anglais par Marchuk en 1982 dans [20]) est de découpler la géométrie du domaine physique d'étude de celle du domaine de calcul. Le domaine physique est alors immergé dans un domaine plus grand et de forme plus simple (généralement rectangulaire en 2D), appelé domaine fictif qui deviendra le domaine de calcul (cf. figure 1). Cette approche présente l'intérêt majeur de pouvoir mailler de façon structurée cartésienne (souvent uniforme) le domaine de calcul et ainsi bénéficier des avantages cités précédemment de ce type de maillages. Cependant, afin de recouvrer une solution approchée satisfaisante sur le domaine physique, c'est-à-dire une solution approchée proche de la solution obtenue dans le cas de maillages adaptés, il faut pouvoir tenir compte de façon précise des frontières immergées dans le domaine calcul.

Dans la littérature, les différentes modélisations de frontières immergées peuvent se regrouper en deux grands types d'approches. Ces approches se distinguent par la dimension de l'espace dans lequel est approchée l'interface immergée réelle :

- soit l'interface approchée est de même dimension que l'interface immergée réelle (*i.e.* une courbe en 2D ou une surface en 3D), on parlera alors d'**interface approchée fine**.

Dans cette catégorie se trouvent les méthodes de pénalisation [20, 15, 16], les méthodes d'interfaces immergées ou « Immersed Interface Method » (I.I.M.) [18, 19], les méthodes de domaine fictif avec multiplicateurs de Lagrange de frontière ou distribués [9, 8], les méthodes de frontières immergées avec grille cartésienne ou « Cartesian grid embedded boundary method » (C.G.E.B.M.) [13, 32].

- soit l'interface approchée est élargie par rapport à l'interface immergée réelle (*i.e.* une surface en 2D ou un volume en 3D), on parlera alors d'**interface approchée diffuse**.

La première approche de type interface diffuse dans le cadre de domaine fictif remonte à Rukhovets [29]. Cependant la méthode la plus connue dans cette catégorie est certainement la méthode

de frontière immergée ou « Immersed Boundary Method » (I.B.M.) [22, 23] de laquelle découle les méthodes I.I.M. citées précédemment. Plus récemment, la méthode de la frontière élargie ou « Fat Boundary Method » (F.B.M.) a été développée [21, 4] ainsi qu’une méthode de domaine fictif avec interface diffuse [27].

La majorité de ces méthodes est dédiée au traitement de conditions aux limites immergées de type Dirichlet, voir par exemple [30, 20, 22, 9, 18, 13, 8, 12, 16] et les nombreuses références citées dedans et dans [25]. Cependant, peu d’études traitent d’autres types de conditions aux limites immergées telles que des conditions de Neumann, voir notamment [14, 7, 32, 5] ou plus particulièrement des conditions de Robin (ou Fourier) [29, 24, 27, 28]. Pour plus de références, le lecteur est invité à lire [25].

L’originalité de la méthode « FIC-EBC » de domaine fictif présentée ici et publiée dans [28] pour des problèmes elliptiques consiste à utiliser le maillage cartésien du domaine fictif, généralement non adapté à la géométrie du domaine physique, pour définir une frontière immergée approchée sur laquelle seront appliquées les conditions aux limites immergées. Une approche de type interface fine a été choisie et la frontière immergée réelle est approchée par une interface s’appuyant sur les faces de cellules du maillage. Les conditions aux limites immergées sont prises en compte par des termes surfaciques via des conditions de transmissions algébriques combinant les sauts de flux et de solution introduites dans [1]. Un paramètre correctif de surface est également introduit dans le cas de conditions aux limites de Robin ou Neumann non-homogène. Un nouveau schéma numérique de type volumes finis avec inconnues aux centres des mailles est dérivé pour résoudre le système d’équations avec conditions de transmissions immergées. Ce schéma numérique générique, n’introduisant aucune inconnue supplémentaire près de la frontière immergée, permet alors de traiter toutes les conditions aux limites générales : Dirichlet, Robin ou Neumann ainsi que des conditions aux limites mixtes, *i.e.* la frontière immergée est l’union de différentes parties, chacune d’entre elles portant une condition aux limites différente.

Ainsi, contrairement aux approches classiques de domaine fictif, cette méthode ne nécessite ni l’introduction d’inconnues surfaciques supplémentaires près de la frontière (cf. multiplicateurs de Lagrange, I.B.M. ou F.B.M. par exemple) ni la modification locale du schéma numérique (cf. I.I.M. ou C.G.E.B.M. par exemple). La structure de la matrice du système linéaire permet l’utilisation de solveurs rapides et le cas de frontières mobiles et/ou déformables serait géré sans difficulté supplémentaire de maillage. Cette approche de domaine fictif permet d’approcher le domaine physique originel à $\mathcal{O}(h)$ près, où h est le pas du maillage. La convergence de cette méthode en fonction du pas du maillage est ainsi du premier ordre en norme L^2 ou L^∞ . L’analyse théorique de convergence a été menée dans [26]. Cette méthode est alors combinée avec un algorithme de raffinement de maillage multi-niveaux autour de la frontière immergée afin d’améliorer la précision de la solution obtenue. Un nouvel algorithme de type FIC pour « Flux Interface Correction » (cf. [3]) avec patches locaux emboîtés a été spécialement développé pour tenir compte de sauts de flux et de solution. Diverses applications numériques sur des exemples académiques confirment l’amélioration de la précision obtenue : la méthode converge ainsi à l’ordre un en fonction du pas de maillage de la grille locale la plus fine jusqu’à ce que l’erreur due à la partie non raffinée du maillage initial soit atteinte.

Parmi les nombreuses applications possibles de cette méthode de domaine fictif, la résolution du bilan d’énergie sur une maquette d’un échangeur de chaleur (de forme cylindrique), représentatif d’un générateur de vapeur dans les centrales nucléaires, est présentée ici. Les solutions obtenues sont comparées à celles obtenues sur des maillages non structurés adaptés à la géométrie du domaine physique. La qualité des résultats des simulations permet de montrer la validité et l’intérêt de ce travail.

1 Présentation de la méthode FIC-EBC

Nous allons exposer brièvement les grands principes de la méthode dénommée « FIC-EBC » et détaillée dans [28] en se focalisant sur le traitement des conditions aux limites (C.L.) immergées et sur les résultats numériques.

1.1 La méthode de domaine fictif « E.B.C » avec sauts immergés

1.1.1 Problème elliptique originel

L'objectif est de résoudre, par une approche de domaine fictif, le problème modèle elliptique suivant sur le domaine physique d'étude $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$ généralement) avec des conditions aux limites de Dirichlet, Neumann ou Robin ou des conditions aux limites mixtes sur $\partial\tilde{\Omega} = \partial\tilde{\Omega}_D \cup \partial\tilde{\Omega}_R$: Etant donnés $\tilde{\mathbf{a}} \in L^\infty(\tilde{\Omega})^{d \times d}$, $\tilde{\mathbf{v}} \in L^\infty(\tilde{\Omega})^d$, $\tilde{b} \in L^\infty(\tilde{\Omega})$ et $\tilde{f} \in L^2(\tilde{\Omega})$, trouver $\tilde{u} \in H^1(\tilde{\Omega})$ tel que

$$(\tilde{\mathcal{P}}) \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(-\tilde{\mathbf{a}}\nabla\tilde{u} + \tilde{\mathbf{v}}\tilde{u}) + \tilde{b}\tilde{u} = \tilde{f} & \text{dans } \tilde{\Omega}, \\ \tilde{u} = u_D & \text{sur } \partial\tilde{\Omega}_D, \\ -(\tilde{\mathbf{a}}\nabla\tilde{u}) \cdot \mathbf{n} = \alpha_R \tilde{u} + g_R & \text{sur } \partial\tilde{\Omega}_R, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1a) \\ (1b) \\ (1c) \end{array}$$

où $\mathbf{n}$ désigne la normale unitaire sur $\partial\tilde{\Omega}_R$, $u_D \in H^{1/2}(\partial\tilde{\Omega}_D)$, $0 \leq \alpha_R \in L^\infty(\partial\tilde{\Omega}_R)$ et $g_R \in L^2(\partial\tilde{\Omega}_R)$. Le tenseur de diffusion $\tilde{\mathbf{a}} \equiv (\tilde{a}_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ et le coefficient de réaction $\tilde{b} \geq 0$ vérifient les hypothèses classiques d'ellipticité.

La condition aux limites (1b) appliquée sur $\partial\tilde{\Omega}_D$ est une condition de type **Dirichlet** alors que la condition aux limites (1b) appliquée sur $\partial\tilde{\Omega}_R$ est une condition de type **Robin**. Une condition aux limites de type **Neumann** est alors un cas particulier d'une condition de Robin où $\alpha_R = 0$.

1.1.2 Problème fictif avec sauts immergés

Dans une approche de domaine fictif, le domaine originel $\tilde{\Omega}$ est immergé dans un domaine ouvert borné polygonal $\Omega \in \mathbb{R}^d$ tel que $\Omega = \tilde{\Omega} \cup \Sigma \cup \Omega_e$ où Ω_e est le domaine fictif extérieur et Σ l'interface commune entre $\tilde{\Omega}$ et Ω_e , voir figure 1. Cette interface $\Sigma \subset \mathbb{R}^{d-1}$ est appelée *interface immergée*. Le domaine fictif Ω est choisi de forme simple (rectangulaire par exemple en 2-D). La frontière de $\tilde{\Omega}$ est définie par $\partial\tilde{\Omega} = \tilde{\Gamma} \cup \Sigma$, et la frontière de Ω par $\partial\Omega = \tilde{\Gamma} \cup \Gamma_e$ (voir figure 1).

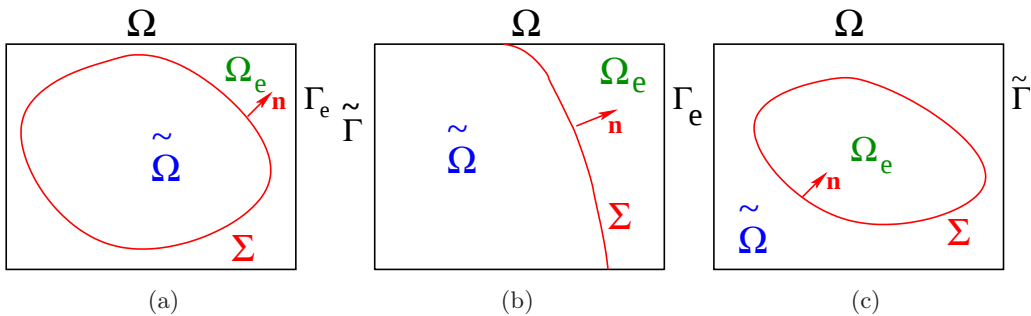


FIGURE 1 – Domaine physique $\tilde{\Omega}$ immergé dans un domaine fictif rectangulaire Ω

Le problème originel ($\tilde{\mathcal{P}}$) est étendu sur le domaine fictif Ω , avec

$$\mathbf{a}|_{\tilde{\Omega}} = \tilde{\mathbf{a}}, \quad \mathbf{v}|_{\tilde{\Omega}} = \tilde{\mathbf{v}}, \quad b|_{\tilde{\Omega}} = \tilde{b}, \quad f|_{\tilde{\Omega}} = \tilde{f}$$

afin de recouvrir le problème elliptique originel (1) dans $\tilde{\Omega}$. Le tenseur de diffusion $\mathbf{a}$ et le coefficient de réaction $b \geq 0$ vérifient également les conditions classiques d'ellipticité.

Il est cependant important de noter qu'une condition aux limites immergée de Robin (1c) sur Σ ne peut être traitée dans une approche de type domaine fictif sans supposer un saut de flux et/ou de la solution sur Σ . Ainsi des conditions de transmissions algébriques liant les sauts du flux diffusif normal $-(\mathbf{a}\nabla u) \cdot \mathbf{n}$ et de la solution u sur l'interface immergée Σ sont introduites. Le problème fictif s'écrit ainsi

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{ll} \text{div}(-\mathbf{a}\nabla u + \mathbf{v}u) + bu = f & \text{dans } \Omega, \\ \text{C.L. réelles} & \text{sur } \tilde{\Gamma}, \\ \text{C.L. appropriées} & \text{sur } \Gamma_e, \\ \llbracket (\mathbf{a}\nabla u) \cdot \mathbf{n} \rrbracket_{\Sigma} = \alpha \bar{u}|_{\Sigma} - q & \text{sur } \Sigma, \\ \overline{(\mathbf{a}\nabla u) \cdot \mathbf{n}}|_{\Sigma} = \beta \llbracket u \rrbracket_{\Sigma} - g & \text{sur } \Sigma, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2a) \\ (2b) \\ (2c) \\ (2d) \\ (2e) \end{array}$$

où le symbole $\llbracket \cdot \rrbracket_{\Sigma}$ représente le saut des traces à travers Σ orienté par $\mathbf{n}$ (normale unitaire sur Σ dirigée vers le domaine fictif extérieur Ω_e) et le symbole $\overline{\cdot}|_{\Sigma}$ désigne la moyenne arithmétique des traces sur Σ .

Les conditions de sauts immergées (2d-2e) ont été initialement introduites pour des modèles de fractures dans [1]. Elles sont plus générales que celles introduites dans la méthode I.I.M. (voir l'introduction) pour laquelle les sauts de solution et de flux sont supposés connus. Les coefficients de transfert $\alpha, \beta \geq 0$ sur Σ sont mesurables et bornés et vérifient des conditions d'ellipticité. Les fonctions g et q sont données dans $L^2(\Sigma)$.

Les conditions aux limites (2c) sur Γ_e sont choisies de sorte à assurer la solvabilité du problème fictif modèle ($\mathcal{P}$). Il est prouvé dans [1] que ce problème est bien posé et que la solution u appartient à $H^1(\Omega \cup \Omega_e)$. Lorsque $\alpha = g = q = 0$ et $\beta \rightarrow \infty$, on retrouve le problème de transmission classique (sans saut de solution ni de flux) avec $u \in H^1(\Omega)$.

Les coefficients $\mathbf{a}, \mathbf{v}, b, f$ dans Ω_e et α, β, g, q sur Σ vont être choisis de façon à retrouver $u|_{\tilde{\Omega}} = \tilde{u}$ ou au moins $u_{\eta}|_{\tilde{\Omega}} \approx \tilde{u}$ quand le modèle est pénalisé avec un paramètre de pénalisation $\eta \rightarrow 0$.

1.1.3 Traitement des conditions aux limites immergées

1.1.3.a Cas continu

Les conditions aux limites immergées sont traitées grâce aux conditions de transmissions portées par Σ . Pour une fonction ψ dans $H^1(\tilde{\Omega} \cup \Omega_e)$, notons ψ_{Σ}^{-} et ψ_{Σ}^{+} les traces de $\psi|_{\tilde{\Omega}}$ et $\psi|_{\Omega_e}$ sur chaque côté de Σ respectivement. Ainsi, $\bar{\psi}|_{\Sigma} = (\psi_{\Sigma}^{+} + \psi_{\Sigma}^{-})/2$ est la moyenne arithmétique des traces de ψ , et $\llbracket \psi \rrbracket_{\Sigma} = (\psi_{\Sigma}^{+} - \psi_{\Sigma}^{-})$ est le saut de traces de ψ sur Σ orienté par $\mathbf{n}$.

La méthode dite « méthode E.B.C » [2, 28] (pour « Embedded Boundary Conditions ») consiste à réécrire les conditions de transmissions immergées (2d-2e) en fonctions des traces de chaque côté de Σ . Une combinaison de ces équations permet alors d'exprimer la trace intérieure du flux diffusif normal

par

$$-(\mathbf{a}\nabla u)^- \cdot \mathbf{n}|_\Sigma = \left(\beta + \frac{\alpha}{4}\right) u_\Sigma^- - \left(\beta - \frac{\alpha}{4}\right) u_\Sigma^+ + g - \frac{q}{2}, \quad \text{on } \Sigma, \quad (3)$$

ou

$$-(\mathbf{a}\nabla u)^- \cdot \mathbf{n}|_\Sigma = \frac{1}{\left(\beta + \frac{\alpha}{4}\right)} \left[\alpha \beta u_\Sigma^- - \left(\beta - \frac{\alpha}{4}\right) (\mathbf{a}\nabla u)^+ \cdot \mathbf{n}|_\Sigma + \frac{\alpha}{2} g - \beta q \right], \quad \text{on } \Sigma. \quad (4)$$

Lorsque le choix particulier $\beta = \frac{\alpha}{4}$ est effectué, les deux équations (3) et (4) conduisent à la même condition aux limites, indépendamment du choix des valeurs extérieures u_Σ^+ et $-(\mathbf{a}\nabla u)^+ \cdot \mathbf{n}|_\Sigma$.

$$-(\mathbf{a}\nabla u)^- \cdot \mathbf{n}|_\Sigma = \frac{\alpha}{2} u_\Sigma^- + g - \frac{q}{2}, \quad \text{on } \Sigma. \quad (5)$$

Cette variante est appelée « sans contrôle extérieur » car elle permet ainsi d'exprimer le flux intérieur en fonction de u_Σ^- uniquement. Par identification, il est aisé de trouver les coefficients α , g et q qui permette de vérifier une condition immergée de Robin (1c) sur Σ (cf. tableau 1).

Une condition aux limites immergée de Dirichlet (1b) peut être vue comme une condition de Robin pénalisée avec $\alpha_R = \frac{1}{\eta}$ et $g_R = -\frac{1}{\eta} u_D$ où η est un paramètre de pénalisation tendant vers 0. Ainsi les coefficients de transfert pour une condition de Dirichlet se déduisent directement de ceux obtenus pour une condition de Robin. La condition de Dirichlet est alors traitée par pénalisation de surface (cf. tableau 1).

De nombreuses autres combinaisons des paramètres de transfert, impliquant de contrôler la solution ou le flux diffusif sur le domaine extérieur (pénalisation volumique), permettent également d'imposer les différentes conditions aux limites immergées, voir des exemples dans [2] ou [25]. Cependant l'approche « sans contrôle extérieur » présente l'avantage de traiter directement les conditions immergées mixtes sur Σ car les différentes conditions aux limites immergées (Robin ou Dirichlet) sont obtenues par une même formulation unifiée (cf. tableau 1). Cette approche sans contrôle extérieur permet également de pouvoir résoudre un problème quelconque sur Ω_e et ouvre ainsi la voie à la résolution par une approche de type E.B.C. de problèmes plus variés pour lesquels les deux domaines Ω et Ω_e sont des domaines physiques d'intérêt (par ex. interaction fluide/structure, fluide/fluide,...).

1.1.3.b Cas discret

La discrétisation du domaine fictif Ω à l'aide d'un maillage cartésien est généralement non adaptée à la géométrie du domaine originel $\tilde{\Omega}$. Ainsi la méthode E.B.C consiste à définir une interface immergée approchée Σ_h à partir des faces du maillage du domaine fictif, cf. figure 2.

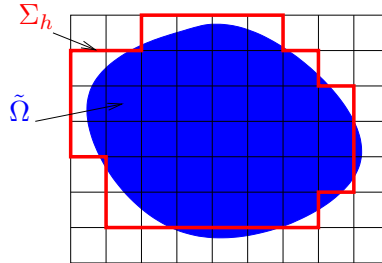


FIGURE 2 – Approximation de la frontière immergée par des faces du maillages

Dans le problème discrétisé $(\mathcal{P}_h)$ associé à $(\mathcal{P})$, les conditions de transmissions (2d-2e) sont appliquées sur Σ_h . Les relations définissant les coefficients de transfert sur Σ restent valables sur Σ_h . Dans ce cas, les paramètres u_D, α_R et g_R des conditions aux limites immergées initialement définis sur Σ doivent pouvoir être définis sur Σ_h . En pratique, il est assez facile de trouver des relèvements de ces paramètres afin d'obtenir des conditions immergées sur Σ_h .

Etant donné que la frontière immergée approchée Σ_h définit un domaine réel approché $\tilde{\Omega}_h$ tel que $|\text{mes}(\tilde{\Omega}_h) - \text{mes}(\tilde{\Omega})| = \mathcal{O}(h)$, on s'attend à une convergence du premier ordre en maillage de la méthode E.B.C, ce qui est confirmé par les exemples numériques présentés dans [28, 25] et dans la section 2 du présent papier. On voit cependant que dans le cas de conditions immergées de Robin (ou de Neumann non-homogène), un paramètre correctif est nécessaire pour conserver la convergence en maillage de la méthode E.B.C. Cette correction permet d'assurer la conservativité locale entre l'intégrale du flux immergé réel et l'intégrale du flux immergé approché. En pratique, il convient de définir un paramètre local ϵ_K vérifiant

$$\int_{\Sigma \cap \hat{K}} \varphi_{\Sigma}^{-} ds = \int_{\Sigma_h \cap \hat{K}} \frac{1}{\epsilon_K} \varphi_{\Sigma_h}^{-} ds, \quad (6)$$

avec $\varphi_{\Sigma}^{-} = \alpha_R u_{\Sigma}^{-} + g_R$ et $\varphi_{\Sigma_h}^{-} = \alpha_R u_{\Sigma_h}^{-} + g_R$, $\hat{K}$ est l'union de cellules du maillage (ou mailles) autour d'une cellule K , $K \subset \tilde{\Omega}_h$.

Pour toute face σ s'appuyant sur Σ_h , la valeur discrète $\varphi_{\Sigma_h}^{-}$ de φ_{Σ}^{-} et donc les valeurs discrètes de α_R et g_R évaluées sur σ sont divisées par un paramètre correctif ϵ_{σ} . Ce paramètre ϵ_{σ} est défini de manière unique pour toute face $\sigma \subset \Sigma_h$ pouvant appartenir à plusieurs cellules. L'interface approchée Σ_h séparant le domaine réel approché $\tilde{\Omega}_h$ du domaine extérieur approché $\Omega_{e,h}$, on choisit

$$\epsilon_{\sigma} = \epsilon_K \quad \text{avec } \sigma \subset \partial K \text{ et } K \subset \tilde{\Omega}_h. \quad (7)$$

Nous nous intéressons à des approximations des corrections de surface définies par l'intégrale (6) dans laquelle les flux $\varphi_{\Sigma_h}^{-}$ et φ_{Σ}^{-} sont supposés égaux. Plusieurs choix de $\hat{K}$ peuvent être envisagés :

- le choix $\hat{K} \equiv \Omega$ conduit à une correction globale de surface

$$\epsilon_h = \frac{\text{mes}(\Sigma_h)}{\text{mes}(\Sigma)}$$

On peut voir dans [28, 25] qu'une correction globale n'est pas suffisante pour assurer la convergence de la méthode E.B.C. en fonction du pas du maillage.

- le choix naturel $\hat{K} \equiv K$ conduit à une correction locale de surface

$$\epsilon_K = \frac{\text{mes}(\Sigma_{h,K})}{\text{mes}(\Sigma_K)}$$

où l'indice K désigne la partie de frontière incluse dans la maille K .

Ce choix ne permet pas de tenir compte de toute la frontière immergée réelle Σ . En effet, certaines cellules du maillage peuvent être interceptées par la frontière réelle Σ sans pour autant avoir des faces appartenant à Σ_h (voir cas frontière extérieure dans [28]). Pour ces cellules, $\epsilon_K = 0$ et la conservativité locale du flux n'est plus assurée. De plus, selon le choix de la frontière immergée approchée Σ_h , il est probable que la frontière immergée réelle Σ intercepte certaines cellules du maillage extérieures au domaine approché réel (voir figure 2 ou figure 6(b)). La définition précédente de ϵ_K ne permet alors pas à ϵ_{σ} de tenir compte d'éventuelles portions de Σ présentes dans $\Omega_{e,h}$.

Ce choix conduit donc également à une perte de la convergence en maillage de la méthode.

- un choix précis de $\hat{K}$ conduisant à une correction de surface locale tenant compte de toutes les intersections du maillage avec la frontière immergée réelle et permettant de conserver la convergence en maillage à l'ordre un de la méthode E.B.C est proposé dans [28].

Ce choix consiste pour chaque cellule interceptée par Σ appartenant à $\Omega_{e,h}$ ou dont les faces $\sigma \not\subset \Sigma_h$ à associer cette cellule à une cellule voisine $K \subset \tilde{\Omega}_h$ telle qu'il existe une face $\sigma \subset (\partial K \cap \Sigma_h)$. Ce groupement éventuel de cellules autour de K définit $\hat{K}$. On a alors

$$\epsilon_K = \frac{\text{mes}(\Sigma_{h,K})}{\text{mes}(\Sigma_{\hat{K}})}$$

avec $\Sigma_{\hat{K}} = \bigcup_{K \in \hat{K}} \Sigma_K$. En pratique Σ_K est déterminée à partir d'une interpolation linéaire par morceaux de Σ .

L'analyse théorique de la convergence de l'erreur menée dans [26] confirme que ce choix de paramètre de correction de surface doit permettre d'obtenir une convergence en maillage du premier ordre en norme L^2 pour cette approche de domaine fictif. Les exemples numériques présentés dans [28] et dans la section 2 confirment ce résultat.

Le tableau 1 récapitule les valeurs des coefficients de transfert pour la méthode E.B.C. « sans contrôle extérieur ». Sur la frontière immergée approchée Σ_h , les relèvements des paramètres des conditions aux limites immergées sont toujours notés u_D , α_R et g_R .

Méthode E.B.C. sans contrôle extérieur	Paramètres sur Σ	Paramètres sur Σ_h
Robin (R)	$\alpha = 4\beta = 2\alpha_R$ $g - \frac{q}{2} = g_R$	$\alpha = 4\beta = 2\frac{\alpha_R}{\epsilon_\sigma}$ $g - \frac{q}{2} = \frac{g_R}{\epsilon_\sigma}$
Dirichlet (D)	$\alpha = 4\beta = \frac{2}{\eta}$ $\frac{q}{2} - g = \frac{1}{\eta}u_D$	

TABLE 1 – Coefficients de transfert pour la méthode E.B.C. avec sauts immergés et sans contrôle extérieur.

1.2 Schéma aux volumes finis pour la méthode E.B.C

Quelques notations classiques des schémas aux volumes finis centrés sont tout d'abord rappelées (cf. [6] par exemple) et de nouvelles notations sont également introduites afin de pouvoir présenter le schéma aux volumes finis dérivé pour résoudre le problème fictif avec sauts immergés.

1.2.1 Notations

Le domaine polygonal Ω est maillé avec une famille $\mathcal{T}_h = \{K\}$ de volumes finis $K \subset \Omega$ disjoints (appelés “volumes de contrôle”) qui sont des ouverts polygonaux convexes tels que $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \bar{K}$ vérifiant les hypothèses classique, cf. [6]. La taille du maillage est définie par $h = \sup\{\text{diam}(K), K \in \mathcal{T}_h\}$. Soit $\mathcal{E}$ la famille des faces (ou arrêtes en 2-D) des volumes de contrôle. Une face $\sigma \in \mathcal{E}$ séparant deux

volumes de contrôles K et L sera notée $\sigma \equiv K|L$. Pour chaque $K \in \mathcal{T}_h$, soit $\mathcal{E}_K$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ contenant l'ensemble des faces de K . Ainsi, $\mathcal{E} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \mathcal{E}_K$.

Un point de discrétisation centré dans la maille $x_K \in K$ est choisi pour chaque $K \in \mathcal{T}_h$ de sorte que pour chaque $\sigma \in \mathcal{E}_K$; $\sigma = K|L$, le segment $[x_K, x_L]$ soit orthogonal à σ au point $x_\sigma \in \sigma$. Pour chaque $K \in \mathcal{T}_h$, notons $d_{K,\sigma} = |x_K - x_\sigma| > 0$ la distance de x_K à σ et $\mathbf{n}_{K,\sigma}$ la normale unitaire extérieure à K sur σ . Pour $\sigma = K|L$, on note d_σ la distance euclidienne entre x_K et x_L , ainsi $d_\sigma = d_{K,\sigma} + d_{L,\sigma}$.

Pour chaque $K \in \mathcal{T}_h$ (resp. $\sigma \in \mathcal{E}$), $m(K) = \int_K dx$ (resp. $m(\sigma) = \int_\sigma ds$) représente la mesure de K (resp. σ). Pour une quantité ψ connue, les valeurs discrètes ψ_K et ψ_σ représentent les moyennes de ψ sur K ou σ respectivement :

$$\psi_K = \frac{1}{m(K)} \int_K \psi(x) dx, \quad \text{et} \quad \psi_\sigma = \frac{1}{m(\sigma)} \int_\sigma \psi(s) ds.$$

L'ensemble de face intérieure (resp. de frontière) est noté $\mathcal{E}_{int}$ (resp. $\mathcal{E}_{ext}$), ainsi $\mathcal{E}_{int} = \{\sigma \in \mathcal{E}; \sigma \not\subset \partial\Omega\}$ (resp. $\mathcal{E}_{ext} = \{\sigma \in \mathcal{E}; \sigma \subset \partial\Omega\}$). Un des intérêts majeurs de la méthode E.B.C. est d'utiliser un maillage simple structuré et non-conforme à la frontière immergée. Ainsi les faces du maillage $\mathcal{T}_h$ ne se sont généralement pas alignées sur l'interface immergée Σ (voir dans la section 2). L'interface approchée Σ_h définie par le maillage sépare le domaine approché originel $\tilde{\Omega}_h$ du domaine extérieur approché $\Omega_{e,h}$. Notons $\mathcal{E}_\Sigma = \{\sigma \in \mathcal{E}; \sigma \subset \Sigma_h\}$ l'ensemble des faces s'appuyant sur Σ_h .

1.2.2 Un schéma avec inconnues centrées et sauts immergés

Le schéma aux volumes finis avec inconnues centrées utilisé pour résoudre numériquement le problème $(\mathcal{P})$ reprend le schéma proposé dans [1] pour des problèmes de diffusion. Le flux convectif est obtenu à l'aide d'un schéma upwind monotone. Ce schéma est d'ordre un, ce qui est en accord avec l'ordre attendu de notre méthode de domaine fictif. Le schéma aux volumes finis obtenu permet des sauts de flux diffusif et convectif ainsi que des sauts de la solution sur chaque face σ des volumes de contrôles intérieurs. Le schéma numérique est écrit pour un tenseur de diffusion isotropique $\mathbf{a} = a(x)\mathbf{Id}$. Le cas d'un tenseur de diffusion anisotropique non-trivialement diagonal ne permet pas d'être traité avec le schéma numérique proposé ici.

Pour chaque $K \in \mathcal{T}_h$ l'inconnue principale notée u_K est une approximation de la valeur $u(x_K)$ de la solution exacte u au point x_K du maillage. Deux inconnues auxiliaires $(u_{K,\sigma}, u_{L,\sigma})$, telles que $u_{K,\sigma} = u_\sigma|_K$ et $u_{L,\sigma} = u_\sigma|_L$ sont introduites sur $\sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int}$, ce sont des approximations de $u(x_\sigma)|_K$ et $u(x_\sigma)|_L$ respectivement.

Le schéma volumes finis centré avec sauts immergés s'écrit sous forme synthétique :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} m(\sigma) (F_{K,\sigma} + v_{K,\sigma} u_{K,\sigma}^{Up}) + m(K) b_K u_K = m(K) f_K, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \quad (8)$$

où le flux numérique diffusif $F_{K,\sigma}$ correspond à

$$F_{K,\sigma} = \begin{cases} -a_K \frac{u_{K,\sigma} - u_K}{d_{K,\sigma}} & \text{si } \sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int} \\ -a_K \frac{u_\sigma - u_K}{d_{K,\sigma}} & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_{ext} \text{ avec une C.L. de Dirichlet sur } \sigma : u = g_D \\ \frac{a_K}{a_K + \kappa_\sigma d_{K,\sigma}} (\kappa_\sigma u_K + \phi_\sigma) & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_{ext} \text{ avec une C.L. de Robin sur } \sigma : -(\mathbf{a} \cdot \nabla u) \cdot \mathbf{n} = \kappa u + \phi \end{cases} \quad (9)$$

et le flux numérique convectif $V_{K,\sigma} = v_{K,\sigma} u_{K,\sigma}^{Up}$ provient du schéma upstream avec

$$v_{K,\sigma} = \frac{1}{m(\sigma)} \int_{\sigma} \mathbf{v}_{K,\sigma}^- \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \, ds$$

et

$$u_{K,\sigma}^{Up} = \begin{cases} u_K & \text{if } v_{K,\sigma} \geq 0 \\ u_{\sigma} & \text{if } v_{K,\sigma} < 0 \text{ et } \sigma \in \mathcal{E}_{ext} \\ u_{K,\sigma} & \text{if } v_{K,\sigma} < 0 \text{ et } \sigma \in \mathcal{E}_{\Sigma} \cap \mathcal{E}_{int} \\ u_L & \text{if } v_{K,\sigma} < 0 \text{ et } \sigma \notin (\mathcal{E}_{\Sigma} \cup \mathcal{E}_{ext}) \end{cases}$$

Le point clé de ce schéma est d'utiliser les conditions de transmissions sur toutes les faces $\sigma \in \mathcal{E}_{int}$ afin d'avoir un même schéma numérique générique sur tout le maillage. La discrétisation des équations (2d-2e) pour tout $\sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int}$ conduit respectivement à

$$F_{K,\sigma} + F_{L,\sigma} = \alpha_{\sigma} \frac{u_{K,\sigma} + u_{L,\sigma}}{2} - q_{\sigma} \quad (10)$$

$$\frac{1}{2}(F_{L,\sigma} - F_{K,\sigma}) = \beta_{\sigma} (u_{L,\sigma} - u_{K,\sigma}) - \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} g_{\sigma} \quad (11)$$

où $\mathbf{n}$ correspond ici à la normale unitaire sur Σ_h .

Ainsi, pour chaque $\sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int}$, les équations (9) et (10-11) permettent d'exprimer l'inconnue d'interface $u_{K,\sigma}$ en fonction des inconnues principales du problème $(u_K)_{K \in \mathcal{T}_h}$:

$$\begin{aligned} u_{K,\sigma} = & \frac{\hat{a}_{\sigma} d_{L,\sigma}}{a_L d_{\sigma}} \left(1 + \frac{\alpha_{\sigma}}{4 \beta_{\sigma}} \right) u_K + \frac{\hat{a}_{\sigma} d_{K,\sigma}}{a_K d_{\sigma}} \left(1 - \frac{\alpha_{\sigma}}{4 \beta_{\sigma}} \right) u_L + \frac{\hat{a}_{\sigma}}{d_{\sigma} \beta_{\sigma}} u_K \\ & + \frac{\hat{a}_{\sigma} d_{K,\sigma} q_{\sigma}}{a_K d_{\sigma}} \left(\frac{d_{L,\sigma}}{a_L} + \frac{1}{2 \beta_{\sigma}} \right) - \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \frac{\hat{a}_{\sigma} d_{K,\sigma} g_{\sigma}}{a_K d_{\sigma} \beta_{\sigma}} \left(1 + \frac{\alpha_{\sigma} d_{L,\sigma}}{2 a_L} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\sigma} &= \frac{a_{\sigma}}{1 + \frac{a_{\sigma}}{\beta_{\sigma} d_{\sigma}} + \alpha_{\sigma} \left(\frac{1}{4 \beta_{\sigma}} + \lambda_{\sigma} \right)}, \quad a_{\sigma} = \frac{d_{\sigma} a_K a_L}{d_{L,\sigma} a_K + d_{K,\sigma} a_L}, \\ \lambda_{\sigma} &= \frac{d_{K,\sigma} d_{L,\sigma}}{d_{L,\sigma} a_K + d_{K,\sigma} a_L}. \end{aligned}$$

Ainsi, les inconnues auxiliaires $u_{K,\sigma}, u_{L,\sigma}$ peuvent être éliminées de l'expression du flux diffusif, comme expliqué dans [1]. On obtient ainsi l'expression suivante du flux numérique diffusif

$$\begin{aligned} F_{K,\sigma} = & - \hat{a}_{\sigma} \left(\frac{u_L - u_K}{d_{\sigma}} \right) + \frac{\alpha_{\sigma} \hat{a}_{\sigma}}{2 \beta_{\sigma} d_{\sigma}} \left(\frac{u_K + u_L}{2} \right) + \frac{\alpha_{\sigma} \hat{a}_{\sigma} d_{L,\sigma}}{a_L d_{\sigma}} u_K \\ & - \frac{\hat{a}_{\sigma} q_{\sigma}}{d_{\sigma}} \left(\frac{d_{L,\sigma}}{a_L} + \frac{1}{2 \beta_{\sigma}} \right) + \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \frac{\hat{a}_{\sigma} g_{\sigma}}{d_{\sigma} \beta_{\sigma}} \left(1 + \frac{\alpha_{\sigma} d_{L,\sigma}}{2 a_L} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

Le schéma volumes finis centré (8) ne requiert ainsi que le stencil centré à $(2d+1)$ point qui est le stencil standard des schémas aux volumes finis avec inconnues aux centres des mailles. Le schéma numérique utilisé ici est donc aussi peut coûteux qu'un schéma volume fini standard sans sauts. Les propriétés de convergence de ce schéma ont été étudiées dans [1].

Pour chaque face $\sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int}$ du maillage, les coefficients de transfert des équations de transmission (10-11) sont obtenus par :

- sur les faces des volumes de contrôle n'appartenant pas à la frontière immergées approchée, les propriétés de conservation locales du flux diffusif et continuité de la solution permettent d'obtenir les coefficients de transfert :

$$F_{K,\sigma} = -F_{L,\sigma}, \quad \text{et} \quad u_{K,\sigma} = u_{L,\sigma}, \quad \text{si } \sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int} \setminus \mathcal{E}_\Sigma \quad (14)$$

ainsi,

$$\alpha_\sigma = q_\sigma = g_\sigma = 0 \quad \text{et} \quad \beta_\sigma = \frac{1}{\eta} \rightarrow \infty \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{int} \setminus \mathcal{E}_\Sigma$$

- sur les faces des volumes de contrôle appartenant à la frontière immergées approchée, $\sigma \in \mathcal{E}_\Sigma \cap \mathcal{E}_{int}$, les coefficients de transfert discrets sont égaux à la valeur moyenne sur σ des coefficients de transfert définis sur Σ_h (voir tableau 1).

REMARQUE : La conservativité locale du flux convectif est également assurée sur les faces du maillage n'appartenant pas à la frontière immergée approchée

$$V_{K,\sigma} = -V_{L,\sigma} \quad \text{si } \sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int} \setminus \mathcal{E}_\Sigma$$

1.3 Raffinement local multi-niveaux de maillage : algorithme FIC-EBC

Afin d'améliorer la précision de la solution obtenue, la méthode E.B.C est combinée avec un algorithme de raffinement local de maillage dans le voisinage de l'interface immergée Σ . Les principales méthodes de raffinement multi-niveaux de maillage sont basées sur un processus multi-grilles dont le principe de base est de générer de façon récursive des sous-grilles locales ayant des pas de maillage de plus en plus fins (jusqu'à un niveau de discrétisation donné) sur lesquelles le problème initial est résolu et d'utiliser des opérateurs de prolongement et de restriction pour communiquer entre la grille de base (domaine de calcul initial) et les sous-grilles. Le solveur utilisé sur chaque grille est indépendant de la méthode multi-grille choisie. Les itérations d'un processus multi-grilles peuvent être représentés par des V-cycles, cf. figure 3. Le nombre d'itérations pour atteindre la convergence de ce type d'algorithme dépend du nombre de sous-niveaux générés. Ces méthodes de raffinement local de maillage multi-niveaux n'améliorent pas l'ordre de convergence de la méthode à laquelle ils sont combinés mais permettent d'améliorer la précision de la solution sur la grille de base.

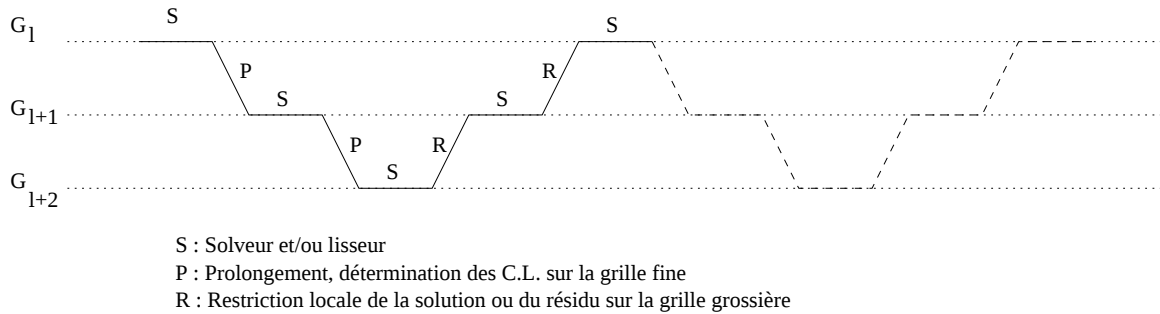


FIGURE 3 – Processus multi-grilles à partir d'une grille initiale G_l

Dans le cadre de la méthode E.B.C, à chaque niveau de raffinement, un ensemble de patches de forme

simple (rectangulaire en 2D) est généré (cf. figure 4). Ces patches sont des sous-grilles emboîtées centrées autour d'un volume de contrôle du niveau grossier immédiatement au dessus, situé autour de l'interface fine Σ_h approchée.

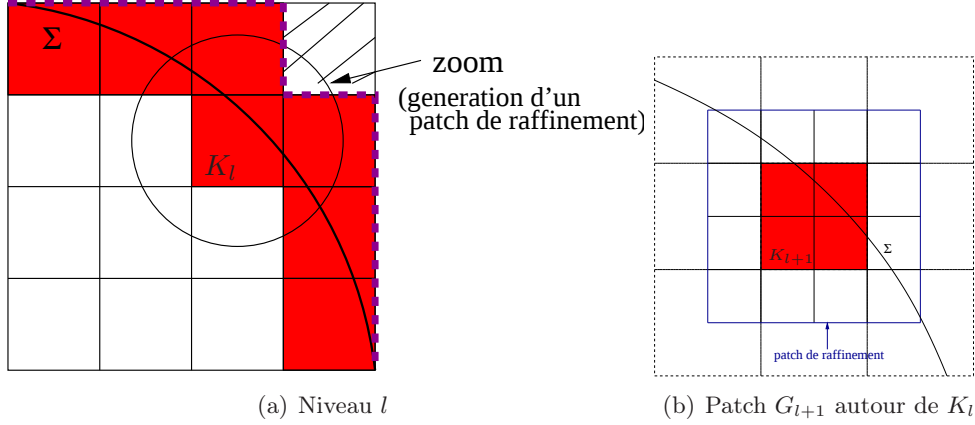


FIGURE 4 – Génération des patches locaux de raffinement

La méthode multi-grille F.I.C. [3] s'applique bien à des problèmes discrétisés sous forme conservative. Le schéma volumes finis défini pour la méthode E.B.C., cf. équation (8), étant localement conservatif, un solveur de type F.I.C est combiné avec la méthode E.B.C. A chaque niveau, la solution est corrigée par un résidu en flux calculé à partir du niveau fin immédiatement au dessus. Contrairement à un solveur F.I.C classique, le solveur FIC-EBC tient également compte de la détection d'une frontière immergée approchée à chaque niveau de raffinement sur laquelle existent des sauts de flux et/ou de solution. L'opérateur de prolongement est un opérateur d'interpolation linéaire tenant compte des sauts de solutions. A chaque niveau l de raffinement, l'opérateur de restriction ne tient compte que des flux sur les faces du maillage du niveau $l + 1$ intérieures au domaine physique approché de ce niveau, qui sont incluses dans des faces du maillage du niveau l intérieures au domaine physique approché du niveau l . Ainsi, un résidu en flux est établi uniquement entre les flux portés par les faces intérieures des domaines physiques approchés sur chacun des deux niveaux consécutifs, cf. figure 5.

Chaque patch étant défini comme un domaine élargi autour d'un volume de contrôle du niveau immédiatement au dessus (cf. figure 4(b)), des itérations de décomposition de domaine (DDM) de type Schwarz multiplicatif (cf. par exemple [17]) sont implémentées pour gérer le recouvrement des patches. Ces itérations jouent le rôle de lisseur.

L'algorithme FIC-EBC détaillé est donné dans [28, 25]. Des simulations numériques présentées dans ces références permettent de valider cet algorithme de raffinement multi-niveaux de maillage. La précision de la solution est améliorée et la méthode converge alors en $\mathcal{O}(h_{l*})$, où h_{l*} est le pas de discrétisation de la grille locale la plus fine, jusqu'à ce que l'erreur due à la partie non raffinée du maillage soit atteinte. Une étude de convergence de l'erreur de discrétisation en fonction du temps CPU permet d'apprécier le gain de temps apporté par la combinaison de l'approche domaine fictif avec un processus de raffinement de maillage à l'aide de patches locaux. Quelques résultats sont présentés dans la section 2.

Cette approche multi-grilles avec des niveaux composées d'un ensemble de patches de forme simple présente l'intérêt de pouvoir facilement implémenter de façon récursive la méthode de domaine fictif E.B.C. avec interface fine et sauts immergés sur chaque patch. Pour un niveau de raffinement, le calcul sur chaque patch est indépendant et pourrait être exécuté en parallèle. Toutefois, les itérations de dé-

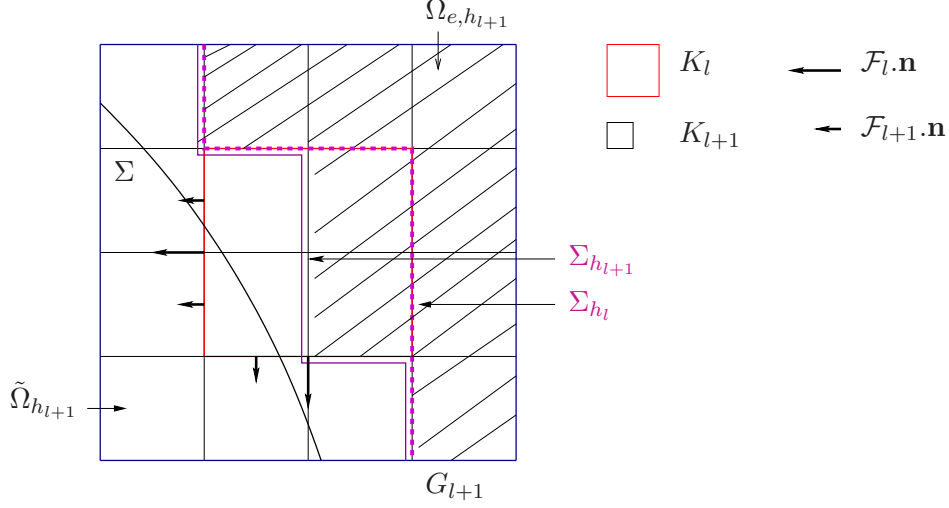


FIGURE 5 – Flux $\mathcal{F}$ intervenant dans l'opérateur de restriction de flux dans le cas d'un volume de contrôle K_l intérieur contenant des volumes de contrôles K_{l+1} extérieurs

composition de domaine permettant d'accélérer la convergence de l'algorithme nécessitent des échanges entre processeurs.

2 Résultats numériques

2.1 Résultats académiques

Nous présentons ici les résultats numériques obtenus dans [28] pour un problème de diffusion avec conditions aux limites mixtes. De nombreux autres exemples permettant d'apprécier les performances de la méthode FIC-EBC sont disponibles dans [28] : problèmes de diffusion ou de convection-diffusion avec conditions aux limites de Dirichlet homogène ou non homogène et de Robin.

La domaine originel $\tilde{\Omega}$ est choisi comme étant un domaine polygonal avec conditions de symétrie sur la frontière $\tilde{\Gamma}$, voir figure 6(a). Le domaine fictif est choisi comme étant $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$, ce qui définit une interface immergée en coin $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, voir figure 6(a).

Le domaine fictif Ω est maillé à l'aide de différents maillages cartésiens composés de cellules carrées uniformes avec des pas de maillage variant de $h = \frac{1}{4}$ à $h = \frac{1}{512}$. L'interface immergée approchée n'étant pas définie de manière unique, nous proposons d'étudier le cas d'une frontière dite « coupée » qui intercepte la frontière immergée réelle, cf. figure 6(b). Un exemple de frontière immergée extérieure est présenté dans [28]. Le découpage de la frontière immergée approchée coupée est plus proche de la frontière immergée réelle que celui d'une frontière approchée extérieure, ce qui conduit à des valeurs de l'erreur de discrétisation plus faibles. Les domaines réels approchés $\tilde{\Omega}_h$ sont tels que $|\text{mes}(\tilde{\Omega}_h) - \text{mes}(\tilde{\Omega})| = \mathcal{O}(h)$, ou plus précisément $\text{mes}((\tilde{\Omega} \cup \tilde{\Omega}_h) \setminus (\tilde{\Omega} \cap \tilde{\Omega}_h)) = \mathcal{O}(h)$.

Soit le problème mixte suivant

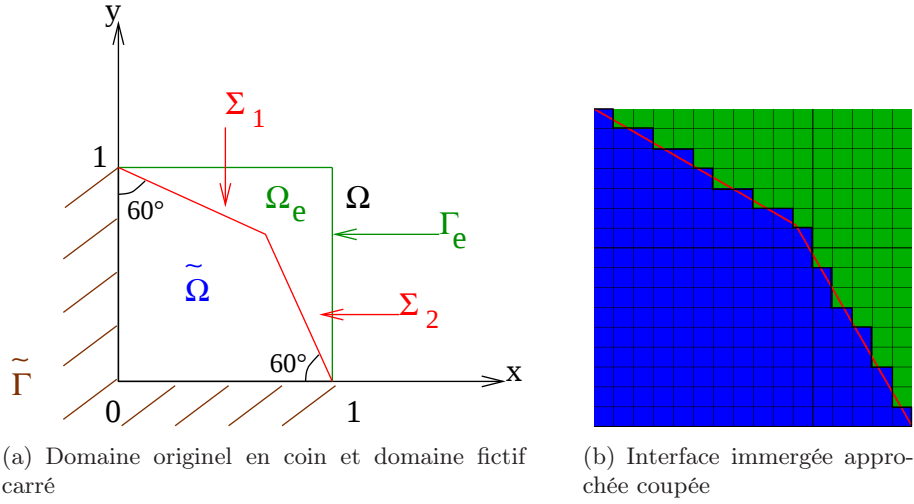


FIGURE 6 – Description du domaine d’étude en coin, du domaine fictif associé et de l’interface immergée approchée.

$$(\tilde{\mathcal{P}}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \tilde{u} = 4 & \text{dans } \tilde{\Omega}, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} = 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma}, \\ \tilde{u}|_{\Sigma_1} = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}x + 1 & \text{sur } \Sigma_1 \ (u_D = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}x + 1), \\ -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}|_{\Sigma_2} = \tilde{u}|_{\Sigma_2} + 4x^2 - 6x + 1 + \sqrt{3} & \text{sur } \Sigma_2 \ (\alpha_R = 1, g_R = 4x^2 - 6x + 1 + \sqrt{3}). \end{array} \right.$$

dont la solution analytique est $\tilde{u} = 2 - (x^2 + y^2)$ dans $\tilde{\Omega}$.

Le problème fictif $(\mathcal{P})$ associé est résolu sur Ω avec la méthode E.B.C. mixte $(D) + (R)$ sans aucun contrôle du domaine extérieur, voir tableau 1.

L’étude de la convergence de la méthode E.B.C (D) en fonction du paramètre de pénalisation η est effectuée dans [28] et montre une convergence de l’erreur de modélisation en $\mathcal{O}(\eta^{\frac{1}{2}})$ en norme L^2 . Les résultats suivants sont obtenus avec un paramètre de pénalisation $\eta = 10^{-12}$ sur $\Sigma_{1,h}$.

La figure 7(a) représente la norme L^2 de l’erreur de discrétisation en fonction du pas h_0 du maillage grossier (grille de base) pour la méthode E.B.C mixte $(D) + (R)$ sans raffinement de maillage ($l^* = 0$) ou combinée avec l’algorithme FIC-EBC avec 1 à 3 sous-niveaux ($l^* = 1$ à 3) de raffinement de maillage à l’aide de patches locaux. On peut constater que la méthode générique de domaine fictif E.B.C. avec interface fine et sauts immergés est du premier ordre en norme L^2 . La combinaison de la méthode E.B.C avec l’algorithme FIC-EBC conserve l’ordre de convergence et améliore la précision de la solution. En effet après raffinement local multi-niveaux, l’erreur résultante sur la grille de base est égale à l’erreur obtenue sans raffinement sur un maillage ayant un pas de discrétisation égal au pas de grille locale la plus fine. Ces résultats numériques permettent de conclure que pour la norme L^2 , la précision de la méthode FIC-EBC varie en $\mathcal{O}(h_{l^*})$ où h_{l^*} est le pas de discrétisation de la grille locale la plus fine (dernier sous-niveau de raffinement). Cependant l’erreur sur la grille de base dépend également de l’erreur de la zone non raffinée : cette convergence asymptotique en $\mathcal{O}(h_{l^*})$ n’est valable que pour l^* plus petit qu’un nombre maximal de sous-niveaux de raffinement (indépendant de h_0), voir plus de détails dans [28]. Au delà de ce nombre maximum de sous-niveaux, l’erreur de discrétisation stagne

à la valeur de l'erreur de discrétisation de la partie non raffinée de la grille de base. Les conclusions obtenues sont similaires en norme L^∞ .

En terme de place mémoire, le solveur multi-grilles FIC-EBC est peu coûteux car chaque sous-niveau de raffinement ne contient qu'un petit nombre de degrés de liberté. Pour une erreur donnée, le stockage mémoire est toujours réduit avec l'utilisation du solveur FIC-EBC. La figure 7(b) nous montre qu'en terme de temps CPU, l'algorithme FIC-EBC devient intéressant à partir d'un pas de maillage local visé de $h = 1/128$. Par exemple, le temps CPU est divisé par 7 entre l'erreur obtenue avec $h_0 = \frac{1}{512}$ et $l^* = 0$ (sans raffinement, une seule grille de base) et la même erreur obtenue avec $h_0 = \frac{1}{128}$ et $l^* = 2$ (3 niveaux). On s'aperçoit par ailleurs que le temps CPU ne s'améliore plus beaucoup lorsque le nombre de niveaux de maillages dépasse trois ($l^* > 2$). Le nombre $l^* = 2$ de sous-niveaux de maillage semble donc optimal.

La figure 8(a) permet de visualiser la distribution de l'erreur absolue $|\tilde{u}(x_K) - u_K| \forall K \subset \tilde{\Omega}_h$ sur la grille de base pour une résolution sans raffinement de maillage ($l^* = 0$). Cette figure illustre bien que les différences les plus importantes entre la solution approchée et la solution analytique sont localisées sur les mailles interceptées par l'interface réelle immergée. On voit également que les erreurs les plus importantes sont situées sur la partie Robin de la frontière immergée. Il est en effet plus difficile de respecter une condition immergée de type Robin liant le flux à la solution que d'imposer la valeur de la solution par pénalisation.

Lorsque l'algorithme FIC-EBC est appliqué sur une zone de raffinement située autour de la frontière immergée, les valeurs absolues d'erreurs sont considérablement diminuées, cf. figure 8(b). Des pics d'erreurs continuent à être situés près de la frontière immergée. Ceci est intrinsèque à l'algorithme FIC-EBC. En effet, sur les mailles situées dans $\tilde{\Omega}_h$ dont au moins une face s'appuie sur Σ_h , la condition aux limites immergée approchée continue à être appliquée sur les faces de frontière tandis que les flux sur les faces internes, et donc la solution sur le maillage interne, sont corrigés via l'algorithme FIC-EBC. L'erreur la plus importante reste localisée sur la partie Robin de la frontière immergée sur la maille voisine du coin formé par les deux interfaces immergées. Ceci semble logique car un changement de conditions aux limites se produit au niveau du coin et l'approximation de la frontière immergée par des faces du maillage ne permet pas de reproduire de façon précise ce changement.

2.2 Résultats industriels

2.2.1 Contexte

Cette étude s'inscrit dans le cadre de l'étude des générateurs de vapeur (GV) des centrales thermiques nucléaires de type REP (réacteur à eau pressurisée). Le schéma de principe du fonctionnement d'une centrale nucléaire de type REP est donné sur la figure 9. Le GV est un échangeur de chaleur assurant la production de vapeur actionnant les turbines d'une centrale électrique.

L'énergie libérée lors de la réaction en chaîne de fission dans le cœur du réacteur est transférée sous forme de chaleur à l'eau qui circule autour des barreaux combustibles. Cette eau, maintenue liquide par un pressuriseur, joue le rôle de fluide caloporteur en transportant la chaleur du combustible hors du cœur du réacteur. C'est le **circuit primaire**.

L'eau du circuit primaire sort du cœur de réacteur à une température de l'ordre de 320°C (la température d'entrée est autour de 280°C). Ce caloporteur est ensuite utilisé pour chauffer de l'eau non contaminée dans le générateur de vapeur sans entrer en contact direct avec elle. Cette eau non irradiée est portée à ébullition pour produire de la vapeur qui va entraîner ensuite une turbine couplée à un

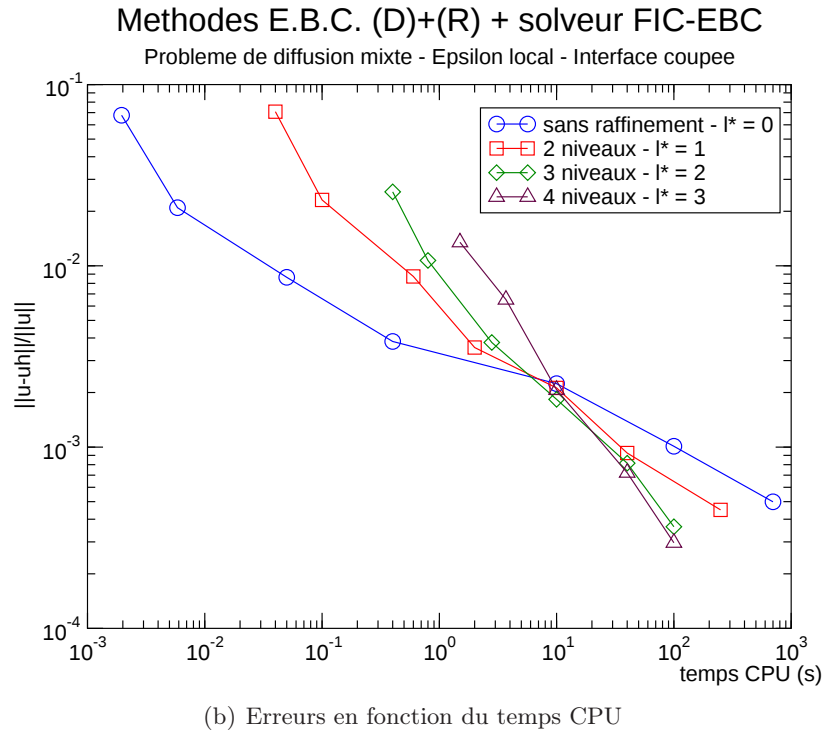
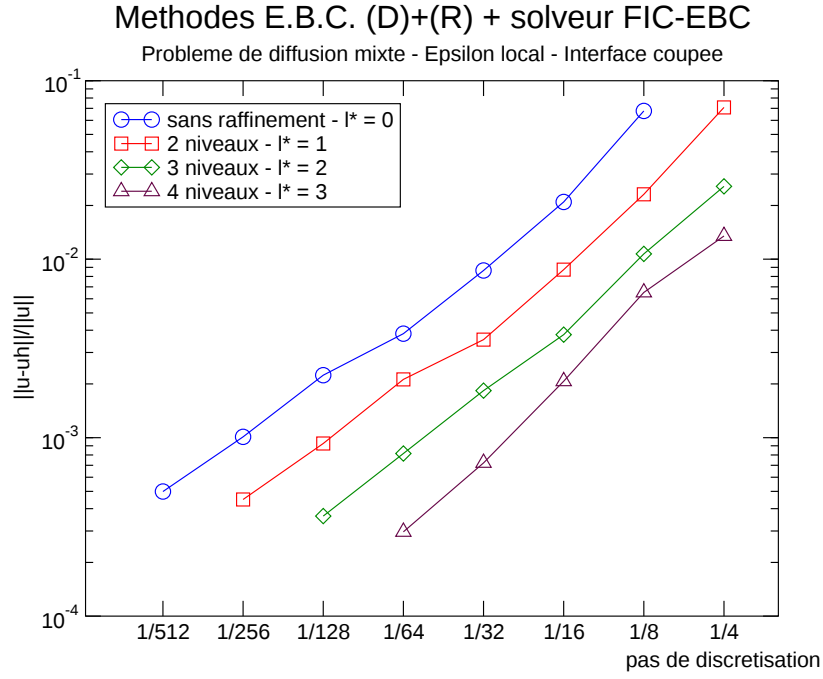
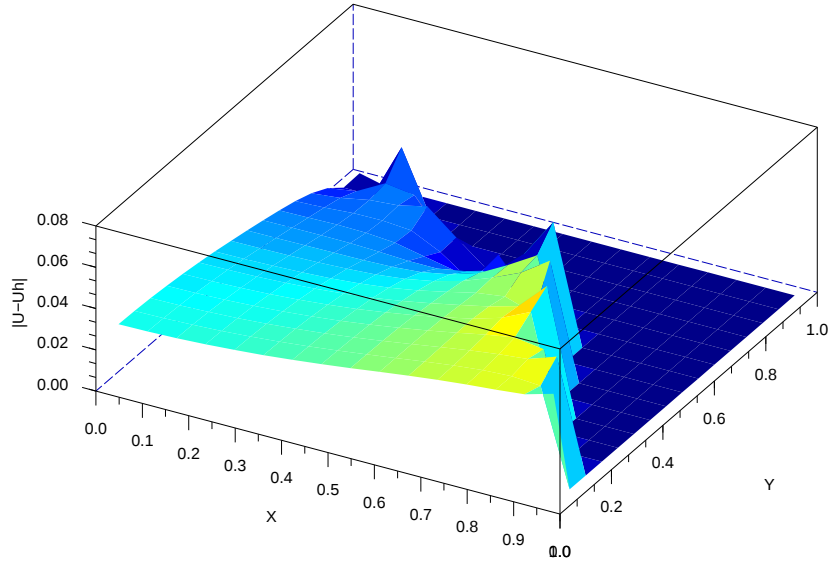
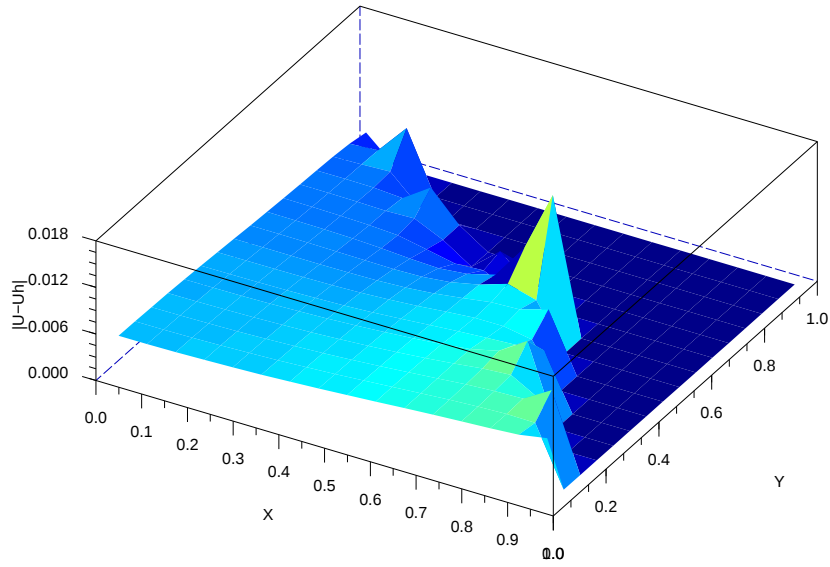


FIGURE 7 – Convergence de la norme L^2 relative de l'erreur de discrétisation pour le problème de diffusion avec conditions aux limites mixtes.



(a) Sans raffinement ($l^* = 0$), $\max_{K \subset \tilde{\Omega}_h} |\tilde{u}(x_K) - u_K| = 6.0 \cdot 10^{-2}$.



(b) Avec raffinement : $l^* = 2$, $\max_{K \subset \tilde{\Omega}_h} |\tilde{u}(x_K) - u_K| = 1.7 \cdot 10^{-2}$.

FIGURE 8 – Distribution de l'erreur sur un maillage initial 16×16 pour la méthode E.B.C avant et après combinaison avec le solveur FIC-EBC - Problème de diffusion mixte.

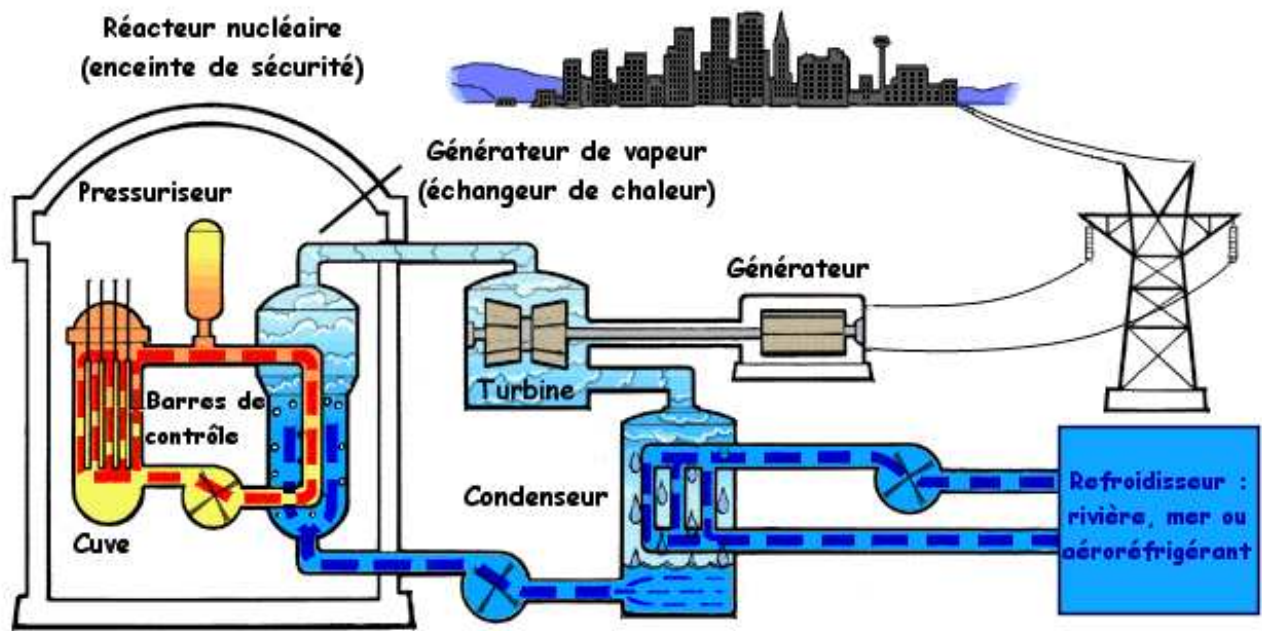


FIGURE 9 – Schéma de principe d'une centrale nucléaire à réacteur à eau pressurisée (REP).

alternateur produisant de l'électricité. A la sortie de la turbine, la vapeur se recondense en eau dans un condenseur refroidi par l'eau d'une rivière ou par un aéroréfrigérant. L'eau condensée réalimente le GV. C'est le **circuit secondaire**.

L'évaporateur du générateur de vapeur est un cylindre de 10 m de haut et 3 m de diamètre, il contient 2 500 à 3 000 tubes de 1 cm de diamètre. Le principe de fonctionnement du GV est représenté sur la figure 10 à l'aide d'une vue en coupe :

- L'eau du circuit primaire sous pression (155 bar, 320 ° C) et chauffée au contact du cœur du réacteur, pénètre par la partie basse du générateur de vapeur, appelée boîte à eau primaire. Elle circule ensuite à l'intérieur de milliers de tubes en forme de U renversé et échange sa chaleur avec le fluide secondaire qui circule à l'extérieur des tubes. L'enveloppe du circuit primaire constitue la deuxième barrière de confinement, la première étant la gaine métallique autour du combustible. L'étanchéité entre les deux circuits doit donc être totale, ce qui explique pourquoi ces tubes sont particulièrement surveillés. De nombreuses études concernant leur intégrité sont menées.
- L'eau du circuit secondaire (60 bar, 230 ° C), s'échauffe au contact du faisceau de tubes et se vaporise pour donner un mélange diphasique (eau-vapeur) à 280 ° C. Le taux de présence de la phase gazeuse atteint 80 % dans la partie haute du faisceau de tubes, zone des cintres appelée chignon.

Les simulations industrielles des générateurs de vapeur utilisent des techniques d'homogénéisation (opérateurs de moyenne, cf. Figure 11) et décrivent le fluide diphasique secondaire comme un mélange équivalent (liquide + vapeur) se déplaçant dans un milieu modélisé comme poreux. La porosité β est le rapport entre le volume du mélange et celui de la cellule d'homogénéisation.

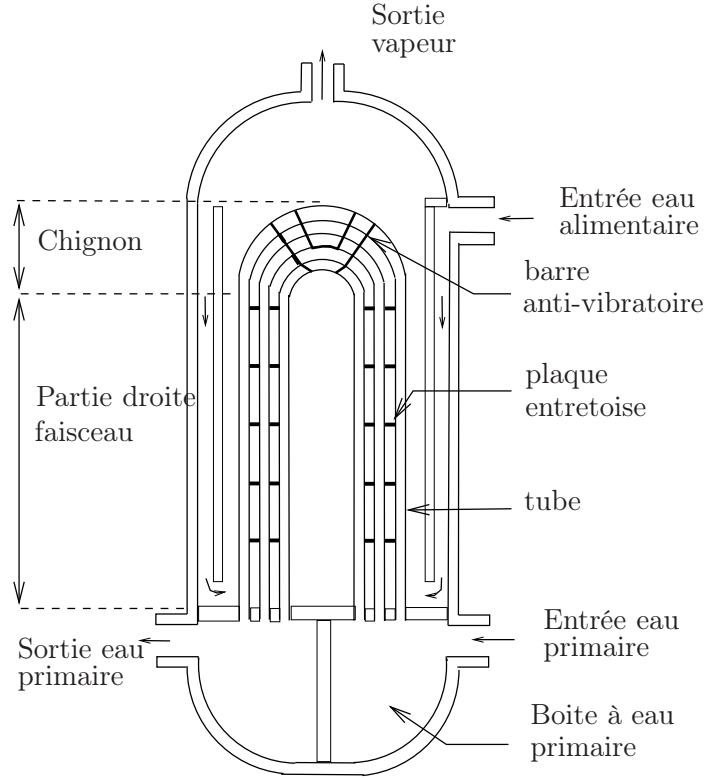


FIGURE 10 – Schéma de principe d'un GV.

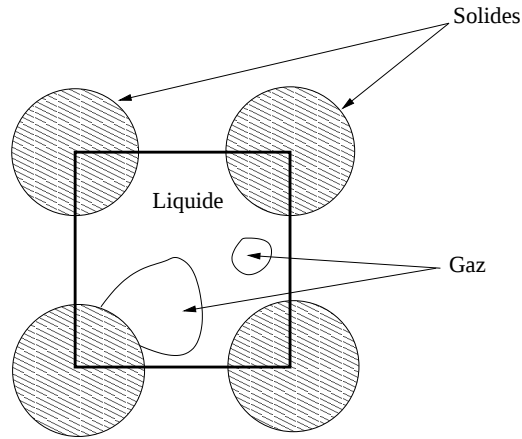


FIGURE 11 – Cellule d'homogénéisation.

2.2.2 Problème étudié

Nous nous intéressons au bilan d'énergie du mélange au sein d'un GV. La conservation de l'enthalpie spécifique H ($kJ.kg^{-1}$) du fluide secondaire est de la forme

$$\beta\rho\partial_t H + \beta\mathbf{G}.\nabla H - \text{div}(\beta\chi_T\nabla H) = \beta Q - \text{div}(\beta x(1-x)\rho\mathcal{L}\mathbf{V}_R), \quad (15)$$

où

- $\rho(H, P)$ est la densité ($kg.m^{-3}$) fonction de la pression P (Pa) et de H ,
- $\chi_T = a|\mathbf{G}|L$ est le coefficient de diffusion turbulente ($kg.m^{-1}.s^{-1}$) avec a le coefficient de Schlichting [31], $\mathbf{G}$ le flux de masse ($kg.m^{-2}.s^{-1}$), L une longueur typique de tourbillon et $|\cdot|$ la norme Euclidienne,
- $Q(H, P)$ est le terme source de chaleur ($W.m^{-3}$) donné par la résolution de l'équation du bilan d'énergie du fluide primaire,
- $\mathbf{V}_R$ est la vitesse relative (vitesse du gaz moins vitesse du liquide, $m.s^{-1}$),
- $x(H, P)$ est le titre statique ($\equiv \frac{H-H_{ls}}{\mathcal{L}}$) avec $H_{ls}(P)$ l'enthalpie du liquide à saturation ($KJ.kg^{-1}$) et $\mathcal{L}(P)$ la chaleur latente ($J.kg^{-1}$). Le terme $\beta x(1-x)\rho\mathcal{L}\mathbf{V}_R$ est appelé terme de dérive.

Cette équation peut être mise sous forme conservative en utilisant l'équation de conservation de la masse du mélange :

$$\beta\partial_t\rho + \text{div}(\beta\mathbf{G}) = 0. \quad (16)$$

On obtient alors une équation de convection-diffusion sous forme conservative équivalente à (15) :

$$\beta\partial_t(\rho H) + \text{div}(\beta\mathbf{G}H) - \text{div}(\beta\chi_T\nabla H) = \beta Q - \text{div}(\beta x(1-x)\rho\mathcal{L}\mathbf{V}_R). \quad (17)$$

Pour notre cas test, la pression P et la vitesse massique $\mathbf{G}$ sont des données du problème.

Les conditions aux limites pour la résolution de l'équation d'enthalpie (17) (ou Eq.(15)) sont :

- enthalpie spécifique du mélange sur la fenêtre d'entrée côté branche chaude (entrée fluide primaire) $H = 119,3 \text{ KJ.kg}^{-1}$ (condition de Dirichlet),
- enthalpie spécifique du mélange sur la fenêtre d'entrée côté branche froide (sortie fluide primaire) $H = 118,5 \text{ KJ.kg}^{-1}$ (condition de Dirichlet),
- flux d'enthalpie nul ailleurs que sur la fenêtre d'entrée $\nabla H \cdot \mathbf{n} = 0$ (condition de Neumann homogène) où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure unitaire.

Les conditions initiales sont données par un profil d'enthalpie linéaire de $118,5 \text{ KJ.kg}^{-1}$ sur la base du cylindre à 140 KJ.kg^{-1} à la sortie de l'échangeur.

2.2.3 Méthode E.B.C avec sauts immergés pour la résolution du bilan d'enthalpie

Nous présentons ici les résultats obtenus en appliquant la méthode E.B.C. « sans contrôle extérieur » pour la résolution en 3D du bilan d'énergie de CLOTAIRE, maquette de GV du CEA qui est un demi-cylindre de même hauteur qu'un GV réel mais contenant seulement 184 tubes. Nous intéressons plus précisément au régime stationnaire de l'écoulement dont le critère de stationnarité est de $10^{-5}s^{-1}$. Les conditions aux limites immergées sont mixtes (Dirichlet et Neumann). Le solveur E.B.C est couplé au code GENEPI du CEA [11, 10] pour la fourniture des relations de fermeture physique.

Dans une approche par domaine fictif, le domaine d'étude physique correspondant à la maquette Clo-taire est immergé dans un domaine fictif parallélépipédique de section rectangulaire (cf. figure 12). Une interface approchée coupée est choisie. A titre indicatif, le domaine externe représente environ 15% du domaine fictif : cela correspond au surcoût du calcul dû à la résolution sur le domaine fictif.

Ne disposant pas de solution analytique, nous considérons comme solution de référence le champ d'enthalpie calculé par la méthode aux éléments finis (EF)) Q_1 de GENEPI avec un maillage adapté à la géométrie du GV comportant 648 388 cellules. Les pas d'espace sont alors de l'ordre de 10^{-2} m qui est l'ordre de grandeur du diamètre d'un tube. Ce maillage non structuré n'est pas uniforme en

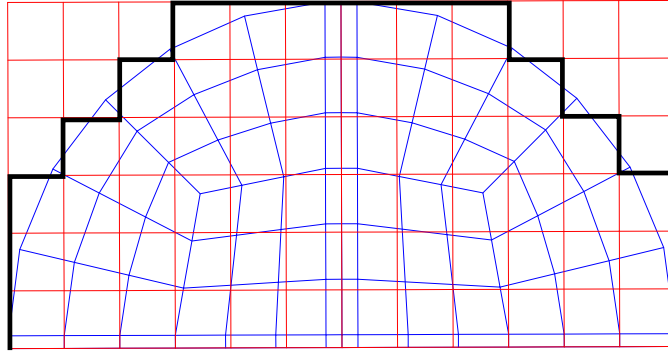


FIGURE 12 – Coupe d’un maillage cartésien du domaine fictif vis-à-vis d’un maillage adapté classique non structuré. Définition de l’interface immergée approchée

hauteur afin d’être adapté au domaine physique ainsi qu’aux structures intérieures comme les plaques de maintien des tubes en U.

La convergence en maillage de la méthode E.B.C est étudiée sur des maillages cartésiens du domaine fictif comportant de 7 200 (maillage grossier), 57 600 (maillage moyen) et 460 800 (maillage fin) cellules parallélépipédiques rectangles uniformes. Le pas d’espace est divisé par deux dans chaque direction d’un maillage sur l’autre : ces maillages sont donc emboîtés les uns dans les autres. Pour le maillage le plus grossier, cf. figure 12, le pas est d’environ $5 \cdot 10^{-2}$ m dans la section horizontale (plan (xy)) du domaine fictif et 10^{-3} m axialement (direction verticale). Pour le maillage le plus fin, c’est-à-dire celui à 460 800 cellules, les pas d’espace sont très proches de ceux de la simulation de référence. L’approximation de la fenêtre d’entrée contient 1, 2 ou 4 couches d’éléments pour les maillages à 7 200, 57 600 et 460 800 cellules respectivement. Le paramètre de pénalisation η est pris égal à 10^{-14} .

Ces premières simulations ont pour but de valider l’approche domaine fictif avec méthode E.B.C sur un cas industriel. L’algorithme de raffinement de maillage FIC-EBC n’a pas encore été testé.

Un schéma de Crank-Nicholson, d’ordre 2 en temps, est utilisé pour discrétiser temporellement l’équation d’enthalpie conservative (17). Les termes du membre de droite de cette équation, non linéaires en H , sont explicités. Dans le terme de dérivation temporelle, la densité ρ est également explicitée. Le schéma de Crank-Nicholson n’est donc appliqué que sur des termes linéaires. Les termes du second membre étant explicites, une condition de CFL reliant le pas de temps Δt au pas d’espace h assure la stabilité du schéma de discrétisation en temps.

2.2.4 Résultats

2.2.4.a Critères physiques

D’un point de vue physique, on peut apprécier les résultats des simulations en se basant sur les indicateurs suivants :

- la puissance échangée entre le fluide primaire et le fluide secondaire,
- la distribution des isovaleurs de l’enthalpie du mélange pour des sections situées aux élévations de 0,05 m (fenêtre d’entrée), 5 m (à mi-hauteur de la maquette, dans le faisceau de tubes) et 8 m (plénium, au dessus des tubes),
- le profil de l’enthalpie le long de lignes verticales dont les positions correspondent à celles de

petits, moyens et grands cintres (tubes en U renversé dont le rayon des cintres est plus ou moins important au niveau du “chignon”), voir figure 13.

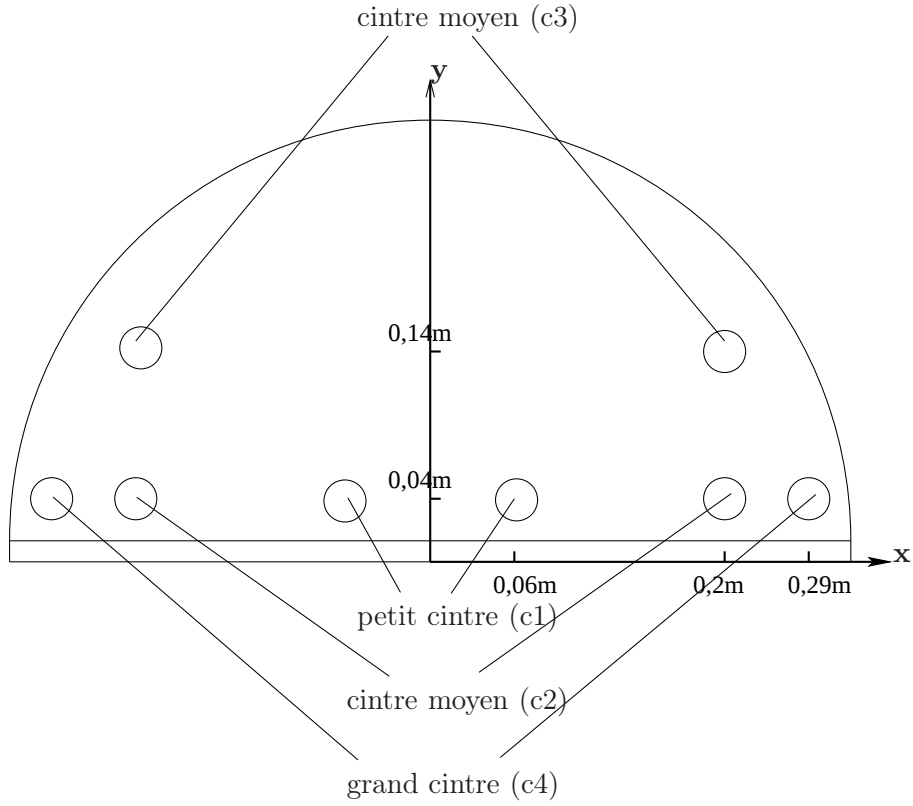


FIGURE 13 – Définition des petits, moyens et grands cintres à l’aide d’une coupe horizontale de la maquette.

2.2.4.b Précision, convergence et temps de calcul

Le tableau 2 permet de constater que la solution obtenue avec la méthode E.B.C converge vers la solution approchée de référence. L’ordre de convergence en $\mathcal{O}(h)$ de la méthode E.B.C est retrouvé. Cependant, on voit que l’erreur relative va atteindre un plateau, ceci est dû au fait que la solution de référence n’est qu’une approximation de la solution analytique.

	Maillage grossier	Maillage moyen	Maillage fin
Erreur relative (norme L^2)	4,11953 10^{-3}	2,15701 10^{-3}	1,39502 10^{-3}

TABLE 2 – Erreurs relatives discrètes en norme L^2 sur l’ensemble du domaine physique.

La figure 14 présente de façon détaillée l’erreur en norme L^2 évaluée le long des tubes indiqués sur la figure 13. Ici également, on peut apprécier la convergence au premier ordre de la méthode de domaine fictif E.B.C. Dans tous les cas, l’erreur relative est inférieure à 5.10^{-3} . Ce niveau de précision est tout à fait correct pour la réalisation de simulations industrielles d’un composant nucléaire, pour lesquelles les incertitudes liées aux modélisations physiques sont bien plus grandes que celles liées aux résolutions

numériques.

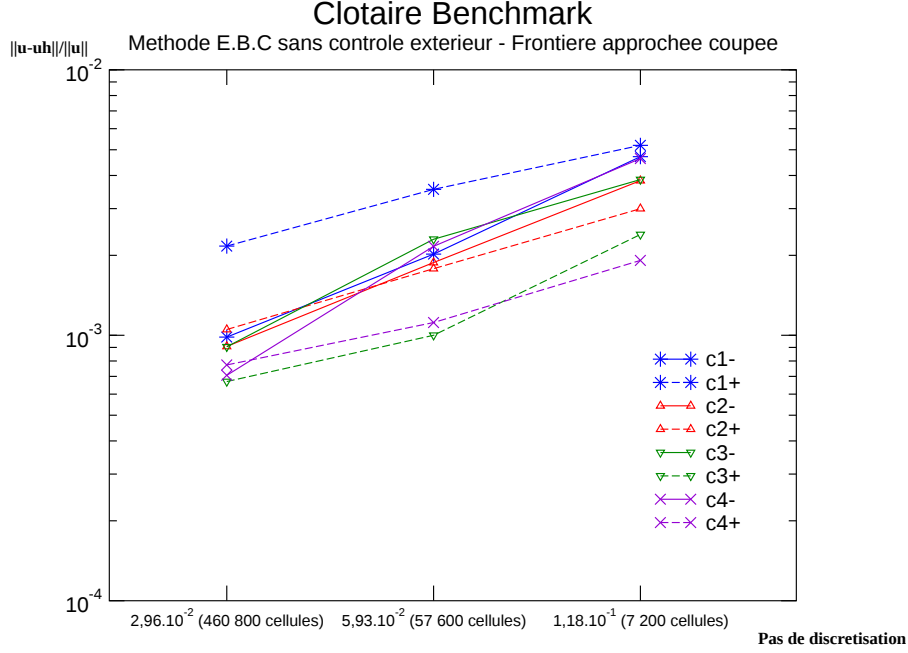


FIGURE 14 – Erreur relative de l’enthalpie spécifique en norme L^2 discrète en fonction du pas de maillage. La notation ‘+’ ou ‘-’ est relative au signe de la coordonnée x .

Les profils de l’enthalpie suivant le cintre moyen c3 et le grand cintre c4 font l’objet de la figure 15. Les solutions obtenues avec l’ensemble des maillages cartésiens sont comparées à la solution de référence. La notation ‘+’ ou ‘-’ sur ces figures est relative au signe de la coordonnée de x . Quand x est positif on se situe du côté branche chaude et quand x est négatif, on se situe du côté branche froide. Les profils de l’enthalpie obtenus avec la méthode E.B.C sans contrôle extérieur sont très satisfaisants. En effet, les profils obtenus sont très proches des profils de référence, même pour le cintre c4 proche de la frontière immergée. On retrouve bien ici que la méthode de domaine fictif converge en maillage car plus le maillage du domaine fictif est fin, plus la solution obtenue est proche (voire confondue) avec la solution de référence.

Des isovaleurs de H en différentes hauteurs de la maquette (cf. section 2.2.4.a) sont portées sur les figures 16 à 18. Ces figures présentent en parallèle les isovaleurs obtenues pour le cas de référence adapté (en haut) et pour la méthode de domaine fictif sur le maillage à 460 800 cellules (en bas). Une restriction de la solution obtenue par la méthode E.B.C. sur le domaine physique est effectuée de sorte à pouvoir comparer plus facilement la solution approchée de la solution de référence. Les résultats permettent de constater des performances de la méthode de domaine fictif E.B.C. mise en œuvre. En particulier, les lignes d’isovaleurs sont bien perpendiculaires à la surface immergée. Aux vues des échelles de valeurs, les différences entre la solution fictive et la solution de référence sont de très faible amplitude et semblent principalement dues à la différence de taille du découpage spatial dans certaines zones de l’écoulement (notamment au niveau du ru d’eau au centre des tubes en U renversé, voir figure 12 et figure 16). Toutefois on remarque le manque de précision de la solution près de la frontière immergée qui semble conduire à une sur-évaluation de la valeur de l’enthalpie en haut du plénum en branche froide (cf. figure 18). Ceci souligne l’intérêt et la nécessité de combiner des méthodes de raffinements locaux de maillage aux méthodes de domaine fictif. Les résultats obtenus

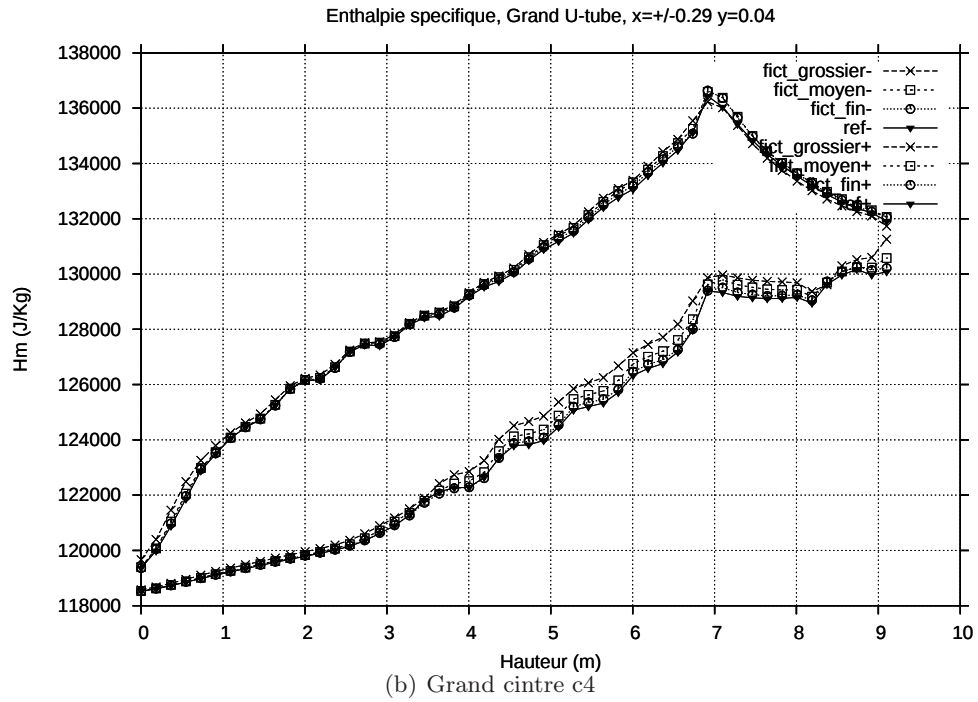
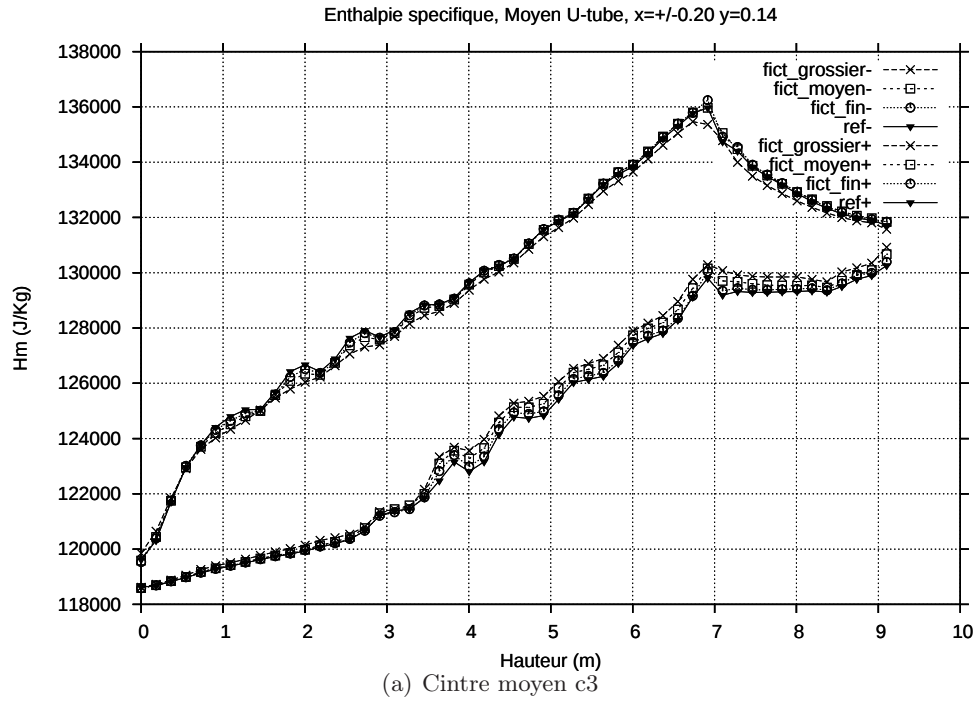


FIGURE 15 – Profils de l'enthalpie spécifique : maillages cartésiens à 7 200 (fict_grossier), 57 600 (fict_moyen) et 460 800 (fict_fin) cellules et cas de référence (ref). La notation '+' ou '-' est relative au signe de la coordonnée x

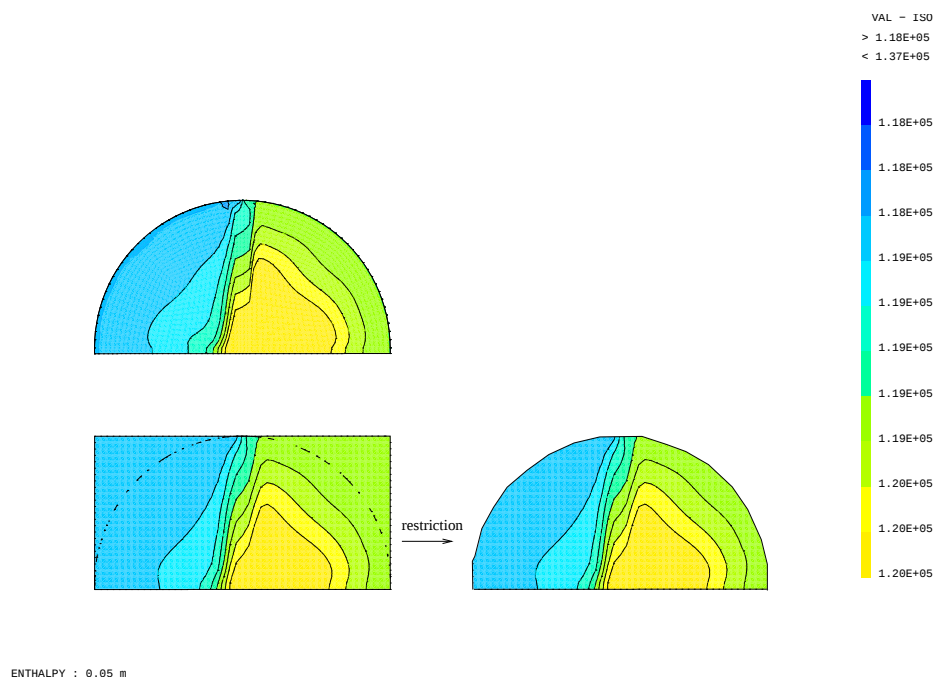


FIGURE 16 – Isovaleurs de l’enthalpie sur une section située à une hauteur de 0,05 m (fenêtre d’entrée) : maillage de référence adapté (en haut) et maillage cartésien à 460 800 cellules (en bas).

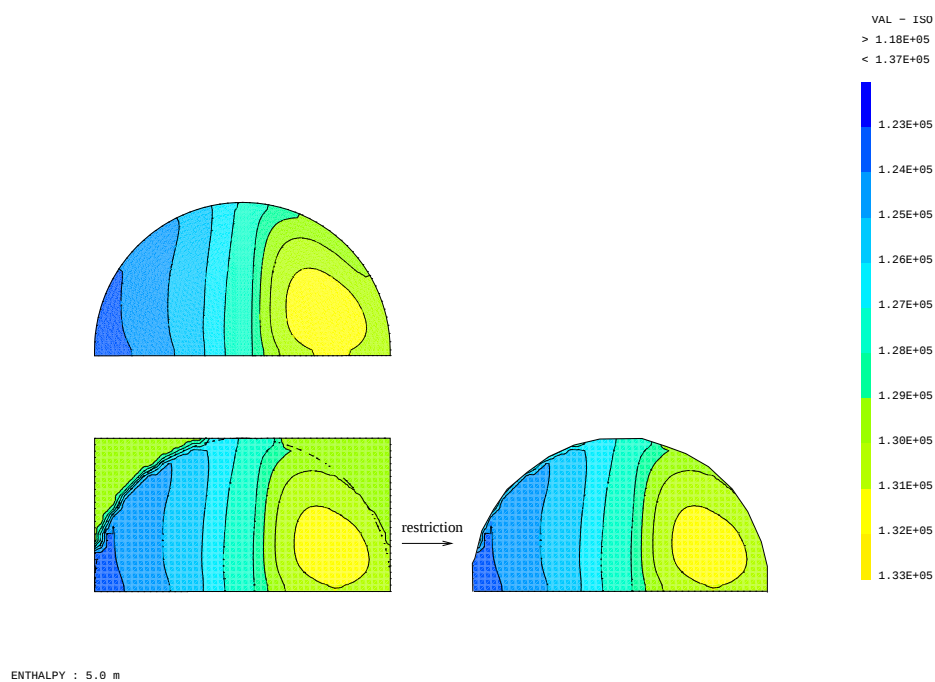


FIGURE 17 – Isovaleurs de l’enthalpie sur une section située à une hauteur de 5 m (mi-hauteur) : maillage de référence adapté (en haut) et maillage cartésien à 460 800 cellules (en bas).

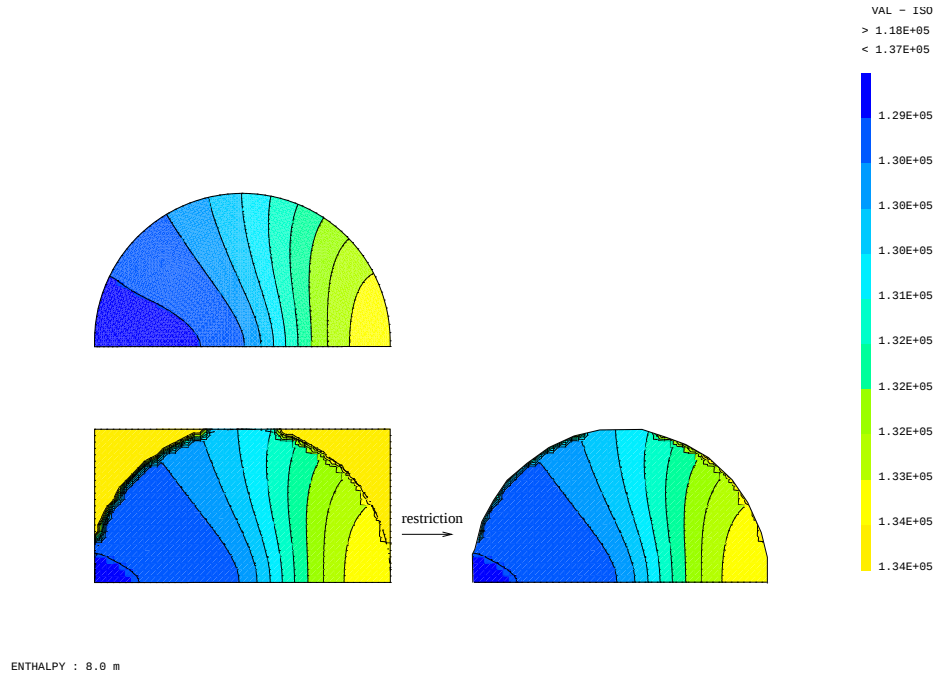


FIGURE 18 – Isovaleurs de l’enthalpie sur une section située à une hauteur de 8 m (plénum) : maillage de référence adapté (en haut) et maillage cartésien à 460 800 cellules (en bas).

étant très satisfaisants, le couplage de l’algorithme FIC-EBC avec le code de calcul EF GENEPI est en cours d’implémentation.

Le tableau 3 permet d’apprécier la grande précision de l’estimation de la puissance échangée entre le fluide primaire et le fluide secondaire avec la méthode E.B.C. Les erreurs relatives sont en effet bien inférieures au pourcent.

	Maillage adapté de réf.	Maillage grossier	Maillage moyen	Maillage fin
Puissance échangée (MW)	1,48613	1,48913	1,48725	1,48623
Erreur relative (en %)	-	0,202	0,075	0,007

TABLE 3 – Puissance échangée entre le fluide primaire et le fluide secondaire pour les calculs avec la méthode E.B.C.

Comme indiqué précédemment, le but de ces simulations était de juger de la précision de la méthode E.B.C. avec sauts immergés sur un cas test industriel afin d’envisager le futur développement d’un code de calcul bâti complètement autour du solveur E.B.C. Les aspects temps de calcul sont donc ici secondaires car le logiciel GENEPI, bâti sur un noyau EF non structurés et utilisé pour fournir les lois de fermeture du problème, ne tire pas pleinement profit du solveur E.B.C. Les informations relatives aux temps de calculs sont reportées dans le tableau 4. A titre de comparaison, les mêmes informations sont données pour le calcul de la solution de référence sur le maillage adapté à 648 388 cellules. Le nombre de pas de temps du calcul de référence est beaucoup plus important que celui du maillage fictif fin car le maillage de référence possède d’importantes hétérogénéités entre les dimensions des cellules du maillage de façon à être le mieux adapté possible aux obstacles singuliers. Suivant la condition CFL,

le pas de temps est plus petit dans le cas adapté. Malgré le surcoût lié au traitement des cellules situées hors du domaine physique (environ 15%), le temps CPU de la méthode E.B.C est très intéressant en vue d’une application industrielle. Rappelons de plus que du temps CPU est perdu à chaque pas de temps lors du couplage GENEPI/solveur E.B.C fournissant les coefficients de l’équation. Ce surcoût sera caduque lorsque l’on disposera d’un code de calcul industriel basé sur le solveur E.B.C. De plus, comme vu dans les résultats académiques, la combinaison de la méthode E.B.C avec l’algorithme FIC-EBC devrait également améliorer le temps de calcul.

	Maillage adapté de référence	Maillage fictif grossier	Maillage fictif moyen	Maillage fictif fin
Nb pas de temps	4500	441	1080	2719
Durée moyenne de calcul (en s) sur un pas de temps	37,60	0,3412	4,591	23,99

TABLE 4 – Temps CPU et mémoire des calculs pour la méthode E.B.C..

Tous les résultats obtenus concluent à la précision et à la performance de la méthode E.B.C sans contrôle extérieur mise en œuvre dans le cas industriel d’une maquette de générateur de vapeur. “L’outil” domaine fictif à présent disponible est un premier pas vers la simulation plus précise des interactions fluide/structure au niveau des obstacles (tubes du faisceau) ou des surfaces libres à l’extérieur de l’enveloppe de l’évaporateur... L’équation bilan de quantité de mouvement doit alors être rajoutée aux équations résolues.

Conclusion

Les approches de type domaine fictif ont un avenir prometteur dans le milieu industriel car elles présentent des rapports précision sur temps de calcul avantageux. La méthode E.B.C. avec sauts immergés et sans contrôle extérieur présentée dans cet article se classe parmi les méthodes à fort potentiel car elle consiste à n’utiliser qu’un unique maillage cartésien du domaine fictif de calcul. Les conditions aux limites immergées sont alors imposées via des conditions de sauts de flux et de solution portées par une interface immergée approchée définie par le maillage. L’algorithme de raffinement local adaptatif de maillage FIC-EBC combiné avec cette méthode permet d’améliorer la solution près de la frontière immergée pour un coût de calcul supplémentaire faible et ainsi obtenir des solutions précises sur un maillage initial relativement grossier. Outre les résultats présentés ici sur le cas industriel d’une maquette de générateur de vapeur d’une centrale nucléaire, les perspectives d’application de la méthode FIC-EBC sont nombreuses, notamment la simulation par domaine fictif de plusieurs domaines physiques ayant des formes complexes et interagissant entre eux.

Le cas de frontières mobiles et/ou déformables ne semble poser aucun problème de modélisation supplémentaire. Ce type de problème reste cependant à être testé, notamment dans le cas de frontières déformables où il faut alors combiner l’approche domaine fictif à des approches de suivi d’interface. Il s’avère ensuite naturel d’étendre la méthode E.B.C. aux équations de Navier-Stokes. Afin de pouvoir facilement combiner cette méthode de domaine fictif avec des algorithmes de raffinement de maillage multi-niveaux, une discrétisation des équations avec des inconnues colocalisées serait souhaitable. Récemment, de nombreuses approches ont été proposées dans ce cadre, notamment en volumes finis. L’utilisation de telles approches dans le cadre domaine fictif semble être très prometteuse. La modélisation complète de phénomènes physiques complexes (interactions fluide/structure, écoulements

diphases...) par la méthode de domaine fictif E.B.C. introduite ici serait alors à portée de main.

Références

- [1] Ph. ANGOT : A model of fracture for elliptic problems with flux and solution jumps. *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser I Math.*, 337 (6) 425-430, 2003.
- [2] Ph. ANGOT : A unified fictitious domain model for general embedded boundary conditions. *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. Math.*, Vol. 341(11), pp 683-688, 2005.
- [3] Ph. ANGOT, J.P. CALTAGIRONE et K. KHADRA : Une méthode adaptative de raffinement local : la Correction du Flux à l'Interface. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 315 (1), pp. 739-745, 1992.
- [4] S. BERTOLUZZA, M. ISMAIL et B. MAURY : The FBM method : Semi-discrete scheme and some numerical experiments. *Lecture Notes in Comp. Sc. and Eng.*, 2004.
- [5] A. DÜSTER, J. PARVIZIAN, Z. YANG et E. RANK : The finite cell method for three-dimensional problems of solid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(45-48):3768 – 3782, 2008.
- [6] R. EYMARD, Th. GALLOUËT et R. HERBIN : *Finite Volume methods*. P.G. Ciarlet, J.-L. Lions (Eds), Handbook of Numerical Analysis, vol. VII, North-Holland, pp.713-1020, 2000.
- [7] A.L. FOGELSON et J.P. KEENER : Immersed interface methods for Neumann and related problems in two and three dimensions. *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol 22, pp. 1630-1684, 2000.
- [8] R. GLOWINSKI, T.-W. PAN, T.I. HESLA et D.D. JOSEPH : A distributed lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows. *Int. J. of Multiphase Flow* 25, pp. 755-794, 1999.
- [9] R. GLOWINSKI, T.-W. PAN et J. PÉRIAUX : A fictitious domain method for Dirichlet problem and applications. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, 111 (3-4) : 283-303, 1994.
- [10] M. GRANDOTTO, M. BERNARD, J.P. GAILLARD, J.L. CHEISSOUX et E. DE LANGRE : A 3D finite element analysis for solving two phase flow problems in PWR steam generators. *In 7th International Conference on Finite Element Methods in Flow Problems, Huntsville, Alabama, USA*, April 1989.
- [11] M. GRANDOTTO et P. OBRY : Calculs des écoulements diphasiques dans les échangeurs par une méthode aux éléments finis. *Revue européenne des éléments finis. Volume 5, n°1/1996, pages 53 à 74*, 1996.
- [12] P.W. HEMKER, W. HOFFMANN et M.H. van RAALTE : Discontinuous Galerkin discretization with embedded boundary conditions. *Comput. Meth. Appl. Math.*, Vol. 3(1), pp. 135-158, 2003.
- [13] H. JOHANSEN et Ph. COLELLA : A Cartesian grid embedded boundary method for Poisson's Equation on irregular domains. *J. Comput. Phys.*, 147 :60-85, 1998.
- [14] P. JOLY et L. RHAOUTI : Fictitious domains, H(div) finite elements and Neumann condition : the inf-sup condition. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I Math.*, Vol. 328(12), pp. 1225-1230, 1999.
- [15] K. KHADRA, Ph. ANGOT, S. PARNEIX et J.-P. CALTAGIRONE : Fictitious domain approach for numerical modelling of Navier-Stokes equations. *Int. J. Numer. Meth. in Fluids*, Vol. 34(8) : 651-684, 2000.
- [16] D. LACANETTE, S. VINCENT, A. SARTHOU, Ph. MALAURENT et J.-P. CALTAGIRONE : An Eulerian/Lagrangian method for the numerical simulation of incompressible convection flows interacting with complex obstacles : Application to the natural convection in the lascaux cave. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52(11-12):2528 – 2542, 2009.

- [17] P. LE TALLEC : Domain decomposition methods in computational mechanics. *Computational Mechanics advances, Vol. 1, North Holland, Elsevier Science, pp. 121-220*, 1994.
- [18] R.J. LEVEQUE et Z. LI : The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources. *SIAM J. Numer. Anal.*, 31 :1019-1044, 1994.
- [19] Z. LI : An overview of the immersed interface method and its applications. *Taiwan, J. Math.*, 7 :1-49, 2003.
- [20] G.I. MARCHUK : *Methods of Numerical Mathematics*. Application of Math. 2, Springer-Verlag New York (1st ed. 1975), 1982.
- [21] B. MAURY : A Fat Boundary Method for the Poisson problem in a domain with holes. *SIAM, J. of Sci. Comput.*, 16(3) :319-339, 2001.
- [22] C.S. PESKIN : Flow patterns around heart valves : A numerical method. *J. Comput. Phys.*, Volume 10, Issue 2, Pages 252-271, 1972.
- [23] C.S. PESKIN : The immersed boundary method. *Acta Numerica*, Vol 11, pp 479-517, 2002.
- [24] S. Del PINO et O. PIRONNEAU : A fictitious domain based on general PDE's solvers. *Proc. ECCOMAS 2001, Sept Swansea. K. Morgan ed. Wiley.*, 2002.
- [25] I. RAMIÈRE : *Méthodes de domaine fictif pour des problèmes elliptiques avec conditions aux limites générales en vue de la simulation numérique d'écoulements diphasiques*. Thèse de doctorat, Université de Provence, Aix-Marseille I, 2006.
- [26] I. RAMIÈRE : Convergence analysis of the Q_1 -finite element method for elliptic problems with non-boundary fitted meshes. *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 75 (9), pp. 1007-1052, 2008.
- [27] I. RAMIÈRE, Ph. ANGOT et M. BELLIARD : A fictitious domain approach with spread interface for elliptic problems with general boundary conditions. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, vol. 196 (4-6), pp.766-781, 2007.
- [28] I. RAMIÈRE, Ph. ANGOT et M. BELLIARD : A general fictitious domain method with immersed jumps and multilevel nested structured meshes. *Journal of Comp. Physics*, vol. 225, pp. 1347-1387, 2007.
- [29] L.A. RUKHOVETS : A remark on the method of fictive domains. *Differential Equations*, 3,4 (in Russian), 1967.
- [30] V.K. SAUL'EV : On the solution of some boundary value problems on high performance computers by fictitious domain method. *Siberian Math. Journal*, 4(4) :912-925 (in Russian), 1963.
- [31] H. SCHLICHTING : *Boundary Layer Theory*. Mac Graw Hill, 1968.
- [32] P. SCHWARTZ, M. BARAD, Ph. COLELLA et T. LIGOCKI : A Cartesian grid embedded boundary method for the heat equation and Poisson's equation in three dimensions. *J. Comput. Phys.*, 211 :531-550, 2006.