

**ÉQUATIONS DE MAXWELL EN GÉOMÉTRIE
AXISYMÉTRIQUE: COUPLAGE-ÉLÉMENTS FINIS
H(rot) EN VOLUME ET H(div) EN SURFACE. LE
CODE FUMEL.**

Patrick Lacoste, Sébastien Cambon

► **To cite this version:**

Patrick Lacoste, Sébastien Cambon. ÉQUATIONS DE MAXWELL EN GÉOMÉTRIE AXISYMÉTRIQUE: COUPLAGE-ÉLÉMENTS FINIS H(rot) EN VOLUME ET H(div) EN SURFACE. LE CODE FUMEL.. 2011. cea-00758786

HAL Id: cea-00758786

<https://hal-cea.archives-ouvertes.fr/cea-00758786>

Submitted on 29 Nov 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**ÉQUATIONS DE MAXWELL EN GÉOMÉTRIE AXISYMÉTRIQUE: COUPLAGE
ÉLÉMENTS FINIS $H(rot)$ EN VOLUME ET $H(div)$ EN SURFACE.
LE CODE FUMEL.**

SÉBASTIEN CAMBON ET PATRICK LACOSTE ¹

Résumé. On présente ici une nouvelle formulation des équations de Maxwell en volume et équations intégrales couplées, en régime harmonique, approchées par éléments finis, pour des domaines à symétrie de révolution (*axisymétrie*).

En utilisant la décomposition en série de Fourier, on définit des espaces de Sobolev avec poids comme espace des solutions. On propose des éléments finis que l'on bâtit à partir des éléments finis Lagrange et d'éléments finis mixtes, aussi bien pour l'approximation dans un plan méridien de l'ouvert que pour l'équation intégrale linéaire. En conséquence il n'y a pas de nécessité d'introduire des fonctions spéciales.

10 février 2011.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	2
2. Les équations de Maxwell dans un domaine borné	3
3. Les équations de Maxwell en coordonnées cylindriques	4
3.1. Passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques	4
3.2. Décomposition en séries de Fourier du champ électromagnétique en dimension 3	5
4. Définitions de l'espace des solutions	7
4.1. Définitions et rappels	7
4.2. Étude d'un espace de Sobolev à poids	8
4.3. Caractérisation des fonctions C^2 de $H(rot)$ en géométrie axisymétrique	9
4.4. Formule de Green	10
5. Formulation des équations de Maxwell en volume	10
6. Formulation intégrale des équations de Maxwell	11
6.1. Le problème de la diffraction dans \mathbb{R}^3	11
6.2. Représentation intégrale des solutions	11
6.3. Une équation intégrale et une formulation variationnelle du problème extérieur	14
7. Formulation couplée volumique et surfacique des équations de Maxwell	18
7.1. Formulation couplée volumique et surfacique des équations de Maxwell dans \mathbb{R}^3 [19] [26]	18
7.2. Divers résultats en géométrie axisymétrique des équations de Maxwell	19
7.3. Décomposition en séries de Fourier des courants surfaciques	24
7.4. Formulation axisymétrique couplée volumique et surfacique des équations de Maxwell	25
8. Les éléments finis $H(rot)$ de Maxwell-Fourier [24]	32
8.1. Modes de rang autres que zéro	33

¹ en collaboration avec P. Bonnemason, F. Collino (Consultant Researcher), S. Etienne (stage), Y. Guevel (CS).

8.2. Modes de rang zéro	33
8.3. Construction des éléments finis pour le problème de Maxwell-Fourier	33
8.4. Utilisation des éléments finis de Maxwell-Fourier à 6 d.d.l.	36
9. Éléments finis de bord $H(\text{div})$	37
9.1. Approximation de l'abscisse curviligne	38
9.2. Construction d'éléments finis de Maxwell-Fourier de bord à 3 d.d.l.	38
10. Discrétisation de la formulation couplée des équations de Maxwell	45
10.1. Ecriture du système linéaire couplée	45
10.2. Ecriture des matrices élémentaires	46
10.3. Intégration numérique des termes matriciels élémentaires	49
11. Cas test et comparaisons	55
11.1. Étude des valeurs propres de l'opérateur $efie$ sur la sphère conductrice.	55
11.2. Calcul de la surface équivalente radar, la SER.	57
11.3. Diffraction de la sphère conductrice.	59
12. Aperçus numériques.	61
12.1. Calcul de valeurs propres: validité des matrices de la discrétisation.	61
12.2. Diffraction d'une sphère conductrice et série de Mie.	62
12.3. Diffraction d'une sphère diélectrique et série de Mie.	62
13. Conclusions	63
Bibliographie	64

1. INTRODUCTION

Il existe plusieurs manières d'aborder le problème de la diffraction d'ondes électromagnétiques par des objets axisymétriques inhomogènes. Depuis les travaux pionniers de Morgan et Mei [30], repris, développés et améliorés dans les codes SHF [2], [35], jusqu'à ceux de Dunn & *al.* [14], de nombreuses formules ont été proposées. Il s'agit dans toutes ces méthodes de traduire deux formulations variationnelles: l'une portant sur les inconnues de type champ, intérieur au domaine diffracté, l'autre portant sur la frontière de couplage, simulant l'espace infini homogène et à inconnues de type courants électrique et magnétique. Toutes ces formulations ont néanmoins l'inconvénient de ne considérer que des éléments finis de type lagrange (ou nodaux).

On a voulu dans ce travail revenir à une formulation plus naturelle, au sens où les inconnues du problème coïncident avec la nature mathématique (physique) des opérateurs de Maxwell. Les inconnues sont de type champ et traces tangentielles de champ, de telle sorte que cela exige une prise en compte du champ complet: le champ électrique à trois composantes et des courants surfaciques. Le résultat en est la proposition d'éléments finis mixtes de type Nédélec, ou Raviart-Thomas [34], [31], avec la possibilité de réaliser des montées en ordre. Le but est bien sûr de traiter des géométries qui nécessitent l'utilisation de mailles triangles dont les tailles des côtés deviennent petites, à cause:

- des matériaux à faible épaisseurs et des contrastes d'indices électriques,
- de l'utilisation de la gamme des hautes fréquences.

Ce texte expose donc la formulation mathématique du problème couplé, non borné, des équations de Maxwell en volume et des équations de Maxwell en surface, pour résoudre le problème de la diffraction d'ondes planes par un objet borné. Il se place dans la géométrie particulière des objets à symétrie de révolution pour laquelle de nombreux notations et calculs sont exposés. La décomposition en séries de Fourier ramène le problème global, après troncature, à une somme finie de problèmes posés dans le plan \mathbb{R}_{rz} . Ce texte utilise les travaux antérieurs de Gay et Haugazeau [18], [19], [20], [24], la thèse [23] et pour de nombreux points, en particulier certains aspects de l'intégration numérique, la thèse [15].

2. LES ÉQUATIONS DE MAXWELL DANS UN DOMAINE BORNÉ

On considère les équations de Maxwell dans un domaine ouvert borné O de \mathbb{R}^3 , possédant une frontière régulière ∂O et supposé tout au long du texte, *axisymétrique*, i.e. avec une *symétrie de révolution*. Soit ε et μ , des constantes positives, qui sont les propriétés électriques du domaine O . On suppose que le problème a une dépendance harmonique du temps comme $\exp(-i\omega t)$. Si $(x, y, z) \in O$ relativement à une base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, on écrit indifféremment le champ électrique complexe $E = (E_x, E_y, E_z)$, ou $E(x, y, z)$, et le flux magnétique $B = (B_x, B_y, B_z)$, ou $B(x, y, z)$. On utilise l'opérateur *rotationnel*, noté *rot* aussi bien dans \mathbb{R}^2 que dans \mathbb{R}^3 et définie dans \mathbb{R}^3 par: $rotE = (\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y})$.

Le problème est alors de déterminer le champ électromagnétique (E, B) solution de:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\omega^2 \varepsilon E + rot(\mu^{-1} rot E) = i\omega J \text{ dans } O \\ -i\omega B + rot E = 0 \text{ dans } O \\ div B = 0 \text{ dans } O \\ div \varepsilon E = 0 \text{ dans } O \\ E \wedge \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial O \end{array} \right. \quad (1)$$

où \vec{n} est le vecteur unitaire sortant à ∂O et où la densité de courant J est donné dans $(L^2(O))^3$ - espaces des fonctions de carré sommable - et vérifie les conditions de compatibilité $div J = 0$. Si on utilise l'espace fonctionnel classique,

$$\begin{aligned} H(rot, O) &= \{E, \int_O |E|^2 dx dy dz < \infty; \int_O |rot E|^2 dx dy dz < \infty\}, \\ H_0(rot, O) &= \{E \in H(rot, O), E \wedge \vec{n}|_{\partial O} = 0\}, \\ H(div^0, O) &= \{B, \int_O |B|^2 dx dy dz < \infty; div B = 0\}. \end{aligned}$$

Il est bien connu que le problème (1) a une et une seule solution $(E, B) \in H_0(rot, O) \times H(div^0, O)$, dès lors que $\varepsilon \omega^2$ n'est pas une valeur propre de l'opérateur $rot \mu^{-1} rot$ du problème intérieur dans O (voir [13]). On s'intéresse à la discrétisation et à l'approximation de ce système d'équations pour tirer avantage du cas particulier de la géométrie axisymétrique. Pour cela on prend comme problème modèle: *pour J , fonction donnée de $(L^2(O))^3$, trouver $E \in H_0(rot, O)$, solution de*

$$\left\{ \begin{array}{l} -\omega^2 \varepsilon E + rot(\mu^{-1} rot E) = i\omega J \text{ in } O \\ E \wedge \vec{n} = 0 \text{ on } \partial O \end{array} \right. \quad (2)$$

pour cela, une formulation variationnelle est: *trouver $E \in H_0(rot, O)$, solution de*

$$-\omega^2 \int_O \varepsilon E \cdot F dx dy dz + \int_O \mu^{-1} rot E \cdot rot F dx dy dz = i\omega \int_O J \cdot F dx dy dz, \quad (3)$$

$\forall F \in H_0(rot, O)$.

3. LES ÉQUATIONS DE MAXWELL EN COORDONNÉES CYLINDRIQUES

3.1. Passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques

Soit S_1 le cercle unité dans \mathbb{R}^2 : $T_1 = [0, 2\pi[\rightarrow S_1$ défini par $\theta \rightarrow (\cos \theta, \sin \theta)$.

On définit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ comme le méridien de O , et appelé axisymétrique, (c'est-à-dire une section de \mathbb{R}_+^2 engendrant O) et on pose: $O' = \Omega \times T_1$ et Γ tel que $\partial O' = \Gamma \times T_1 \cup (\Omega \times \{0\}) \cup (\Omega \times \{2\pi\})$, comme indiqué en figure 1.

A chaque champ E défini dans O , on peut associer une fonction

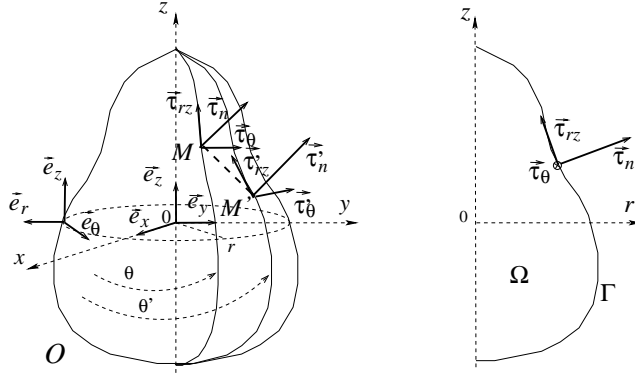


FIGURE 1

$u(r, \theta, z) = \begin{bmatrix} u_r(r, \theta, z) \\ u_\theta(r, \theta, z) \\ u_z(r, \theta, z) \end{bmatrix}$ défini dans O' relativement à une base orthonormalisée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, de telle sorte que:

$$\begin{bmatrix} E_x(r, \theta, z) \\ E_y(r, \theta, z) \\ E_z(r, \theta, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r(r, \theta, z) \\ u_\theta(r, \theta, z) \\ u_z(r, \theta, z) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

On rappelle que cela entraîne la relation suivante:

$$\text{rot} E = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{rot}_r u,$$

si rot_r désigne l'opérateur rotationnel en coordonnées cylindriques:

$$\text{rot}_r \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (r u_\theta)}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Alors si on se donne des seconds membres $j(r, \theta, z) = \begin{bmatrix} j_r(r, \theta, z) \\ j_\theta(r, \theta, z) \\ j_z(r, \theta, z) \end{bmatrix}$, correspondant à J par équation (4), le problème modèle devient le suivant:

pour j , vecteur donné dans O' , trouver u solution de

$$\begin{cases} -\omega^2 \varepsilon \mu u_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} = i\omega \mu j_r \\ -\omega^2 \varepsilon \mu u_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial z} - \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = i\omega \mu j_\theta \\ -\omega^2 \varepsilon \mu u_z + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} = i\omega \mu j_z \end{cases} \quad (6)$$

et vérifiant une condition de Dirichlet homogène sur $\Gamma \times T_1$ et les conditions périodiques $u|_{\theta=0} = u|_{\theta=2\pi}$ dans Ω . La formulation variationnelle associée est alors:

$$-\omega^2 \varepsilon \mu \int_{O'} u.v r dr dz d\theta + \int_{O'} \text{rot}_r u . \text{rot}_r v r dr dz d\theta = i\omega \mu \int_{O'} j.v r dr dz d\theta. \quad (7)$$

3.2. Décomposition en séries de Fourier du champ électromagnétique en dimension 3

Pour un champ E donné dans $H(\text{rot}, O)$, on décompose classiquement le champ inconnu u , donné par (4), en série de Fourier, par rapport à la variable θ [13]. Reprenant une idée de [18], si on observe que le rotationnel d'un *champ symétrique* - par rapport au plan $\{r = 0\}$ - est *antisymétrique*, (et réciproquement), on réécrit u comme la somme de sa partie symétrique u^s et de sa partie antisymétrique u^a :

$$u(r, \theta, z) = u^s(r, \theta, z) + u^a(r, \theta, z) \quad (8)$$

et on pose, omettant les variables:

$$u^s = \begin{bmatrix} u_r^0 \\ 0 \\ u_z^0 \end{bmatrix} + \sum_{m \geq 1} \begin{bmatrix} u_r^m \cos m\theta \\ u_\theta^m \sin m\theta \\ u_z^m \cos m\theta \end{bmatrix}, \quad (9)$$

et:

$$u^a = \begin{bmatrix} 0 \\ u_\theta^0 \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{m \geq 1} \begin{bmatrix} u_r^{-m} \sin m\theta \\ u_\theta^{-m} \cos m\theta \\ u_z^{-m} \sin m\theta \end{bmatrix}, \quad (10)$$

où u_r^m, u_θ^m, u_z^m , pour $m \in \mathbb{Z}$, sont des fonctions scalaires réelles des variables r et z . De la même manière le rotationnel est écrit, comme la somme de ses parties symétriques:

$$\text{rot}_r u^s = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial u_r^0}{\partial z} - \frac{\partial u_z^0}{\partial r} \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{m \geq 1} \begin{bmatrix} -(\frac{m}{r} u_z^m + \frac{\partial u_\theta^m}{\partial z}) \sin m\theta \\ (\frac{\partial u_r^m}{\partial z} - \frac{\partial u_z^m}{\partial r}) \cos m\theta \\ (\frac{1}{r} (u_\theta^m + m u_r^m) + \frac{\partial u_\theta^m}{\partial r}) \sin m\theta \end{bmatrix}, \quad (11)$$

et le rotationnel de sa partie antisymétrique:

$$\operatorname{rot}_r u^a = \begin{bmatrix} -\frac{\partial u_\theta^0}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{\partial u_\theta^0}{\partial r} + \frac{1}{r} u_\theta^0 \end{bmatrix} + \sum_{m \geq 1} \begin{bmatrix} \left(\frac{m}{r} u_z^{-m} - \frac{\partial u_\theta^{-m}}{\partial z}\right) \cos m\theta \\ \left(\frac{\partial u_r^{-m}}{\partial z} - \frac{\partial u_z^{-m}}{\partial r}\right) \sin m\theta \\ \left(\frac{1}{r}(u_\theta^{-m} - m u_r^{-m}) + \frac{\partial u_\theta^{-m}}{\partial r}\right) \cos m\theta \end{bmatrix}. \quad (12)$$

On définit et on utilise indifféremment la notation $(., .)$ pour produit scalaire de L^2 aussi bien pour E que pour son équivalent u donné par (4), et on note

$$(E, F) = \int_O E.F \, dx dy dz = (u, v) = \int_O u.v \, r dr dz d\theta = \int_0^{2\pi} \int_\Omega u.v \, r dr dz d\theta \quad (13)$$

et on a alors:

$$(\operatorname{rot} E, \operatorname{rot} F) = (\operatorname{rot}_r u, \operatorname{rot}_r v) = \int_0^{2\pi} \int_\Omega \operatorname{rot}_r u . \operatorname{rot}_r v \, r dr dz d\theta \quad (14)$$

A cause de l'annulation sur l'intervalle $]0, 2\pi[$, des fonctions réelles: $\cos m\theta . \cos m'\theta$, $\sin m\theta . \sin m'\theta$, pour les entiers $m \neq m'$, et $\cos m\theta . \sin m'\theta$, pour tous les entiers m, m' , on peut écrire les produits scalaires suivants:

$$(E, F) = (u, v) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} \int_\Omega u^m . v^m \, r dr dz d\theta,$$

$$(\operatorname{rot} E, \operatorname{rot} F) = (\operatorname{rot}_r u, \operatorname{rot}_r v) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} \int_\Omega \operatorname{rot}_r u^m . \operatorname{rot}_r v^m \, r dr dz d\theta$$

Si on introduit la décomposition classique pour j :

$$j(r, \theta, z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} j^m(r, z) e^{im\theta} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \begin{bmatrix} j_r^m(r, z) \\ j_\theta^m(r, z) \\ j_z^m(r, z) \end{bmatrix} e^{im\theta}$$

le problème associé à (7) peut se décomposer en problèmes indépendants pour chaque mode de Fourier, c'est-à-dire pour chaque $m \in \mathbb{Z}$:

$$-\omega^2 \varepsilon \mu \int_O u^m . v^m \, r dr dz d\theta + \int_O \operatorname{rot}_r u^m . \operatorname{rot}_r v^m \, r dr dz d\theta = i\omega \mu \int_O j^m . v^m \, r dr dz d\theta$$

Si on supprime dans (7) le terme égal à π provenant de l'intégration en la variable θ , on déduit la formulation variationnelle des équations de Maxwell pour le m -ième terme de Fourier pour chaque $m \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \varepsilon \mu \int_\Omega (u_r^m . v_r^m + u_\theta^m . v_\theta^m + u_z^m . v_z^m) \, r dr dz + \int_\Omega \left(\frac{\partial u_\theta^m}{\partial r} + \frac{1}{r}(u_\theta^m + m u_r^m)\right) \left(\frac{\partial v_\theta^m}{\partial r} + \frac{1}{r}(v_\theta^m + m v_r^m)\right) \, r dr dz \\ & + \int_\Omega \left(\frac{\partial u_r^m}{\partial z} - \frac{\partial u_z^m}{\partial r}\right) \left(\frac{\partial v_r^m}{\partial z} - \frac{\partial v_z^m}{\partial r}\right) \, r dr dz + \int_\Omega \left(\frac{m}{r} u_z^m + \frac{\partial u_\theta^m}{\partial z}\right) \left(\frac{m}{r} v_z^m + \frac{\partial v_\theta^m}{\partial z}\right) \, r dr dz \\ & = i\omega \mu \int_\Omega (j_r^m . v_r^m + j_\theta^m . v_\theta^m + j_z^m . v_z^m) \, r dr dz \end{aligned} \quad (15)$$

On appelle le problème associé à (15) le *problème de Maxwell-Fourier* pour le m -ième mode.

4. DÉFINITIONS DE L'ESPACE DES SOLUTIONS

4.1. Définitions et rappels

On note $\mathcal{D}(\Omega)$, l'espace vectoriel de fonctions C^∞ à support compact dans Ω , $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω et $L^2(\Omega)$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur Ω par rapport à la mesure de Lebesgue $drdz$, pourvu de la norme:

$$|u| = \left(\int_{\Omega} u^2(r, z) drdz \right)^{1/2}$$

On définit l'espace de Sobolev avec poids des distributions sur $\Omega, [1]$:

$$L_1^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \sqrt{r}u \in L^2(\Omega)\} \quad (16)$$

avec la norme suivante:

$$|u|_1 = \left(\int_{\Omega} u^2(r, z) r drdz \right)^{1/2} \quad (17)$$

Remarque 4.1. On écrit cette norme, selon le contexte: $|u|_1 = |u|_{L_1^2(\Omega)} = |u|_{L_1^2}$ et si nécessaire: $|u|_{(L_1^2(\Omega))^k} = |u|_{(L_1^2)^k}$ la norme vectorielle correspondante, pour $k = 2$ ou 3 . ■

$L_1^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire associé $| \cdot |_1$. La continuité de la fonction r pour la mesure $r drdz$, entraîne le:

Lemme 4.2. $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L_1^2(\Omega)$ pour la norme $| \cdot |_1$.

On utilise aussi l'espace:

$L^\infty(\Omega) = \{u, drdz\text{-mesurable avec } |u| \leq C \text{ presque partout, } C \text{ constante}\}$ avec la norme: $| \cdot |_\infty = \inf\{C, |u| \leq C \text{ presque partout dans } \Omega\}$. On utilise aussi les espaces de Sobolev classiques suivants:

Définition 4.3. soit $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit:

$$W_\alpha^k(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : r^\alpha D^\beta u \in L^2(\Omega), |\beta| \leq k\}$$

qui est un espace de Hilbert avec la norme:

$$\|u\|_{W_\alpha^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\beta| \leq k} \|r^\alpha D^\beta u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

On a le résultat de densité suivant:

Lemme 4.4. Soit $k \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$, alors

(i) si $k \geq 1$, l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des restrictions à Ω des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^2)$ est dense dans $W_\alpha^k(\Omega)$, pour $\alpha \leq -\frac{1}{2}$ ou $k \leq \alpha + \frac{1}{2}$.

(ii) si $\alpha + \frac{1}{2} > 0$, $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $W_\alpha^k(\Omega)$

Preuve. Voir [21] [22].

Théorème 4.5. Soit $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, on a l'inclusion continue suivante:

$$W_{1/2}^k(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$$

Preuve. Voir [29].

Si on définit $\mathcal{P}_k(\Omega)$, comme l'espace des polynômes en la variable (r, z) , d'ordre inférieur ou égal à k , on a un résultat analogue au cas classique, mais ici avec la mesure à poids $r drdz$:

Théorème 4.6. *soit $k = 2$ or 3 , et X un espace de Banach tel que l'on ait l'inclusion continue*

$$W_{1/2}^k(\Omega) \subsetneq X,$$

soit Π un opérateur linéaire continu de $W_{1/2}^k(\Omega)$ dans X tel que:

$$(I - \Pi)p = 0, \text{ pour tout } p \in \mathcal{P}_{k-1}(\Omega),$$

alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in W_{1/2}^k(\Omega)$, on ait:

$$\|u - \Pi u\|_X \leq C \|u\|_{W_{1/2}^k(\Omega)}.$$

Preuve. Voir [29].

4.2. Étude d'un espace de Sobolev à poids

On considère uniquement le problème de Maxwell-Fourier pour le mode $m = 1$, puisqu'on déduira naturellement les propriétés des solutions pour les autres modes $m \geq 1$, et de la même manière pour les modes $m \leq -1$ et $m = 0$. On considère un domaine axisymétrique Ω , qui rencontre l'axe z $\{r = 0\}$, et dont la frontière régulière est constituée de Γ_0 , son intersection avec $\{r = 0\}$ et par Γ dans le demi-plan $\{r \geq 0\}$, lui-même avec une partie dans $\{z = z_1\}$ et une partie dans $\{z = z_2\}$, comme on le voit sur la figure 2.

On introduit maintenant certains espaces de Sobolev à poids qui fournissent le cadre fonctionnel adéquat à

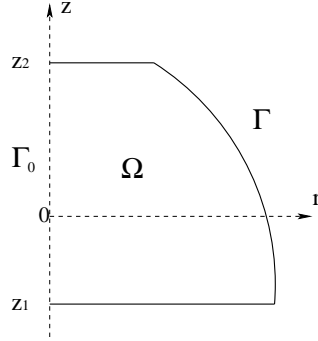


FIGURE 2

cette étude. On cherche des solutions de (15), avec $m = 1$, dans l'espace noté $\mathcal{H}(\Omega)$ ou \mathcal{H} :

$$\mathcal{H}(\Omega) = \{(u_r, u_\theta, u_z) \in (L_1^2(\Omega))^3, \text{ tel que } (\frac{u_z}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}, \frac{u_r + u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}) \in (L_1^2(\Omega))^3\} \quad (18)$$

On peut définir différemment l'espace des solutions. Pour cela on introduit:

$$U = \begin{bmatrix} U_r \\ U_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u_r + u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \\ \frac{u_z}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \end{bmatrix} \text{ et } u_{\text{mer}} = \begin{bmatrix} u_r \\ u_z \end{bmatrix}, \quad (19)$$

desquels on déduit certaines relations comme: $\nabla(ru_\theta) = rU - u_{mer}$, ou $rot(rU) = rotu_{mer} = \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial z}$. (∇ et rot considérés ici en coordonnées cartésiennes dans le plan rz). Alors on a aussi:

$$\mathcal{H}(\Omega) = \{(u_r, u_\theta, u_z) \in (L_1^2(\Omega))^3\}, U \in (L_1^2(\Omega))^2, rotu_{mer} \in L_1^2(\Omega)\}.$$

Remarque 4.7. Quand l'adhérence de l'ouvert Ω est strictement contenue dans \mathbb{R}_+^2 , on a:

$$\mathcal{H}(\Omega) = \{(u_r, u_\theta, u_z) \in (L^2(\Omega))^3\}, u_\theta \in H^1(\Omega), (u_r, u_z) \in H(rot, \Omega)\},$$

ou encore formellement (si on intervertit la première et la seconde composante de u)

$$\mathcal{H}(\Omega) = H^1(\Omega) \times H(rot, \Omega).$$

Cela signifie que dans le cas d'un domaine axisymétrique, l'espace de Hilbert \mathcal{H} se décompose en un produit d'espaces de Sobolev classiques.

Remarque 4.8. On peut aussi imaginer de prendre comme inconnues principales: (U, u_θ) ou (U_r, u_θ, U_z) , et travailler dans l'espace:

$$\mathcal{H}_1(\Omega) = \{(U_r, u_\theta, U_z) \in (L_1^2(\Omega))^3, \nabla(ru_\theta) \in (L_1^2(\Omega))^2, rot(rU) \in L_1^2(\Omega)\}.$$

Si on définit H_1^1 relatif à H^1 , comme L_1^2 est relatif à L^2 et:

$$H_1(rot_r, \Omega) = \{(u_r, u_z) \in (L_1^2(\Omega))^2, rot_r(u_r, u_z) \in L_1^2(\Omega)\},$$

On peut même considérer l'espace de solutions suivant:

$$\mathcal{H}_1(\Omega) = \{(U_r, u_\theta, U_z) \in (L_1^2(\Omega))^3, ru_\theta \in H_1^1(\Omega), rU \in H_1(rot_r, \Omega)\}.$$

Un tel changement d'inconnues, simplifie clairement les notations et transforme la forme bilinéaire du problème initial en:

$$-\omega^2 \varepsilon \mu \int_{\Omega} (U.U' + u_\theta.u_\theta') r dr dz + \int_{\Omega} (rot(rU).rot(rU') + \nabla(ru_\theta).\nabla(ru_\theta')) r dr dz$$

■

On utilise ce changement d'inconnues pour déterminer une base de fonctions pour l'approximation de \mathcal{H} et une forme linéaire d'interpolation. On munit \mathcal{H} de la norme suivante:

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{H}}^2 = & |u_r|_1^2 + |u_\theta|_1^2 + |u_z|_1^2 \\ & + \left| \frac{u_r + u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right|_1^2 + \left| \frac{u_z}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right|_1^2 + \left| \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right|_1^2 \end{aligned} \quad (20)$$

Il est clair que l'on a la

Proposition 4.9. \mathcal{H} est un espace de Hilbert pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$.

4.3. Caractérisation des fonctions C^2 de $H(rot)$ en géométrie axisymétrique

On établit dans ce paragraphe les conditions d'équivalence pour un C^2 -vecteur fonction d'appartenance à l'espace de Sobolev $H(rot, O)$ et pour ses associées (4), d'appartenir à l'espace \mathcal{H} en géométrie axisymétrique. On étudie les modes non-zéro de Fourier. On donne d'abord la

Définition 4.10. On note $\mathcal{H}^m(\Omega)$ l'espace de Sobolev avec poids des solutions du problème de Maxwell-Fourier pour le mode $m \in \mathbb{Z}$, comme dans (18), l'espace suivant:

$$\mathcal{H}^m(\Omega) = \{(u_r, u_\theta, u_z) \in (L^2_1(\Omega))^3 \text{ tel que: } (\frac{mu_z}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_r}{\partial z}, \frac{mu_r + u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}) \in (L^2_1(\Omega))^3\} \quad (21)$$

On a alors la proposition suivante (voir la relation (8.11) de [15]):

Proposition 4.11. *un champ E est dans $H(\text{rot}, O) \cap (\mathcal{C}^2(O))^3$ si et seulement si, pour tout $m \in \mathbb{Z}^*$, $u^m = (u_r^m, u_\theta^m, u_z^m)$ défini par (9),(10), est dans $\mathcal{H}^m(\Omega)$ et vérifie de plus la propriété suivante:*

$$\begin{aligned} (i) \quad & (mu_r^m + u_\theta^m)|_{\Gamma_0} = 0 \\ (ii) \quad & u_z^m|_{\Gamma_0} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

4.4. Formule de Green

Pour caractériser \mathcal{H} il nous faut employer une formule de Green. On note $(n_r, 0, n_z)$ la normale unitaire sortante à la frontière ∂O dans le plan $\{\theta = 0\}$ du domaine ouvert initial O . On montre que pour u et $v \in (\mathcal{D}(\Omega))^3 \cap \mathcal{H}$, on a la formule d'intégration par parties:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{v_z}{r} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta + v_r}{r} \end{bmatrix} r dr dz = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} -\frac{u_z}{r} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta + u_r}{r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{bmatrix} r dr dz \\ + \int_{\Gamma} (r \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} n_r \\ 0 \\ n_z \end{bmatrix}) \cdot \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{bmatrix} d\Gamma \end{aligned} \quad (23)$$

dans laquelle disparaissent les intégrales le long de Γ_0 , à cause du poids r .

5. FORMULATION DES ÉQUATIONS DE MAXWELL EN VOLUME

On reprend l'écriture complète de la formulation variationnelle (15) des équations Maxwell pour le m -ième mode de Fourier, pour chaque $m \in \mathbb{Z}$, il s'agit du problème suivant:

pour j^m , fonction donnée de $(L^2(\Omega))^3$, trouver $u^m \in H(\text{rot}, \Omega)$, solution, pour tout $v^m \in H(\text{rot}, \Omega)$, de:

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \int_{\Omega} \varepsilon (u_r^m \cdot v_r^m + u_\theta^m \cdot v_\theta^m + u_z^m \cdot v_z^m) r dr dz + \int_{\Omega} \mu^{-1} (\frac{\partial u_\theta^m}{\partial r} + \frac{1}{r}(u_\theta^m + mu_r^m)) (\frac{\partial v_\theta^m}{\partial r} + \frac{1}{r}(v_\theta^m + mv_r^m)) r dr dz \\ & + \int_{\Omega} \mu^{-1} (\frac{\partial u_r^m}{\partial z} - \frac{\partial u_z^m}{\partial r}) (\frac{\partial v_r^m}{\partial z} - \frac{\partial v_z^m}{\partial r}) r dr dz + \int_{\Omega} \mu^{-1} (\frac{m}{r}u_z^m + \frac{\partial u_\theta^m}{\partial z}) (\frac{m}{r}v_z^m + \frac{\partial v_\theta^m}{\partial z}) r dr dz \\ & = -i\omega \int_{\Omega} (j_r^m \cdot v_r^m + j_\theta^m \cdot v_\theta^m + j_z^m \cdot v_z^m) r dr dz. \end{aligned} \quad (24)$$

6. FORMULATION INTÉGRALE DES ÉQUATIONS DE MAXWELL

6.1. Le problème de la diffraction dans \mathbb{R}^3

On se place dans l'espace \mathbb{R}^3 occupé par une structure O présentant une symétrie axiale, une axisymétrie. On appelle O_{ext} le complémentaire vide de O dans \mathbb{R}^3 . On suppose que O est un domaine diélectrique inhomogène sans conducteur. La prise en compte d'une partie conductrice ne constitue en rien une difficulté pour ce qui suit. On ne traite pas par contre des conditions d'impédance de surface, ce cas sera regardé séparément. On s'intéresse aux équations de Maxwell homogènes déduites de (1), posées dans $\mathbb{R}^3 = O \cup \partial O \cup O_{ext}$. On suppose que dans O les constantes électromagnétiques ε, μ , sont "analytiques par morceaux et discontinues le long de surfaces analytiques" [32], telles que: $|\varepsilon| < +\infty, |\mu| < +\infty$. Soient ε_0 et μ_0 les constantes positives, qui sont les propriétés électriques du domaine O_{ext} . Dans la suite \vec{n} est la normale sortante à O . Le problème a une dépendance harmonique du temps en $\exp(-i\omega t)$. La source est une onde incidente (E^{inc}, H^{inc}) qui satisfait les équations de Maxwell homogène, dans tout l'espace, avec les coefficients électriques du vide. On pose problème de transmission suivant:

pour une fonction source donnée (E^{inc}, H^{inc}) dans \mathbb{R}^3 , trouver le champ total $(E^{tot}, H^{tot}) \in H(rot, \mathbb{R}^3)$, solution de:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (i) & rot E^{tot} - i\omega\mu H^{tot} = 0 \quad \text{dans } O, \\ (ii) & rot H^{tot} + i\omega\varepsilon E^{tot} = 0 \quad \text{dans } O, \\ (iii) & rot E - i\omega\mu_0 H = 0 \quad \text{dans } O_{ext}, \\ (iv) & rot H + i\omega\varepsilon_0 E = 0 \quad \text{dans } O_{ext}, \\ (v) & E^{tot} = E^{inc} + E \quad \text{dans } O_{ext}, \\ (vi) & H^{tot} = H^{inc} + H \quad \text{dans } O_{ext}, \\ (vii) & (\vec{n} \wedge E^{tot})|_{int} = (\vec{n} \wedge E^{tot})|_{ext} \quad \text{sur } \partial O, \\ (viii) & (\vec{n} \wedge H^{tot})|_{int} = (\vec{n} \wedge H^{tot})|_{ext} \quad \text{sur } \partial O, \\ (ix) & \text{conditions de rayonnement à l'infini, ou de Silver-Muller:} \\ & \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial E}{\partial r} - i\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} E \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial H}{\partial r} - i\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} H \right) = 0, \\ & \text{pour } r = |(x, y, z)| \text{ si } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \end{array} \right. \quad (25)$$

C'est ce système qu'il s'agit de modéliser et d'approximer.

6.2. Représentation intégrale des solutions

On rappelle la définition de certains opérateurs différentiels sur une surface ∂O . Si $\Pi_{\partial O}$ est la projection sur le plan tangent à ∂O du vecteur J , c'est-à-dire le vecteur:

$$\Pi_{\partial O} J = \mathfrak{J},$$

alors on peut énoncer la

Définition 6.1. (opérateurs différentiels surfaciques) [8]. Si Ψ et $\psi = \Psi|_{\partial O}$ sont des fonctions scalaires, on définit l'opérateur $\nabla_{\partial O}$ et l'opérateur $rot_{\partial O}$ dans \mathbb{R}^3 , par:

$$\nabla_{\partial O} \psi = \Pi_{\partial O} \nabla \Psi|_{\partial O}$$

$$rot_{\partial O} \mathbf{j} = \vec{n} \cdot \vec{Rot} J|_{\partial O}$$

et par dualité l'opérateur $\overrightarrow{div}_{\partial O}$ et l'opérateur $\overrightarrow{Rot}_{\partial O}$ dans \mathbb{R}^3 , par:

$$\langle \overrightarrow{div}_{\partial O} \mathbf{j}, \psi \rangle = -\langle \mathbf{j}, \nabla_{\partial O} \psi \rangle$$

$$\langle \overrightarrow{Rot}_{\partial O} \psi, \mathbf{i} \rangle = -\langle \psi, rot_{\partial O} \mathbf{i} \rangle$$

■

On rappelle le théorème de représentation des champs [32] sous la forme intégrale de bord. Pour cela on pose d'abord les notations suivantes: $E_{ext} = E|_{O_{ext}}$ et $H_{ext} = H|_{O_{ext}}$ et de même $E_{int} = E|_O$ et $H_{int} = H|_O$. On a le

Théorème 6.2. Soient E et H des solutions régulières des équations de Maxwell, pour ε et μ quelconques mais identiques dans O et O_{ext} , suivante:

$$\left\{ \begin{array}{ll} rot E - i\omega\mu H = 0 & \text{dans } O, \\ rot H + i\omega\varepsilon E = 0 & \text{dans } O, \\ rot E - i\omega\mu H = 0 & \text{dans } O_{ext}, \\ rot H + i\omega\varepsilon E = 0 & \text{dans } O_{ext}, \\ \text{condition de Silver-Muller vérifiée par le champ diffracté } E \text{ et } H. \end{array} \right. \quad (26)$$

On définit les sauts de traces tangentielles suivantes:

$$J = -(\vec{n} \wedge H_{int} - \vec{n} \wedge H_{ext})|_{\partial O}, \quad (27)$$

$$M = (\vec{n} \wedge E_{int} - \vec{n} \wedge E_{ext})|_{\partial O}.$$

Si d'autre part pour $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$, Φ désigne la solution élémentaire des ondes sortantes pour l'équation de Helmholtz (opérateur $\Delta + \omega^2\varepsilon\mu Id$):

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\|x\|} e^{ik\|x\|}, \quad (28)$$

on a les formules ¹ de représentation suivantes: pour tout $y \in O \cup O_{ext}$, $y \notin \partial O$:

$$E(y) = i\omega\mu \int_{\partial O} \Phi(x, y) J(x) d\gamma(x) + \frac{i}{\omega\varepsilon} \nabla_y \int_{\partial O} \Phi(x, y) \text{div}_{\partial O} J(x) d\gamma(x) - rot_y \int_{\partial O} \Phi(x, y) M(x) d\gamma(x) \quad (29)$$

$$H(y) = i\omega\varepsilon \int_{\partial O} \Phi(x, y) M(x) d\gamma(x) + \frac{i}{\omega\mu} \nabla_y \int_{\partial O} \Phi(x, y) \text{div}_{\partial O} M(x) d\gamma(x) + rot_y \int_{\partial O} \Phi(x, y) J(x) d\gamma(x) \quad (30)$$

■

¹l'indice x ou y sur ∇ ou rot désigne la variable d'action de l'opérateur.

Pour des champs E et H dans $H(\text{rot}, O)$, les traces correspondantes J et M sont dans $H^{-\frac{1}{2}}(\partial O)$. En fait, l'espace naturel des courants est un sous-espace de $H^{-\frac{1}{2}}(\partial O)$ puisqu'on exige en outre l'appartenance de $\text{div}_{\partial O} \mathbf{j}$ à $H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \partial O)$, dont la définition est la suivante:

$$H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \partial O) = \{\mathbf{j} \in TH^{-\frac{1}{2}}(\partial O), \text{div}_{\partial O} \mathbf{j} \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial O)\}$$

où $TH^{-\frac{1}{2}}(\partial O)$ est le dual de $TH^{\frac{1}{2}}(\partial O) = \{\mathbf{j} = n \wedge E|_{\partial O}, E \in (H^1(O))^3\}$.

En fait il est clair que pour l'utilisation d'éléments finis, on choisit en général d'approcher les domaines bornés par des sous-domaines polyédriques, de telle sorte que l'on se place en fait dans des sous-espaces de $H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \partial O)$, pour cela il faut se reporter à [21] et surtout [5].

Remarque 6.3. Avec les différentes propriétés des opérateurs de différentiation surfacique (voir [8]), on peut aussi écrire ces formules sous la forme condensée de [12]. On a la formule suivante dans le volume:

$$\text{div}_y((\vec{n}_x \wedge H(x))\Phi(x, y)) = \vec{n}_x \cdot \text{rot}_x(H(x)\Phi(x, y)) - \Phi(x, y)\vec{n}_x \cdot \text{rot}H(x)$$

On déduit du théorème de Stokes et de la relation $\text{rot}H = -i\omega\varepsilon E$, la relation:

$$\text{div} \int_{\partial O} \vec{n}_x \wedge H(x)\Phi(x, y)d\gamma(x) = i\omega\varepsilon \int_{\partial O} \vec{n}_x \cdot E(x)\Phi(x, y)d\gamma(x)$$

d'où découle la relation:

$$-\frac{1}{i\omega\varepsilon} \text{rot}_y \text{rot}_y \int_{\partial O} \vec{n}_x \wedge H(x)\Phi(x, y)d\gamma(x) = i\omega\mu \int_{\partial O} \vec{n}_x \wedge H(x)\Phi(x, y)d\gamma(x) + \frac{i}{\omega\varepsilon} \nabla_y \int_{\partial O} \vec{n}_x \cdot E(x)\Phi(x, y)d\gamma(x)$$

soit:

$$-\frac{1}{i\omega\varepsilon} \text{rot}_y \text{rot}_y \int_{\partial O} \vec{n}_x \wedge H(x)\Phi(x, y)d\gamma(x) = i\omega\mu \int_{\partial O} \Phi(x, y)J(x)d\gamma(x) + \frac{i}{\omega\varepsilon} \nabla_y \int_{\partial O} \Phi(x, y)\text{div}_{\partial O} J(x)d\gamma(x)$$

et finalement, pour $y \notin \partial O$:

$$E(y) = -i\omega\mu \text{rot}_y \text{rot}_y \int_{\partial O} \Phi(x, y)J(x)d\gamma(x) - \text{rot}_y \int_{\partial O} \Phi(x, y)M(x)d\gamma(x) \quad (31)$$

$$H(y) = -i\omega\varepsilon \text{rot}_y \text{rot}_y \int_{\partial O} \Phi(x, y)M(x)d\gamma(x) + \text{rot}_y \int_{\partial O} \Phi(x, y)J(x)d\gamma(x) \quad (32)$$

■

On peut introduire les opérateurs suivant [32] qui permettent aussi de définir les opérateurs de Calderon [8]:

$$S J(y) = \int_{\partial O} \Phi(x, y)J(x)d\gamma(x) \quad (33)$$

$$T J(y) = \nabla_y \int_{\partial O} \Phi(x, y)\text{div}_{\partial O} J(x)d\gamma(x) \quad (34)$$

$$R J(y) = \text{rot}_y \int_{\partial O} \Phi(x, y)J(x)d\gamma(x) = \int_{\partial O} (\nabla_y \Phi(x, y) \wedge J(x))d\gamma(x) \quad (35)$$

D'où l'expression de **la représentation intégrale du champ**, pour $y \notin \partial O$:

$$E(y) = i\omega\mu S J(y) + \frac{i}{\omega\varepsilon} T J(y) - R M(y) \quad (36)$$

$$H(y) = i\omega\varepsilon SM(y) + \frac{i}{\omega\mu} TM(y) + RJ(y) \quad (37)$$

On s'intéresse maintenant à l'établissement d'équations intégrales du problème général (25). On va écrire des équations intégrales pures pour le problème extérieur et les formulations variationnelles associées pour la solution de (25) dans O_{ext} . Pour le reste du problème, dans O , interviendra le couplage proprement dit et une formulation variationnelle à la fois sur ∂O et dans O , ouvert borné. On peut noter que, comme dans [32], il est bien sûr possible de traiter le problème de Maxwell, posé dans \mathbb{R}^3 , sous une forme purement intégrale. Pour cela il faut exprimer des problèmes de Maxwell intérieurs et extérieurs avec des fonctions de Green associées à chaque sous-domaine (l'ouvert borné et son complémentaire). Pour notre part on écrit le problème intérieur sous une forme volumique mieux à même de prendre en compte des matériaux très inhomogènes.

6.3. Une équation intégrale et une formulation variationnelle du problème extérieur

On a besoin de manière essentielle dans la suite de la propriété suivante de comportement à la limite à la frontière ∂O du champ électromagnétique fournit par (29) et (30):

Lemme 6.4. *Discontinuité du potentiel de double couche.*

Si la frontière est régulière, i.e. $y \notin$ à un coin ou à une arête de ∂O , on a:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \partial O^\pm} (\text{rot}_y \int_{\partial O} \Phi(x, y) J(x) d\gamma(x)) \wedge \vec{n}_y &= \mp \frac{J(y)}{2} + \int_{\partial O} (\text{rot}_y (\Phi(x, y) J(x)) \wedge \vec{n}_y) d\gamma(x) \\ &= \mp \frac{J(y)}{2} + \int_{\partial O} (\nabla_y (\Phi(x, y) \wedge J(x)) \wedge \vec{n}_y) d\gamma(x) \end{aligned}$$

(On utilise le symbolisme \pm pour désigner l'intérieur (-) de l'ouvert O et l'ouvert extérieur (+) O_{ext} .)
Preuve. [32] ■

Alors sachant que le potentiel de simple couche est continu à la frontière, on a les expressions suivantes, pour tout $y \in \partial O$:

$$\begin{aligned} (E \wedge n)^\pm(y) &= i\omega\mu \int_{\partial O} \Phi(x, y) (J(x) \wedge \vec{n}_y) d\gamma(x) + \frac{i}{\omega\varepsilon} \nabla_y \int_{\partial O} \Phi(x, y) \text{div}_{\partial O} J(x) \wedge \vec{n}_y d\gamma(x) \\ &\quad \pm \frac{M(y)}{2} - \int_{\partial O} (\nabla_y \Phi(x, y) \wedge M(x)) \wedge \vec{n}_y d\gamma(x) \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} (H \wedge n)^\pm(y) &= i\omega\varepsilon \int_{\partial O} \Phi(x, y) (M(x) \wedge \vec{n}_y) d\gamma(x) + \frac{i}{\omega\mu} \nabla_y \int_{\partial O} \Phi(x, y) \text{div}_{\partial O} M(x) \wedge \vec{n}_y d\gamma(x) \\ &\quad \mp \frac{J(y)}{2} + \int_{\partial O} (\nabla_y \Phi(x, y) \wedge J(x)) \wedge \vec{n}_y d\gamma(x) \end{aligned} \quad (39)$$

De telle sorte que pour tout $y \in \partial O$, avec toujours les notations du théorème 6.2 :

$$(E \wedge n)^\pm(y) = i\omega\mu S J(y) \wedge \vec{n}_y + \frac{i}{\omega\varepsilon} T J(y) \wedge \vec{n}_y - R M(y) \wedge \vec{n}_y \pm \frac{M(y)}{2} \quad (40)$$

$$(H \wedge n)^\pm(y) = i\omega\varepsilon S M(y) \wedge \vec{n}_y + \frac{i}{\omega\mu} T M(y) \wedge \vec{n}_y + R J(y) \wedge \vec{n}_y \mp \frac{J(y)}{2} \quad (41)$$

On va utiliser ces quatre dernières relations pour exhiber des équations intégrales permettant de résoudre le système (25). Ecrire des équations intégrales, c'est écrire des équations dont les densités J et M qui interviennent dans la représentation par potentiel, sont les solutions. Une équation intégrale sera par exemple une formulation équivalente au bord, des équations de Maxwell dans O_{ext} .

A cette fin on considère des systèmes de la forme (26) pour lesquels on choisit des solutions particulières. On construit [19] d'abord le prolongement du champ diffracté (E, H) de (25), en définissant (\tilde{E}, \tilde{H}) dans tout \mathbb{R}^3 , par:

$$\tilde{E} = \begin{cases} E & \text{dans } O_{ext} \\ -E^{inc} & \text{dans } O \end{cases} = \begin{cases} E^{tot} & \text{dans } O_{ext} \\ 0 & \text{dans } O \end{cases} - \begin{cases} E^{inc} & \text{dans } O_{ext} \\ E^{inc} & \text{dans } O \end{cases}$$

et :

$$\tilde{H} = \begin{cases} H & \text{dans } O_{ext} \\ -H^{inc} & \text{dans } O \end{cases} = \begin{cases} H^{tot} & \text{dans } O_{ext} \\ 0 & \text{dans } O \end{cases} - \begin{cases} H^{inc} & \text{dans } O_{ext} \\ H^{inc} & \text{dans } O \end{cases}$$

On peut définir des traces, au sens des espaces $H(rot)$, des restrictions à ∂O de E^{tot} et H^{tot} . On introduit les courants surfaciques J et M - distributions à support dans ∂O - qui sont dorénavant dans tout le texte, les inconnues du problème, les traces suivantes, restrictions au bord extérieur, de E^{tot} et H^{tot} :

$$\begin{aligned} J &= (\vec{n} \wedge H^{tot})|_{\partial O}, \\ M &= -(\vec{n} \wedge E^{tot})|_{\partial O}. \end{aligned} \quad (42)$$

D'autre part J et M sont aussi les sauts de \tilde{E} et \tilde{H} sur ∂O :

$$\begin{aligned} J &= \vec{n} \wedge H_{ext}^{tot} = (\vec{n} \wedge \tilde{H}_{ext} - \vec{n} \wedge \tilde{H}_{int})|_{\partial O} = (\vec{n} \wedge H_{ext} - \vec{n} \wedge H_{int}^{inc})|_{\partial O} \\ M &= -\vec{n} \wedge E_{ext}^{tot} = (\vec{n} \wedge \tilde{E}_{ext} - \vec{n} \wedge \tilde{E}_{int})|_{\partial O} = (\vec{n} \wedge E_{ext} - \vec{n} \wedge E_{int}^{inc})|_{\partial O} \end{aligned} \quad (43)$$

Alors il est clair que le couple \tilde{E} et \tilde{H} satisfait aux hypothèses requises et est donc solution du système (26) dans lequel on choisit $\varepsilon = \varepsilon_0$ et $\mu = \mu_0$. Et donc l'application du théorème 6.2 avec ses conséquences au bord (40) et (41), conduisent aux expressions qui suivent:

Si $(E)_t = n_\wedge(E \wedge n)$ désigne la composante tangente du vecteur E et pour tout $y \in \partial O$, on a:

$$(E)_t^+(y) = i\omega\mu_0(SJ)_t(y) + \frac{i}{\omega\varepsilon_0}(TJ)_t(y) - (RM)_t(y) + \vec{n}_y \wedge \frac{M(y)}{2} \quad (44)$$

$$(-E^{inc})_t^-(y) = i\omega\mu_0(SJ)_t(y) + \frac{i}{\omega\varepsilon_0}(TJ)_t(y) - (RM)_t(y) - \vec{n}_y \wedge \frac{M(y)}{2} \quad (45)$$

$$(H)_t^+(y) = i\omega\varepsilon_0(SM)_t(y) + \frac{i}{\omega\mu_0}(TM)_t(y) + (RJ)_t(y) - \vec{n}_y \wedge \frac{J(y)}{2} \quad (46)$$

$$(-H^{inc})_t^-(y) = i\omega\varepsilon_0(SM)_t(y) + \frac{i}{\omega\mu_0}(TM)_t(y) + (RJ)_t(y) + \vec{n}_y \wedge \frac{J(y)}{2} \quad (47)$$

On peut regrouper les opérateurs qui précèdent sous la forme des deux opérateurs \mathcal{T}, \mathcal{K} suivant:

$$\mathcal{T} J(y) = S J(y) + \frac{1}{\omega^2\varepsilon_0\mu_0} T J(y) = \int_{\partial O} \Phi(x, y) J(x) d\gamma(x) + \frac{1}{\omega^2\varepsilon_0\mu_0} \int_{\partial O} \nabla_y \Phi(x, y) \operatorname{div}_{\partial O} J(x) d\gamma(x) \quad (48)$$

$$\mathcal{K} J(y) = R J(y) = \int_{\partial O} \nabla_y \Phi(x, y) \wedge J(x) d\gamma(x) \quad (49)$$

Les opérateurs \mathcal{T} et \mathcal{K} sont respectivement les opérateurs de simple couche et de double couche. On les note aussi des fois respectivement Ψ_{SL} et Ψ_{DL} ([27], [5], [6]).

Il vient donc encore la forme équivalente du problème pour tout $y \in \partial O$:

$$(E)_t^{+m}(y) = i\omega\mu_0(\mathcal{T}J)_t(y) - (\mathcal{K}M)_t(y) + \vec{n}_y \wedge \frac{M(y)}{2} \quad (50)$$

$$(-E^{inc})_t^-(y) = i\omega\mu_0(\mathcal{T}J)_t(y) - (\mathcal{K}M)_t(y) - \vec{n}_y \wedge \frac{M(y)}{2} \quad (51)$$

$$(H)_t^+(y) = i\omega\varepsilon_0(\mathcal{T}M)_t(y) + (\mathcal{K}J)_t(y) - \vec{n}_y \wedge \frac{J(y)}{2} \quad (52)$$

$$(-H^{inc})_t^-(y) = i\omega\varepsilon_0(\mathcal{T}M)_t(y) + (\mathcal{K}J)_t(y) + \vec{n}_y \wedge \frac{J(y)}{2} \quad (53)$$

La première équation intégrale est celle de type *efie* (voir la bibliographie de [6] pour la terminologie) qui est exactement l'équation (51). On en obtient une formulation variationnelle en multipliant par une fonction test J' , selon le principe de Rumsey ([1] [32]):

$$\begin{aligned} i\omega\mu_0 \int_{\partial O} \mathcal{T}J(y) \cdot J'(y) d\gamma(y) - \int_{\partial O} \mathcal{K}M(y) \cdot J'(y) d\gamma(y) - \frac{1}{2} \int_{\partial O} (\vec{n}_x \wedge M(x)) \cdot J'(x) d\gamma(x) \\ = - \int_{\partial O} E^{inc}(x) \cdot J'(x) d\gamma(x) \end{aligned} \quad (54)$$

La deuxième équation intégrale est celle de type *mfie* qui est obtenue en prenant la trace tangentielle de (53). On en obtient aussi une formulation variationnelle, en multipliant par une fonction test J' . Cela s'exprime par:

$$\begin{aligned} i\omega\varepsilon_0 \int_{\partial O} (\vec{n}_y \wedge \mathcal{T}M)(y) \cdot J'(y) d\gamma(y) + \int_{\partial O} (\vec{n}_y \wedge \mathcal{K}J)(y) \cdot J'(y) d\gamma(y) - \frac{1}{2} \int_{\partial O} J(x) \cdot J'(x) d\gamma(x) \\ = - \int_{\partial O} (\vec{n}_x \wedge H^{inc}(x)) \cdot J'(x) d\gamma(x) \end{aligned} \quad (55)$$

Il est connu que les équations intégrales de type *efie* et *mfie* conduisent à des opérateurs intégraux non inversibles pour certaines valeurs de ω, ε et μ (les valeurs propres de l'opérateur de Helmholtz $(\Delta + \omega^2\varepsilon\mu Id)$ avec des conditions de Dirichlet ou Neumann homogènes).

On a recours généralement pour remédier à ce problème à "l'astuce de Brakhage et Werner" [32], qui utilise une combinaison linéaire d'un potentiel de simple couche et de double couche dans le cas de la théorie du potentiel (pour l'équation de Helmholtz). C'est une procédure analogue - dite *cfie* pour *combined field integral equation* - que l'on utilise de manière fréquente en électromagnétisme [12] [28] [33]. C'est cette méthode que l'on choisit et qu'on expose ici: on choisit pour cela, parmi plusieurs possibilités (voir encore [28]), la trace de Dirichlet intérieur pour obtenir l'équation intégrale suivante, dépendant d'un paramètre réel η , $0 \leq \eta \leq 1$ et de la constante physique impédance du vide Z , en réalisant une combinaison convexe des relations (54) et (55):

$$\eta (E^{inc})_t^-(y) + Z(1 - \eta) \vec{n}_y \wedge (H^{inc})_t^-(y) = 0, \quad \forall y \in \partial O. \quad (56)$$

Cette équation nous permet d'obtenir la formulation variationnelle:

$$\begin{aligned}
& i\omega\mu_0\eta \int_{\partial O} \mathcal{T}J(y) \cdot J'(y) \, d\gamma(y) - \eta \int_{\partial O} \mathcal{K}M(y) \cdot J'(y) \, d\gamma(y) - \frac{\eta}{2} \int_{\partial O} (\vec{n}_x \wedge M(x)) \cdot J'(x) \, d\gamma(x) \\
& + Z(1-\eta)i\omega\varepsilon_0 \int_{\partial O} (\vec{n}_y \wedge \mathcal{T}M)(y) \cdot J'(y) \, d\gamma(y) + Z(1-\eta) \int_{\partial O} (\vec{n}_y \wedge \mathcal{K}J)(y) \cdot J'(y) \, d\gamma(y) - \frac{Z(1-\eta)}{2} \int_{\partial O} J(x) \cdot J'(x) \, d\gamma(x) \\
& = -\eta \int_{\partial O} E^{inc}(x) \cdot J'(x) \, d\gamma(x) - Z(1-\eta) \int_{\partial O} (\vec{n}_x \wedge H^{inc}(x)) \cdot J'(x) \, d\gamma(x)
\end{aligned} \tag{57}$$

Soit enfin sous forme développée et explicite:

$$\begin{aligned}
& \eta \int_{\partial O} \int_{\partial O} \Phi(y-x) \{ i\omega\mu_0 J(x) \cdot J'(y) + \frac{1}{i\omega\varepsilon_0} \operatorname{div}_{\partial O} J(x) \cdot \operatorname{div}_{\partial O} J'(y) \} \, d\gamma(x) d\gamma(y) \\
& - \eta \int_{\partial O} \int_{\partial O} (\nabla_y \Phi(y-x) \wedge M(x)) \cdot J'(y) \, d\gamma(x) d\gamma(y) - \frac{\eta}{2} \int_{\partial O} (\vec{n}_x \wedge M(x)) \cdot J'(x) \, d\gamma(x) \\
& - Z(1-\eta) \int_{\partial O} \int_{\partial O} \{ i\omega\varepsilon_0 \Phi(y-x) M(x) - \frac{1}{i\omega\mu_0} \nabla_y \Phi(y-x) \operatorname{div}_{\partial O} M(x) \} \cdot (\vec{n}_y \wedge J'(y)) \, d\gamma(x) d\gamma(y) \tag{58} \\
& - Z(1-\eta) \int_{\partial O} \int_{\partial O} (\nabla_y \Phi(y-x) \wedge J(x)) \cdot (\vec{n}_y \wedge J'(y)) \, d\gamma(x) d\gamma(y) - \frac{Z(1-\eta)}{2} \int_{\partial O} J(x) \cdot J'(x) \, d\gamma(x) \\
& = -\eta \int_{\partial O} E^{inc}(x) \cdot J'(x) \, d\gamma(x) - Z(1-\eta) \int_{\partial O} (\vec{n}_x \wedge H^{inc}(x)) \cdot J'(x) \, d\gamma(x)
\end{aligned}$$

Pour l'existence et l'unicité du problème issu de l'équation intégrale *cf*e ci-dessus, on se reportera à [26] et [32].

Remarque 6.5. Dans le cas de la théorie du potentiel, cela consiste à écrire le potentiel sous la forme suivante, pour un réel η non nul, à bien choisir:

$$u(y) = \int_{\partial O} (\Phi(x, y) + i\eta \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n}) q(x) d\gamma(x)$$

car alors ce potentiel u vérifie le problème intérieur:

$$\Delta u + \omega^2 \varepsilon \mu u = 0$$

$$(u + i\eta \frac{\partial u}{\partial n})|_{\partial O} = 0$$

qui ne possède pas de solutions autres que triviales quand $\eta \in \mathbb{R}$. Ce moyen est en fait utilisée pour prouver l'existence et l'unicité du problème de Dirichlet extérieur.

De la même manière suivant [12] [33], le potentiel sous la forme suivante, pour un réel η :

$$u(y) = \int_{\partial O} (\Phi(x, y) + i\eta \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \vec{n}_x} S_0^2(x)) q(x) d\gamma(x)$$

où S_0 est le potentiel de simple couche associé à l'équation de Helmholtz dans le cas limite $\omega = 0$, ou si l'on veut du Laplacien : $S_0(y) = \int_{\partial O} \frac{1}{|x-y|} q(x) d\gamma(x)$ (isomorphisme de $H^{-1/2}(\Gamma)$ sur $H^{1/2}(\Gamma)$, sauf aux valeurs critiques), est solution du problème de Neumann extérieur dès que la densité q vérifie l'équation intégrale suivante:

$$\frac{q(y)}{2} - \int_{\partial O} \frac{\Phi(x,y)}{\partial \vec{n}_y} q(x) d\gamma(x) - i\eta \int_{\partial O} \frac{\Phi(x,y)}{\partial \vec{n}_x} S_0^2(y) q(x) d\gamma(x) = -(\text{donnée Neumann sur } \partial O)$$

Comme dans la première partie de cette remarque, cette astuce (*trick* en anglais) est aussi utilisée pour prouver l'existence et l'unicité du problème de Neumann extérieur. Pour ce résultat il est essentiel de noter que contrairement à Maxwell, on n'exige pas de régularité des données sur le bord ∂O .

Remarque 6.6. On voit apparaître dans la relation (58) une des principales difficultés de la formulation *cfi* dans la présence des termes (si on intègre par parties):

$$\int_{\partial O} \int_{\partial O} \Phi(y-x) \operatorname{div}_{\partial O} M(x) \cdot \operatorname{div}_{\partial O} (\vec{n} \wedge J'(y)) d\gamma(x) d\gamma(y) \quad (59)$$

puisque la quantité $\operatorname{div}_{\partial O} (\vec{n} \wedge J'(y))$ ne peut pas appartenir de manière conforme à l'espace des courants qui est $H^{-1/2}(\operatorname{div}_{\partial O}, \Gamma)$.

7. FORMULATION COUPLÉE VOLUMIQUE ET SURFACIQUE DES ÉQUATIONS DE MAXWELL

La démarche de cette section est reprise des formulations des codes *SUMERC* [3] et *ARLAS* [25], elles-mêmes fondées sur les textes [19] et [26].

7.1. Formulation couplée volumique et surfacique des équations de Maxwell dans \mathbb{R}^3 [19] [26]

On rappelle (voir [1] [23]) en géométrie 3d l'obtention de la formulation des équations de Maxwell couplées. La solution de (25) d'abord dans le domaine O , s'écrit: *pour tout* $E' \in H(\operatorname{rot}, O)$:

$$\int_O \left(\frac{1}{i\omega\mu} \operatorname{rot} E \cdot \operatorname{rot} E' + i\omega\varepsilon E \cdot E' \right) dx + \int_{\partial O} (H_\wedge E) \cdot \vec{n} d\gamma = 0$$

soit encore en utilisant les notations déduites de (43):

$$(H_\wedge E') \cdot \vec{n} = [(H_\wedge \vec{n}) \wedge (E'_\wedge \vec{n})] \cdot \vec{n} = (J_\wedge M') \cdot \vec{n}$$

pour tout $E' \in H(\operatorname{rot}, O)$, *pour tout* $M' = E'_\wedge \vec{n}$ définit sur ∂O :

$$\int_O \left(\frac{1}{i\omega\mu} \operatorname{rot} E \cdot \operatorname{rot} E' + i\omega\varepsilon E \cdot E' \right) dx + \int_{\partial O} (J_\wedge M') \cdot \vec{n} d\gamma = 0 \quad (60)$$

De la même manière on déduit aussi:

pour tout $H' \in H(\operatorname{rot}, O)$, *pour tout* $J' = H'_\wedge \vec{n}$ définit sur ∂O :

$$\int_O \left(\frac{1}{i\omega\varepsilon} \operatorname{rot} H \cdot \operatorname{rot} H' + i\omega\mu H \cdot H' \right) dx - \int_{\partial O} (M_\wedge J') \cdot \vec{n} d\gamma = 0 \quad (61)$$

Le couplage se fait par le terme de bord de l'équation ci-dessus (60) en identifiant ce terme avec celui de l'équation intégrale obtenue en prenant la trace tangentielle de (53) et en multipliant par une fonction test M' (ou en fait $\vec{n}_y \wedge E'$). On obtient alors la seconde formulation variationnelle du problème (60), identique à la

forme (S1) de la thèse de Levillain ([26], p.21):

pour $\omega \in \mathbb{R}$ donné, pour une fonction source donnée (E^{inc}, H^{inc}) localement dans $H(\text{rot}, O)$, il s'agit de trouver un couple (E, J) dans $H(\text{rot}, O) \times H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \partial O)$, tel que pour tout $(E', J') \in H(\text{rot}, O) \times H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \partial O)$, on ait:

$$\begin{aligned}
& -i\omega\varepsilon \int_O E \cdot E' dx - \frac{1}{i\omega\mu} \int_O \text{rot}E \cdot \text{rot}E' dx + \frac{1}{2} \int_{\partial O} (J \wedge M') \cdot \vec{n} d\gamma(x) \\
& - \frac{1}{i\omega\mu_0} \int_{\partial O} \int_{\partial O} \Phi(y-x) \text{div}_{\partial O}(\vec{n} \wedge E(x)) \cdot \text{div}_{\partial O}(\vec{n} \wedge E'(y)) d\gamma(x)d\gamma(y) \\
& - i\omega\varepsilon_0 \int_{\partial O} \int_{\partial O} \Phi(y-x) (\vec{n} \wedge E(x)) \cdot (\vec{n} \wedge E'(y)) d\gamma(x)d\gamma(y) \\
& - \int_{\partial O} \int_{\partial O} \nabla_y \Phi(y-x) \cdot (J(y) \wedge (\vec{n} \wedge E'(x))) d\gamma(x)d\gamma(y) = \int_{\partial O} H^{inc}(x) \cdot (\vec{n} \wedge E'(x)) d\gamma(x)
\end{aligned} \tag{62}$$

Remarque 7.1. Formulation *efie* et *mfie*.

Avec les formulations (58), (62) et pour $\eta = 1$, on obtient la formulation variationnelle *efie* du problème (25). Elle reprend exactement celle de [1]. Le problème se pose comme suit:

pour $\omega \in \mathbb{R}$, pour une fonction source donnée (E^{inc}, H^{inc}) localement dans $H(\text{rot}, O)$, il s'agit de trouver J et M dans $H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \partial O)$, tels que pour tout J' et $M' \in H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \partial O)$, on ait:

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial O} \int_{\partial O} \Phi(y-x) \{i\omega\mu_0 J(x) \cdot J'(y) + \frac{1}{i\omega\varepsilon_0} \text{div}_{\partial O}J(x) \cdot \text{div}_{\partial O}J'(y)\} d\gamma(x)d\gamma(y) \\
& - \int_{\partial O} \int_{\partial O} \Phi(y-x) \{i\omega\varepsilon_0 M(x) \cdot M'(y) + \frac{1}{i\omega\mu_0} \text{div}_{\partial O}M(x) \cdot \text{div}_{\partial O}M'(y)\} d\gamma(x)d\gamma(y) \\
& - \int_{\partial O} \int_{\partial O} \nabla\Phi(y-x) \{J(x) \wedge M'(y) + M(x) \wedge J'(y)\} d\gamma(x)d\gamma(y) - \frac{1}{2} \int_{\partial O} \{M(x) \wedge J'(x) - J(x) \wedge M'(x)\} \cdot \vec{n} d\gamma(x) \\
& - \int_O \left(\frac{1}{i\omega\mu} \text{rot}E \cdot \text{rot}E' + i\omega\varepsilon E \cdot E' \right) dx = \int_{\partial O} \{H^{inc} \cdot M'(x) - E^{inc} \cdot J'(x)\} d\gamma(x)
\end{aligned} \tag{63}$$

La forme variationnelle (63) en (J, M) obtenue, est symétrique pour sa partie intégrale double et pour sa partie intégrale simple. Ce n'est pas le cas dans la formulation *cfie*.

Pour $\eta = 0$, on obtient la formulation variationnelle *mfie* du problème (25).

7.2. Divers résultats en géométrie axisymétrique des équations de Maxwell

En géométrie axisymétrique, l'obtention de la formulation des équations de Maxwell couplées se déduit immédiatement du remplacement dans (58),(62), des intégrales de $\Gamma \times T_1$ sur Γ et en formulant les opérateurs $\nabla_{|\Gamma}$ et $\text{div}_{|\Gamma}$ dans les variables (r, z) . On définit la base orthonormée directe $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$, du système de coordonnées axisymétriques, :

$$\vec{e}_r = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{64}$$

On traduit maintenant cette formulation en coordonnées cylindriques. Pour cela il nous faut exprimer les changements de mesure du 3d cartésien à l'axisymétrique. On introduit l'abscisse curviligne le long de Γ . Pour cela on pose:

$$\begin{aligned} \varphi : [s_1, s_2] \subset \mathbb{R} &\rightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}_{rz}^2 \\ s &\rightarrow (\varphi_1(s), \varphi_2(s)) = (r, z) \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : [s_1, s_2] \times [0, 2\pi[&\subset \mathbb{R}^2 \rightarrow O' \\ (s, \theta) &\rightarrow (\varphi_1(s), \theta, \varphi_2(s)) = (r, \theta, z) \end{aligned} \quad (66)$$

On rappelle d'autre part le changement de variable:

$$\begin{aligned} \Psi : O' &\rightarrow O \subset \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, z) &\rightarrow (x, y, z) = (\Psi_1(r, \theta, z), \Psi_2(r, \theta, z), \Psi_3(r, \theta, z)) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \end{aligned} \quad (67)$$

De telle sorte qu'un point (x, y, z) de la surface O est décrit par l'homéomorphisme suivant:

$$(x, y, z) = \Psi \circ \tilde{\varphi}(s, \theta) \quad (68)$$

On en déduit une base $(\vec{u}_{rz}, \vec{u}_\theta)$ de vecteurs base de la surface en tout point (s, θ) , donné par la différentielle:

$$d\Psi(\tilde{\varphi}(s, \theta)) \circ d\tilde{\varphi}(s, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial s} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial z}{\partial s} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial s} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \frac{\partial r}{\partial s} \sin \theta & r \cos \theta \\ \frac{\partial z}{\partial s} & 0 \end{bmatrix} \quad (69)$$

soient les vecteurs:

$$\vec{u}_{rz} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial s} \cos \theta \\ \frac{\partial r}{\partial s} \sin \theta \\ \frac{\partial z}{\partial s} \end{bmatrix} \text{ et } \vec{u}_\theta = \begin{bmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (70)$$

Il s'ensuit que l'élément de mesure surfacique est le suivant:

$$\|\vec{u}_{rz} \wedge \vec{u}_\theta\| ds d\theta = r \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2} ds d\theta \quad (71)$$

Soit la mesure $r ds d\theta$, si l'on convient de prendre, puisqu'on le peut:

$$\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2} = 1 \quad (72)$$

Une base orthonormée directe $\{\vec{\tau}_\theta, \vec{\tau}_{rz}, \vec{\tau}_n\}$ est choisie sur la surface avec sa normale:

$$\vec{\tau}_\theta = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\tau}_{rz} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial s} \cos \theta \\ \frac{\partial r}{\partial s} \sin \theta \\ \frac{\partial z}{\partial s} \end{bmatrix}, \quad \vec{\tau}_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} \cos \theta \\ \frac{\partial z}{\partial s} \sin \theta \\ -\frac{\partial r}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (73)$$

On détermine le changement d'expression pour chaque terme des équations intégrales, au passage coordonnées cartésiennes coordonnées cylindriques. Soient $M = (r, \theta, z)$ et $M' = (r', \theta', z')$ deux points de la surface $\Gamma \times T_1$. Soient $\{\vec{\tau}_\theta, \vec{\tau}_{rz}, \vec{\tau}_n\}$ et $\{\vec{\tau}'_\theta, \vec{\tau}'_{rz}, \vec{\tau}'_n\}$ deux bases orthonormées directes attachées en chacun de ces points à la surface, comme sur la figure 1.

On définit l'angle ϕ de variation de rotation (comme dans [15]) de la manière suivante:

$$\phi = \theta - \theta' \quad (74)$$

La distance entre ces deux points est R , donnée par:

$$R = \sqrt{(r - r')^2 + (z - z')^2 + 2rr'(1 - \cos \phi)} \quad (75)$$

La matrice de changement de base entre $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ et la base locale $\{\vec{\tau}'_\theta, \vec{\tau}'_{rz}, \vec{\tau}'_n\}$, s'écrit:

$$A = \begin{bmatrix} -\sin \theta' & \cos \theta' & 0 \\ \frac{\partial r'}{\partial s'} \cos \theta' & \frac{\partial r'}{\partial s'} \sin \theta' & \frac{\partial z'}{\partial s'} \\ \frac{\partial z'}{\partial s'} \cos \theta' & \frac{\partial z'}{\partial s'} \sin \theta' & -\frac{\partial r'}{\partial s'} \end{bmatrix} \quad (76)$$

Pour:

$$\overrightarrow{MM'_e} = \begin{bmatrix} r' \cos \theta' - r \cos \theta \\ r' \sin \theta' - r \sin \theta \\ z' - z \end{bmatrix} \quad (77)$$

on trouve l'expression de $\overrightarrow{MM'_\tau}$:

$$A. \overrightarrow{MM'_e} = \begin{bmatrix} -r \sin(\theta - \theta') \\ r' \frac{\partial r'}{\partial s'} - r \frac{\partial r'}{\partial s'} \cos(\theta - \theta') + (z' - z) \frac{\partial z'}{\partial s'} \\ r' \frac{\partial z'}{\partial s'} - r \frac{\partial z'}{\partial s'} \cos(\theta - \theta') - (z' - z) \frac{\partial r'}{\partial s'} \end{bmatrix} \quad (78)$$

Les composantes de $\overrightarrow{MM'}$ dans la base $\{\overrightarrow{\tau'_\theta}, \overrightarrow{\tau'_{rz}}, \overrightarrow{\tau'_n}\}$, s'écrivent:

$$\begin{bmatrix} -r \sin \phi \\ r' \frac{\partial r'}{\partial s'} - r \frac{\partial r'}{\partial s'} \cos \phi + (z' - z) \frac{\partial z'}{\partial s'} \\ r' \frac{\partial z'}{\partial s'} - r \frac{\partial z'}{\partial s'} \cos \phi - (z' - z) \frac{\partial r'}{\partial s'} \end{bmatrix} \quad (79)$$

Il nous faut encore calculer le gradient surfacique afin de déterminer la divergence surfacique. Soit u une fonction scalaire de la variable (r, θ, z) . Alors:

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r} \overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial u}{\partial z} \overrightarrow{e_z} \quad (80)$$

On définit à partir de (80), le gradient surfacique ∇_Γ [8], par sa projection Π_Γ sur $\Gamma \times T_1$:

$$\nabla_\Gamma u = \Pi_\Gamma \nabla u \quad (81)$$

On utilise l'abscisse curviligne, définie par (65), et on forme les produits scalaires:

$$\overrightarrow{e_r} \cdot \overrightarrow{\tau_{rz}} = \frac{\partial r}{\partial s}, \quad \overrightarrow{e_\theta} \cdot \overrightarrow{\tau_{rz}} = 0, \quad \overrightarrow{e_z} \cdot \overrightarrow{\tau_{rz}} = \frac{\partial z}{\partial s} \quad (82)$$

$$\overrightarrow{e_r} \cdot \overrightarrow{\tau_\theta} = 0, \quad \overrightarrow{e_\theta} \cdot \overrightarrow{\tau_\theta} = 1, \quad \overrightarrow{e_z} \cdot \overrightarrow{\tau_\theta} = 0 \quad (83)$$

Alors on a les relations suivantes:

$$\nabla u \cdot \overrightarrow{\tau_{rz}} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial s} \quad (84)$$

et:

$$\nabla u \cdot \overrightarrow{\tau_\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (85)$$

D'où l'on tire l'expression du gradient surfacique:

$$\nabla_\Gamma u = \frac{\partial u}{\partial s} \overrightarrow{\tau_{rz}} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \overrightarrow{\tau_\theta} \quad (86)$$

On en déduit l'expression de la divergence surfacique, si $\mathbf{j} = (j_{rz}, j_\theta)$ est une fonction régulière, si Ψ est une fonction \mathcal{C}^∞ à support compact dans $\Gamma \times T_1$, en utilisant les crochets de la dualité $H(\text{div}, \Gamma \times T_1), H^{-1}(\text{div}, \Gamma \times T_1)$, on a par définition:

$$\langle \text{div}_\Gamma \mathbf{j}, \Psi \rangle = -\langle \mathbf{j}, \nabla_\Gamma \Psi \rangle \quad (87)$$

c'est-à-dire:

$$\int_{\Gamma \times T_1} \text{div}_\Gamma \mathbf{j} \cdot \Psi \, d\gamma = - \int_{\Gamma \times T_1} \mathbf{j} \cdot \nabla_\Gamma \Psi \, d\gamma$$

ou:

$$\int_0^{2\pi} \int_\Gamma \text{div}_\Gamma \mathbf{j} \cdot \Psi \, r \, ds \, d\theta = - \int_0^{2\pi} \int_\Gamma \left(\frac{\partial \Psi}{\partial s} j_{rz} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} j_\theta \right) r \, ds \, d\theta \quad (88)$$

Soit en intégrant par parties:

$$\int_0^{2\pi} \int_\Gamma \text{div}_\Gamma \mathbf{j} \cdot \Psi \, r \, ds \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_\Gamma \Psi \left(\frac{\partial j_{rz}}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} j_{rz} + \frac{1}{r} \frac{\partial j_\theta}{\partial \theta} \right) r \, ds \, d\theta - \int_0^{2\pi} [r j_{rz} \cdot \Psi]_\Gamma \, d\theta - \int_\Gamma [r j_\theta \cdot \Psi]_0^{2\pi} \, ds \quad (89)$$

et au final les deux termes tout intégrés sont nuls puisque le support de Ψ est compact dans $\Gamma \times T_1$, (les pôles sont exclus):

$$\int_0^{2\pi} \int_{\Gamma} \text{div}_{\Gamma} \mathbf{j} \cdot \Psi \, r ds d\theta = \int_0^{2\pi} \int_{\Gamma} \Psi \left(\frac{\partial \mathbf{j}_{rz}}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \mathbf{j}_{rz} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{j}_{\theta}}{\partial \theta} \right) r ds d\theta \quad (90)$$

C'est-à-dire que:

$$\text{div}_{\Gamma} \mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{j}_{rz}}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \mathbf{j}_{rz} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{j}_{\theta}}{\partial \theta} \quad (91)$$

Pour finir cette section, on rappelle un résultat élémentaire.

Soient ψ_1, ψ_2 et Φ les fonctions suivantes:

$$\begin{aligned} \psi_1 : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \psi_1(x) = \|x\| \end{aligned} \quad (92)$$

$$\begin{aligned} \psi_2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\rightarrow \psi_2(x) = \frac{1}{4\pi t} e^{ikt} \end{aligned} \quad (93)$$

et:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\rightarrow \Phi(x) = \psi_2 \circ \psi_1(x) = \frac{1}{4\pi \|x\|} e^{ik\|x\|} \end{aligned} \quad (94)$$

Alors:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{\|x\|}$$

d'où, si $M = (x_1, x_2, x_3)$:

$$d\Phi(x) = \frac{1}{\|x\|} \left(ik - \frac{1}{\|x\|} \right) \cdot \Phi(x) \cdot \overrightarrow{OM}$$

Et donc la formule:

$$\nabla_{x'} \Phi(x, x') = \frac{1}{\|x - x'\|} \left(ik - \frac{1}{\|x - x'\|} \right) \cdot \Phi(x, x') \cdot \overrightarrow{MM'} \quad (95)$$

Au vu de (58),(62), il y a aussi la nécessité d'évaluer, d'une part les produits scalaires suivants:

$$\overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{\tau_{\theta}} \quad , \quad \overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{\tau_{rz}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{\tau_n}, \quad (96)$$

et d'autre part les produits mixtes suivants:

$$\overrightarrow{MM'} \cdot (\overrightarrow{\tau_{\theta}} \wedge \overrightarrow{\tau_{\theta}'}) \quad , \quad \overrightarrow{MM'} \cdot (\overrightarrow{\tau_{\theta}} \wedge \overrightarrow{\tau_{rz}'}) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MM'} \cdot (\overrightarrow{\tau_{rz}} \wedge \overrightarrow{\tau_{rz}'}). \quad (97)$$

Pour cela on obtient les résultats suivants, qui rendent compte de la seule dépendance de ces quantités, en les variables s, s' et ϕ :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\tau_{rz}'} \cdot \overrightarrow{\tau_{rz}} &= \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r'}{\partial s'} \cos \phi + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial z'}{\partial s'} & ; \quad \overrightarrow{\tau_{rz}'} \cdot \overrightarrow{\tau_{\theta}} &= -\frac{\partial r'}{\partial s'} \sin \phi & ; \quad \overrightarrow{\tau_{rz}'} \cdot \overrightarrow{\tau_n} &= \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial r'}{\partial s'} \cos \phi - \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial z'}{\partial s'} \\ \overrightarrow{\tau_{\theta}'} \cdot \overrightarrow{\tau_{rz}} &= \frac{\partial r}{\partial s} \sin \phi & ; \quad \overrightarrow{\tau_{\theta}'} \cdot \overrightarrow{\tau_{\theta}} &= \cos \phi & ; \quad \overrightarrow{\tau_{\theta}'} \cdot \overrightarrow{\tau_n} &= \frac{\partial z}{\partial s} \sin \phi \end{aligned} \quad (98)$$

$$\overrightarrow{\tau_n'} \cdot \overrightarrow{\tau_{rz}} = \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial z'}{\partial s'} \cos \phi - \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial r'}{\partial s'} \quad ; \quad \overrightarrow{\tau_n'} \cdot \overrightarrow{\tau_{\theta}} = -\frac{\partial z'}{\partial s'} \sin \phi \quad ; \quad \overrightarrow{\tau_n'} \cdot \overrightarrow{\tau_n} = \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial z'}{\partial s'} \cos \phi + \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r'}{\partial s'}$$

On a les expressions suivantes pour les produits mixtes:

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_\theta \wedge \vec{\tau}'_\theta &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin \phi \end{bmatrix}, \\ \vec{\tau}_{rz} \wedge \vec{\tau}'_{rz} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial z'}{\partial s'} \sin \theta - \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial r'}{\partial s'} \sin \theta' \\ -\frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial z'}{\partial s'} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial r'}{\partial s'} \cos \theta' \\ -\frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r'}{\partial s'} \sin \phi \end{bmatrix}, \\ \vec{\tau}'_\theta \wedge \vec{\tau}_{rz} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} \cos \theta' \\ \frac{\partial z}{\partial s} \sin \theta' \\ -\frac{\partial r}{\partial s} \cos \phi \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Alors si $\overrightarrow{MM'}$ s'exprime dans la base $\{\vec{\tau}'_\theta, \vec{\tau}'_{rz}, \vec{\tau}'_n\}$ selon (79), il nous faut évaluer les produits mixtes:

$$\vec{\tau}'_{rz} \cdot (\vec{\tau}'_\theta \wedge \vec{\tau}_{rz}) = -\vec{\tau}_{rz} \cdot \vec{\tau}'_n \quad \text{et} \quad \vec{\tau}'_{rz} \cdot (\vec{\tau}_\theta \wedge \vec{\tau}'_\theta) = \vec{\tau}_\theta \cdot \vec{\tau}'_n. \quad (99)$$

On vérifie que ces termes de produits mixtes ne dépendent encore que des seules variables s , s' et ϕ .

7.3. Décomposition en séries de Fourier des courants surfaciques

On poursuit la démarche de Duruflé [15], avec une variante, toutefois, qui reprend les résultats de [18] et [23], et on suppose que les courants J et M se décomposent sous la forme équivalente à (8), (9) et (10), en partie symétrique (indice m) et antisymétrique (indice $-m$) en la variable θ , pour les champs vectoriels tangents:

$$\begin{aligned}J(x) = J(\Psi \circ \tilde{\varphi}(s, \theta)) &= \tilde{J}(s, \theta) = \sum_{m \geq 0} j_{rz}^m(s) \cdot \cos m\theta \vec{\tau}_{rz} + j_\theta^m(s) \cdot \sin m\theta \vec{\tau}_\theta \\ &+ \sum_{m \geq 0} j_{rz}^{-m}(s) \cdot \sin m\theta \vec{\tau}_{rz} + j_\theta^{-m}(s) \cdot \cos m\theta \vec{\tau}_\theta\end{aligned} \quad (100)$$

et:

$$\begin{aligned}M(x) = M(\Psi \circ \tilde{\varphi}(s, \theta)) &= \tilde{M}(s, \theta) = \sum_{m \geq 0} \mathbf{m}_{rz}^m(s) \cdot \cos m\theta \vec{\tau}_{rz} + \mathbf{m}_\theta^m(s) \cdot \sin m\theta \vec{\tau}_\theta \\ &+ \sum_{m \geq 0} \mathbf{m}_{rz}^{-m}(s) \cdot \sin m\theta \vec{\tau}_{rz} + \mathbf{m}_\theta^{-m}(s) \cdot \cos m\theta \vec{\tau}_\theta\end{aligned} \quad (101)$$

En effet si $\begin{bmatrix} E_x(r, \theta, z) \\ E_y(r, \theta, z) \\ E_z(r, \theta, z) \end{bmatrix}$ est un champ symétrique donné par (4), alors on a une égalité des traces de la forme du champ tangent anti-symétrique:

$$E \wedge \vec{\tau}_n = -u_\theta \sin m\theta \cdot \vec{\tau}_{rz} + \cos m\theta \left(\begin{bmatrix} u_r \\ 0 \\ u_z \end{bmatrix} \cdot \vec{\tau}_{rz}(\theta = 0) \right) \cdot \vec{\tau}_\theta. \quad (102)$$

D'où l'expression des décompositions précédentes si E est pris sous la forme (9) ou (10) dans la définition (4).

On définit successivement les fonctions suivantes (on ne les écrit que pour le courant J), pour $m \geq 0$:

$$J_{rz}^m(s) = \mathfrak{J}_{rz}^m(s) \vec{\tau}_{rz} \quad (103)$$

$$J_\theta^{-m}(s) = \mathfrak{J}_\theta^{-m}(s) \vec{\tau}_\theta \quad (104)$$

pour $m \geq 1$:

$$J_{rz}^{-m}(s) = \mathfrak{J}_{rz}^{-m}(s) \vec{\tau}_{rz} \quad (105)$$

$$J_\theta^m = \mathfrak{J}_\theta^m(s) \vec{\tau}_\theta \quad (106)$$

de telle sorte que:

$$J(x) = \tilde{J}(s, \theta) = \sum_{m \geq 0} (J_{rz}^m \cdot \cos m\theta + J_\theta^m \cdot \sin m\theta) + \sum_{m \geq 0} (J_{rz}^{-m} \cdot \sin m\theta + J_\theta^{-m} \cdot \cos m\theta) \quad (107)$$

On va montrer que dans le cas du couplage volumique et surfacique des équations de Maxwell, le problème global se découple en des problèmes élémentaires pour chaque mode de Fourier, de la manière suivante: chaque problème élémentaire est posé en les inconnues (E^m, J^m) et ces simplifications résultent de la nullité des produits $L^2(\Gamma)$ des courants $M^{-m} (= (E^m \wedge n)|_\Gamma)$ et J^m .

7.4. Formulation axisymétrique couplée volumique et surfacique des équations de Maxwell

On se donne quatre champs tangents au domaine O , sous la forme (103)-(106), pour les courants J et pour les courants M :

$$J^m = \mathfrak{J}_{rz}^m \cos m\theta \vec{\tau}_{rz} + \mathfrak{J}_\theta^m \sin m\theta \vec{\tau}_\theta \quad (108)$$

$$J^{-m} = \mathfrak{J}_{rz}^{-m} \sin m\theta \vec{\tau}_{rz} + \mathfrak{J}_\theta^{-m} \cos m\theta \vec{\tau}_\theta$$

et:

$$M^m = \mathfrak{m}_{rz}^m \cos m\theta \vec{\tau}_{rz} + \mathfrak{m}_\theta^m \sin m\theta \vec{\tau}_\theta \quad (109)$$

$$M^{-m} = \mathfrak{m}_{rz}^{-m} \sin m\theta \vec{\tau}_{rz} + \mathfrak{m}_\theta^{-m} \cos m\theta \vec{\tau}_\theta$$

On va calculer maintenant l'expression variationnelle fournie par (58),(62).

Tout d'abord on détermine le premier terme de (58):

$$\int_{\partial O} \int_{\partial O} i\omega\mu_0 \Phi(x-y) J(x) \cdot J'(y) d\gamma(x) d\gamma(y). \quad (110)$$

On est amené à calculer les termes suivants (avec une notation abusive pour Φ et en divisant par π chacune des expressions):

$$\mathcal{I}_a(J, J') = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma \times T_1} \int_{\Gamma \times T_1} i\omega\mu_0 \Phi(R) \tilde{J}(s, \theta) \cdot \tilde{J}'(s', \theta') rr' ds ds' d\theta d\theta' \quad (111)$$

On choisit J donné par (107) et J' , pour $m' > 0$, donné par $\tilde{J}'(s', \theta') = J_{rz}^{m'} \cos m' \theta' + J_{\theta}^{m'} \sin m' \theta'$.
On introduit ici la variable $\phi = \theta - \theta'$. Comme R est une fonction des variables r, r', z, z', ϕ , chacune des expressions

$$J_{rz}^m . J_{rz}^{m'} , J_{\theta}^m . J_{rz}^{m'} , J_{rz}^m . J_{\theta}^{m'} , J_{\theta}^m . J_{\theta}^{m'} \text{ et } J_{rz}^{-m} . J_{rz}^{m'} , J_{\theta}^{-m} . J_{rz}^{m'} , J_{rz}^{-m} . J_{\theta}^{m'} , J_{\theta}^{-m} . J_{\theta}^{m'} , \quad (112)$$

est une fonction 2π -périodique en la variable ϕ , ne dépendant sur Γ , que de s, s' et ϕ . C'est le **premier argument de simplification des intégrales**. On a (en lisant $\theta' = \theta - \phi$):

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_a(J, J') &= \frac{i\omega\mu_0}{2\pi} \times \\ &\sum_{m \geq 0} \int_0^{2\pi} \left[\int_{\theta}^{\theta+2\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \Phi(R) \cdot \{ J_{rz}^m . J_{rz}^{m'} \cos m\theta \cos m'\theta' + J_{\theta}^m . J_{rz}^{m'} \sin m\theta \cos m'\theta' + J_{rz}^m . J_{\theta}^{m'} \cos m\theta \sin m'\theta' \right. \\ &+ J_{\theta}^m . J_{\theta}^{m'} \sin m\theta \sin m'\theta' + J_{rz}^{-m} . J_{rz}^{m'} \sin m\theta \cos m'\theta' + J_{\theta}^{-m} . J_{rz}^{m'} \cos m\theta \cos m'\theta' \\ &\left. + J_{rz}^{-m} . J_{\theta}^{m'} \sin m\theta \sin m'\theta' + J_{\theta}^{-m} . J_{\theta}^{m'} \cos m\theta \sin m'\theta' \right] rr' ds ds' d\phi \end{aligned} \quad (113)$$

L'intégrale en θ , permet de simplifier l'expression de \mathcal{I} . En effet, à l'aide des égalités simples:

$$m\theta + m'\theta' = -m'\phi + (m + m')\theta \quad (114)$$

$$m\theta - m'\theta' = m'\phi + (m - m')\theta$$

on a les relations suivantes:

$$\cos m\theta . \cos m'\theta' = \cos m\theta . \cos m'\theta . \cos m'\phi + \cos m\theta . \sin m'\theta . \sin m'\phi \quad (115)$$

$$\cos m\theta . \sin m'\theta' = \cos m\theta . \sin m'\theta . \cos m'\phi - \cos m\theta . \cos m'\theta . \sin m'\phi \quad (116)$$

$$\sin m\theta . \cos m'\theta' = \sin m\theta . \cos m'\theta . \cos m'\phi + \sin m\theta . \sin m'\theta . \sin m'\phi \quad (117)$$

et enfin:

$$\sin m\theta . \sin m'\theta' = \sin m\theta . \sin m'\theta . \cos m'\phi - \sin m\theta . \cos m'\theta . \sin m'\phi \quad (118)$$

Or on a les résultats classiques, et pour tout m et tout m' :

$$\text{d'une part } \int_{-\pi}^{\pi} \sin m\theta . \cos m'\theta' d\theta = 0 , \text{ et d'autre part } \int_{-\pi}^{\pi} \cos m\theta . \cos m'\theta' d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sin m\theta . \sin m'\theta' d\theta = \pi \delta_{mm'} \quad (119)$$

Et donc en fait on a les simplifications suivantes dans l'intégrale \mathcal{I} :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \cos m\theta . \cos m'\theta' d\theta d\theta' &\longrightarrow \pi \int_{-\pi}^{\pi} \cos m\phi d\phi \\ \int_0^{2\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \cos m\theta . \sin m'\theta' d\theta d\theta' &\longrightarrow -\pi \int_{-\pi}^{\pi} \sin m\phi d\phi \\ \int_0^{2\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \sin m\theta . \cos m'\theta' d\theta d\theta' &\longrightarrow \pi \int_{-\pi}^{\pi} \sin m\phi d\phi \\ \int_0^{2\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \sin m\theta . \sin m'\theta' d\theta d\theta' &\longrightarrow \pi \int_{-\pi}^{\pi} \cos m\phi d\phi \end{aligned} \quad (120)$$

De telle sorte que, d'une part les annulations des intégrales pour $m \neq m'$, et d'autre part l'imparité en la variable ϕ - c'est le **second argument de simplification des intégrales** - des fonctions suivantes, utilisant aussi les résultats ci-dessus (98):

$$J_{rz}^{-m}.J_{rz}'^{m'} \sin m\phi, J_{\theta}^{-m}.J_{rz}'^{m'} \cos m\phi, J_{rz}^{-m}.J_{\theta}'^{m'} \cos m\phi, J_{\theta}^{-m}.J_{\theta}'^{m'} \sin m\phi, \quad (121)$$

conduisent à l'expression:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_a(J, J') = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} i\omega\mu_0\Phi(R) \{ & (J_{rz}^m(s).J_{rz}'^m(s') + J_{\theta}^m(s).J_{\theta}'^m(s')) \cos m\phi + \\ & (J_{\theta}^m(s).J_{rz}'^m(s') - J_{rz}^m(s).J_{\theta}'^m(s')) \sin m\phi\} rr' ds ds' d\phi, \end{aligned} \quad (122)$$

soit:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_a(J, J') = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} i\omega\mu_0\Phi(R) \{ & (j_{rz}^m j_{rz}'^m(\vec{\tau}_{rz} \cdot \vec{\tau}'_{rz}) + j_{\theta}^m j_{\theta}'^m(\vec{\tau}_{\theta} \cdot \vec{\tau}'_{\theta})) \cos m\phi + \\ & (j_{\theta}^m j_{rz}'^m(\vec{\tau}_{\theta} \cdot \vec{\tau}'_{rz}) - j_{rz}^m j_{\theta}'^m(\vec{\tau}_{rz} \cdot \vec{\tau}'_{\theta})) \sin m\phi\} rr' ds ds' d\phi \end{aligned} \quad (123)$$

L'expression équivalente pour les courants M est donc aussi l'expression:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_a^-(M, M') = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} i\omega\varepsilon_0\Phi(R) \{ & (M_{rz}^{-m}(s).M_{rz}'^{-m}(s') + M_{\theta}^{-m}(s).M_{\theta}'^{-m}(s')) \cos m\phi + \\ & (M_{rz}^{-m}(s).M_{\theta}'^{-m}(s') - M_{\theta}^{-m}(s).M_{rz}'^{-m}(s')) \sin m\phi\} rr' ds ds' d\phi \end{aligned} \quad (124)$$

soit:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_a^-(M, M') = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} i\omega\varepsilon_0\Phi(R) \{ & (m_{rz}^m m_{rz}'^m(\vec{\tau}_{rz} \cdot \vec{\tau}'_{rz}) + m_{\theta}^m m_{\theta}'^m(\vec{\tau}_{\theta} \cdot \vec{\tau}'_{\theta})) \cos m\phi - \\ & (m_{\theta}^m m_{rz}'^m(\vec{\tau}_{\theta} \cdot \vec{\tau}'_{rz}) - m_{rz}^m m_{\theta}'^m(\vec{\tau}_{rz} \cdot \vec{\tau}'_{\theta})) \sin m\phi\} rr' ds ds' d\phi \end{aligned} \quad (125)$$

On développe l'intégrale double de (58),(62) relative aux divergences surfaciques de J et M . D'abord l'expression en J :

$$\mathcal{I}_b(J, J') = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma \times T_1} \int_{\Gamma \times T_1} \frac{\Phi(R)}{i\omega\varepsilon_0} \operatorname{div}_{\Gamma} \tilde{J}(s, \theta) \operatorname{div}_{\Gamma} \tilde{J}'(s', \theta') \} rr' ds ds' d\theta d\theta' \quad (126)$$

L'expression des divergences surfaciques est la suivante, d'après (91):

$$\operatorname{div}_{\Gamma} J^m(s, \theta) = \left(\frac{\partial j_{rz}^m}{\partial s}(s) + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} j_{rz}^m(s) + \frac{m}{r} j_{\theta}^m(s) \right) \cdot \cos m\theta \quad (127)$$

et:

$$\operatorname{div}_{\Gamma} J^{-m}(s, \theta) = \left(\frac{\partial j_{rz}^{-m}}{\partial s}(s) + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} j_{rz}^{-m}(s) - \frac{m}{r} j_{\theta}^{-m}(s) \right) \cdot \sin m\theta \quad (128)$$

Des calculs identiques à ceux qui précèdent conduisent à l'expression suivante:

$$\mathcal{I}_b(J, J') = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{\Phi}{i\omega\varepsilon_0} \left\{ \left(\frac{\partial j_{rz}^m}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} j_{rz}^m + \frac{m}{r} j_{\theta}^m \right)(s) \cdot \left(\frac{\partial j_{rz}'^m}{\partial s} + \frac{1}{r'} \frac{\partial r'}{\partial s} j_{rz}'^m + \frac{m}{r'} j_{\theta}'^m \right)(s') \cos m\phi \right\} rr' ds ds' d\phi \quad (129)$$

et à l'expression suivante pour les courants M :

$$\mathcal{I}_b^-(M, M') = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{\Phi}{i\omega\mu_0} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{m}_{rz}^{-m}}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \mathbf{m}_{rz}^{-m} - \frac{m}{r} \mathbf{m}_{\theta}^{-m} \right) (s) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{m}'_{rz}}{\partial s} + \frac{1}{r'} \frac{\partial r'}{\partial s} \mathbf{m}'_{rz} - \frac{m}{r'} \mathbf{m}'_{\theta} \right) (s') \cos m\phi \right\} rr' ds ds' d\phi \quad (130)$$

De la même manière on développe l'intégrale double de (58),(62) comportant des produits mixtes:

$$\int_{\partial O} \int_{\partial O} \nabla \Phi(x-y) \cdot (J(x) \wedge M'(y)) d\gamma(x) d\gamma(y). \quad (131)$$

La dépendance de la variable ϕ se trouve dans les produits scalaires (98) et d'autre part dans le module R donné par (75). On note donc encore sans ambiguïté:

$$\Phi(s, s', \phi) = \frac{1}{4\pi R} e^{ikR} \quad (132)$$

et de même:

$$\nabla \Phi(s, s', \phi) = \frac{1}{R} (ik - \frac{1}{R}) \cdot \Phi(s, s', \phi) \cdot \overrightarrow{MM'} \quad (133)$$

où $\overrightarrow{MM'}$ est fournit par (79).

Pour cela on pose, si g_{θ}, g_{rz}, g_n sont des fonctions des variables s, s', ϕ :

$$\nabla \Phi = \overrightarrow{g}(s, s', \phi) = g_{\theta}(s, s', \phi) \overrightarrow{\tau}_{\theta} + g_{rz}(s, s', \phi) \overrightarrow{\tau}_{rz} + g_n(s, s', \phi) \overrightarrow{\tau}_n$$

On est amené à calculer les termes suivants:

$$\mathcal{I}_c(J, M') = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma \times T_1} \int_{\Gamma \times T_1} \overrightarrow{g} \cdot (\tilde{J}(s, \theta) \wedge \tilde{M}'(s', \theta')) rr' ds ds' d\theta d\theta' \quad (134)$$

On choisit J donné par (107) et M' , pour $m' > 0$, donné par $\tilde{M}'(s', \theta') = M_{rz}^{-m'} \sin m'\theta' + M_{\theta}^{-m'} \cos m'\theta'$.
On a ici pour (134), en omettant les variables, et en notant ' les fonctions de la variable s' :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_c(J, M') &= \frac{1}{\pi} \times \\ &\sum_{m \geq 0} \int_0^{2\pi} \left[\int_{\theta}^{\theta+2\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \overrightarrow{g} \cdot \{ J_{rz \wedge}^m M_{rz}^{-m'} \cos m\theta \sin m'\theta' + J_{\theta \wedge}^m M_{rz}^{-m'} \sin m\theta \sin m'\theta' + J_{rz \wedge}^m M_{\theta}^{-m'} \cos m\theta \cos m'\theta' \right. \\ &+ J_{\theta \wedge}^m M_{\theta}^{-m'} \sin m\theta \cos m'\theta' + J_{rz \wedge}^m M_{rz}^{-m'} \sin m\theta \sin m'\theta' + J_{\theta \wedge}^m M_{rz}^{-m'} \cos m\theta \sin m'\theta' \\ &\left. + J_{rz \wedge}^m M_{\theta}^{-m'} \sin m\theta \cos m'\theta' + J_{\theta \wedge}^m M_{\theta}^{-m'} \cos m\theta \cos m'\theta' \right] rr' ds ds' d\phi] d\theta \end{aligned} \quad (135)$$

On peut vérifier à l'aide des relations ci-dessus, que la cinquième somme ci-dessus fournit le terme impair suivant:

$$\overrightarrow{g} \cdot (J_{rz \wedge}^{-m} M_{rz}^{-m'}) \sin m\theta \sin m'\theta' = \pi (-g_{\theta}(\overrightarrow{\tau}_{rz} \cdot \overrightarrow{\tau}_n) + g_n(\overrightarrow{\tau}_{rz} \cdot \overrightarrow{\tau}_{\theta})) \cdot i_{rz}^{-m} \mathbf{m}_{rz}^{-m} \cos m\phi$$

Et donc encore à l'aide des simplifications (120) et de l'imparité des fonctions (annulant les intégrales):

$$\overrightarrow{g} \cdot (J_{\theta \wedge}^{-m} M_{rz}^{-m'}) \cdot \cos m\theta \sin m'\theta' ; \overrightarrow{g} \cdot (J_{rz \wedge}^{-m} M_{\theta}^{-m'}) \cdot \sin m\theta \cos m'\theta' ; \overrightarrow{g} \cdot (J_{\theta \wedge}^{-m} M_{\theta}^{-m'}) \cdot \cos m\theta \cos m'\theta' ;$$

il vient l'expression suivante:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_c(J, M') = & \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \{ \cos m\phi (i_{\theta}^m \mathbf{m}'_{rz}{}^{-m} (g_n(\vec{\tau}_{\theta} \cdot \vec{\tau}'_{\theta}) - g_{\theta}(\vec{\tau}_{\theta} \cdot \vec{\tau}'_n)) + i_{rz}^m \mathbf{m}'_{\theta}{}^{-m} (g_{rz}(\vec{\tau}_{rz} \cdot \vec{\tau}'_n) - g_n(\vec{\tau}_{rz} \cdot \vec{\tau}'_{rz}))) \\ & + \sin m\phi (-i_{rz}^m \mathbf{m}'_{rz}{}^{-m} (g_n(\vec{\tau}_{rz} \cdot \vec{\tau}'_{\theta}) - g_{\theta}(\vec{\tau}_{rz} \cdot \vec{\tau}'_n)) + i_{\theta}^m \mathbf{m}'_{\theta}{}^{-m} (g_{rz}(\vec{\tau}_{\theta} \cdot \vec{\tau}'_n) - g_n(\vec{\tau}_{\theta} \cdot \vec{\tau}'_{rz}))) \} rr' ds ds' d\phi \end{aligned} \quad (136)$$

Remarque 7.2. Il faut noter que la forme $\mathcal{I}_c(J, M')$ est antisymétrique à cause des propriétés des fonctions de base ($\mathbf{m}_{rz}^{-m} = i_{\theta}^m$ et $\mathbf{m}_{\theta}^{-m} = i_{rz}^m$), et parce que d'autre part le gradient \vec{g} change de signe.

De même on doit calculer l'expression:

$$\mathcal{I}_c^{-}(M, J') = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma \times T_1} \int_{\Gamma \times T_1} \vec{g} \cdot (\tilde{M}(s, \theta) \wedge \tilde{J}'(s', \theta')) rr' ds ds' d\theta d\theta' \quad (137)$$

Il vient alors pour des raisons identiques:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_c^{-}(M, J') = & \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \{ \cos m\phi (\mathbf{m}_{rz}^{-m} i_{\theta}^m (g_{rz}(\vec{\tau}_{rz} \cdot \vec{\tau}'_n) - g_n(\vec{\tau}_{rz} \cdot \vec{\tau}'_{rz})) + \mathbf{m}_{\theta}^{-m} i_{rz}^m (g_n(\vec{\tau}_{\theta} \cdot \vec{\tau}'_{\theta}) - g_{\theta}(\vec{\tau}_{\theta} \cdot \vec{\tau}'_n))) \\ & + \sin m\phi (\mathbf{m}_{rz}^{-m} i_{rz}^m (g_n(\vec{\tau}_{rz} \cdot \vec{\tau}'_{\theta}) - g_{\theta}(\vec{\tau}_{rz} \cdot \vec{\tau}'_n)) - \mathbf{m}_{\theta}^{-m} i_{\theta}^m (g_{rz}(\vec{\tau}_{\theta} \cdot \vec{\tau}'_n) - g_n(\vec{\tau}_{\theta} \cdot \vec{\tau}'_{rz}))) \} rr' ds ds' d\phi \end{aligned} \quad (138)$$

Remarque 7.3. Pour $m = 0$, on peut vérifier que l'on a:

$$\mathcal{I}_c(J, M') = 2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \{ i_{\theta}^0 \mathbf{m}_{rz}^0 (g_n(\vec{\tau}_{\theta} \cdot \vec{\tau}'_{\theta}) - g_{\theta}(\vec{\tau}_{\theta} \cdot \vec{\tau}'_n)) + i_{rz}^0 \mathbf{m}_{\theta}^0 (g_{rz}(\vec{\tau}_{rz} \cdot \vec{\tau}'_n) - g_n(\vec{\tau}_{rz} \cdot \vec{\tau}'_{rz})) \} rr' ds ds' d\phi \quad (139)$$

De la même manière on développe les intégrales simples de (58),(62) comportant des produits mixtes:

$$\mathcal{I}_d(J, M') = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial O} (J(x) \wedge M'(x)) \cdot \vec{n} \, d\gamma(x) \quad (140)$$

et:

$$\mathcal{I}_d^{-}(M, J') = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial O} (M(x) \wedge J'(x)) \cdot \vec{n} \, d\gamma(x) \quad (141)$$

Si on choisit J donné par (107) et M' , pour $m' > 0$, donné par $\tilde{M}'(s', \theta') = M_{rz}^{-m'} \sin m' \theta' + M_{\theta}^{-m'} \cos m' \theta'$, alors l'expression (140) se développe sous la forme suivante:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\Gamma} \{ i_{rz}^m \mathbf{m}'_{\theta}{}^{-m} (\vec{\tau}_{rz} \wedge \vec{\tau}_{\theta}) \cos m\theta \cos m\theta + i_{\theta}^m \mathbf{m}'_{rz}{}^{-m} (\vec{\tau}_{\theta} \wedge \vec{\tau}_{rz}) \sin m\theta \sin m\theta \} \cdot \vec{\tau}'_n \, r ds d\theta \quad (142)$$

soit encore l'expression, avec $(\vec{\tau}_{\theta} \wedge \vec{\tau}_{rz}) \cdot \vec{\tau}'_n = 1$:

$$\mathcal{I}_d(J, M') = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (i_{\theta}^m \mathbf{m}'_{rz}{}^{-m} - i_{rz}^m \mathbf{m}'_{\theta}{}^{-m}) r ds \quad (143)$$

et donc, de même, il vient:

$$\mathcal{I}_d^{-}(M, J') = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{m}_{\theta}^{-m} i_{rz}^m - \mathbf{m}_{rz}^{-m} i_{\theta}^m) r ds \quad (144)$$

On détermine les différents termes de (58), *i.e.* la partie *cfie*, en commençant par:

$$\mathcal{I}_{a.cfie}(M, J') = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma \times T_1} \int_{\Gamma \times T_1} i\omega\varepsilon_0 \Phi(R) \tilde{M}(s, \theta) \cdot (n_{\wedge} \tilde{J}'(s', \theta')) rr' ds ds' d\theta d\theta' \quad (145)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a.cfie}(M, J') &= \frac{i\omega\varepsilon_0}{\pi} \times \\ &\sum_{m \geq 0} \int_0^{2\pi} \left[\int_{\theta}^{\theta+2\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \Phi(R) \{ M_{rz}^{-m} \cdot (n_{\wedge} J_{rz}'^{m'}) \sin m\theta \cos m'\theta' + M_{\theta}^{-m} \cdot (n_{\wedge} J_{rz}'^{m'}) \cos m\theta \cos m'\theta' \right. \\ &\left. + M_{rz}^{-m} \cdot (n_{\wedge} J_{\theta}'^{m'}) \sin m\theta \sin m'\theta' + M_{\theta}^{-m} \cdot (n_{\wedge} J_{\theta}'^{m'}) \cos m\theta \sin m'\theta' \right] rr' ds ds' d\phi d\theta \end{aligned} \quad (146)$$

soit encore:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a.cfie}(M, J') &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} i\omega\varepsilon_0 \Phi(R) \{ (M_{rz}^{-m} \cdot (n_{\wedge} J_{rz}'^m) - M_{\theta}^{-m} \cdot (n_{\wedge} J_{\theta}'^m)) \sin m\phi \\ &+ (M_{\theta}^{-m} \cdot (n_{\wedge} J_{rz}'^m) + M_{rz}^{-m} \cdot (n_{\wedge} J_{\theta}'^m)) \cos m\phi \} rr' ds ds' d\phi \end{aligned} \quad (147)$$

d'où pour finir:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a.cfie}(M, J') &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} i\omega\varepsilon_0 \Phi(R) \{ \sin m\phi (-\mathbf{m}_{rz}^{-m} i_{rz}'^m(\vec{\tau}_{rz} \cdot \vec{\tau}_{\theta}') - \mathbf{m}_{\theta}^{-m} i_{\theta}'^m(\vec{\tau}_{\theta} \cdot \vec{\tau}_{rz}')) \\ &+ \cos m\phi (-\mathbf{m}_{\theta}^{-m} i_{rz}'^m(\vec{\tau}_{\theta} \cdot \vec{\tau}_{\theta}') + \mathbf{m}_{rz}^{-m} i_{\theta}'^m(\vec{\tau}_{rz} \cdot \vec{\tau}_{rz}')) \} rr' ds ds' d\phi \end{aligned} \quad (148)$$

La seconde expression de (58) est la suivante:

$$\mathcal{I}_{b.cfie}(M, J') = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma \times T_1} \int_{\Gamma \times T_1} \frac{-1}{i\omega\mu_0} \nabla_y \Phi(R) \operatorname{div}_{\Gamma} \tilde{M}(s, \theta) \cdot (n_{\wedge} \tilde{J}'(s', \theta')) rr' ds ds' d\theta d\theta' \quad (149)$$

soit encore avec le changement de variable ϕ :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{b.cfie}(M, J') &= \frac{1}{\pi} \sum_{m \geq 0} \int_0^{2\pi} \left[\int_{\theta}^{\theta+2\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{-1}{i\omega\mu_0} \left(\frac{\partial \mathbf{m}_{rz}^{-m}}{\partial s}(s) + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \mathbf{m}_{rz}^{-m}(s) - \frac{m}{r} \mathbf{m}_{\theta}^{-m}(s) \right) \vec{g} \cdot \right. \\ &\left. \{ (n_{\wedge} \tilde{J}_{rz}'^{m'}) \sin m\theta \cdot \cos m'\theta' + (n_{\wedge} \tilde{J}_{\theta}'^{m'}) \sin m\theta \cdot \sin m'\theta' \} rr' ds ds' d\phi d\theta \right] \end{aligned} \quad (150)$$

et finalement:

$$\mathcal{I}_{b.cfie}(M, J') = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{-1}{i\omega\mu_0} \left(\frac{\partial \mathbf{m}_{rz}^{-m}}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \mathbf{m}_{rz}^{-m} - \frac{m}{r} \mathbf{m}_{\theta}^{-m} \right) (-g_{\theta} i_{rz}'^m \sin m\phi + g_{rz} i_{\theta}'^m \cos m\phi) rr' ds ds' d\phi \quad (151)$$

La troisième expression est la suivante:

$$\mathcal{I}_{c.cfie}(J, J') = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma \times T_1} \int_{\Gamma \times T_1} \vec{g} \cdot (\tilde{J}(s, \theta)_{\wedge} (n_{\wedge} \tilde{J}'(s', \theta'))) rr' ds ds' d\theta d\theta' \quad (152)$$

soit encore avec le changement de variable ϕ :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{c.cfie}(J, J') &= \frac{1}{\pi} \sum_{m \geq 0} \int_0^{2\pi} \left[\int_{\theta}^{\theta+2\pi} \int_{\Gamma} \vec{g} \cdot \{J_{rz \wedge}^m (n_{\wedge} J_{rz}^{m'}) \cos m\theta \cdot \cos m'\theta' + J_{rz \wedge}^m (n_{\wedge} J_{\theta}^{m'}) \cos m\theta \cdot \sin m'\theta' \right. \\ &\quad \left. + J_{\theta}^m (n_{\wedge} J_{rz}^{m'}) \sin m\theta \cdot \cos m'\theta' + J_{\theta}^m (n_{\wedge} J_{\theta}^{m'}) \sin m\theta \cdot \sin m'\theta' \right] rr' ds ds' d\phi d\theta \end{aligned} \quad (153)$$

et finalement (ou si l'on veut en changeant ce qu'il doit l'être dans (136)):

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{c.cfie}(J, J') &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \cos m\phi \{ -j_{rz}^m j_{rz}^m (g_{rz}(\vec{\tau}_{rz} \cdot \vec{\tau}'_n) - g_n(\vec{\tau}_{rz} \cdot \vec{\tau}'_{rz})) + j_{\theta}^m j_{\theta}^m (-g_{\theta}(\vec{\tau}_{\theta} \cdot \vec{\tau}'_n) + g_n(\vec{\tau}_{\theta} \cdot \vec{\tau}'_{\theta})) \} \\ &\quad + \sin m\phi \{ -j_{rz}^m j_{\theta}^m (-g_{\theta}(\vec{\tau}_{rz} \cdot \vec{\tau}'_n) + g_n(\vec{\tau}_{rz} \cdot \vec{\tau}'_{\theta})) - j_{\theta}^m j_{rz}^m (g_{rz}(\vec{\tau}_{\theta} \cdot \vec{\tau}'_n) - g_n(\vec{\tau}_{\theta} \cdot \vec{\tau}'_{rz})) \} rr' ds ds' d\phi \end{aligned} \quad (154)$$

enfin la dernière expression de (58):

$$\mathcal{I}_{d.cfie}(J, J') = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial O} J(x) \cdot J'(x) d\gamma(x) \quad (155)$$

qui vaut:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\Gamma} \{ j_{rz}^m j_{rz}^m (\vec{\tau}_{rz} \cdot \vec{\tau}'_{rz}) \cos m\theta \cos m\theta + j_{\theta}^m j_{\theta}^m (\vec{\tau}_{\theta} \cdot \vec{\tau}'_{\theta}) \sin m\theta \sin m\theta \} r ds d\theta \quad (156)$$

soit encore l'expression:

$$\mathcal{I}_{d.cfie}(J, J') = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (j_{rz}^m j_{rz}^m + j_{\theta}^m j_{\theta}^m) r ds \quad (157)$$

On démontre ainsi comme en dimension 3 des champs (éq.(15)), que les problèmes se découpent pour chaque mode de Fourier. C'est cette expression qui nous permet d'écrire chaque terme de l'équation (58),(62), en géométrie axisymétrique, en découplant le problème global, en un problème pour chaque mode de Fourier. En géométrie axisymétrique, la formulation des équations de Maxwell couplées provient donc immédiatement du remplacement dans (58),(62) des intégrales sur $\Gamma \times T_1$ par des intégrales sur Γ et en formulant les opérateurs $\nabla_{|\Gamma}$ et $div_{|\Gamma}$ dans les variables (r, z) . obtenus au paragraphe précédent. On utilise pour cela les différents résultats (122) et (124), (129) et (130), (136) et (138), (143) et (144), (148), (151), (154) et (157), en divisant par π . Alors, la formulation variationnelle du problème couplé est finalement l'ensemble des deux expressions suivantes, traductions des problèmes (58) et (62):

$$\begin{aligned} &\eta \{ \mathcal{I}_a(J, J') + \mathcal{I}_b(J, J') - \mathcal{I}_c^-(M, J') - \mathcal{I}_d^-(M, J') \} \\ &\quad - Z(1 - \eta) \{ \mathcal{I}_{a.cfie}(M, J') + \mathcal{I}_{b.cfie}(M, J') + \mathcal{I}_{c.cfie}(J, J') + \mathcal{I}_{d.cfie}(J, J') \} \\ &= \frac{Z(1 - \eta)}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\Gamma} H^{inc} \cdot (j_{\theta}^m \sin m\theta \vec{\tau}_{rz} - j_{rz}^m \cos m\theta \vec{\tau}_{\theta}) r ds d\theta - \frac{\eta}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\Gamma} E^{inc} \cdot (j_{rz}^m \cos m\theta \vec{\tau}_{rz} + j_{\theta}^m \sin m\theta \vec{\tau}_{\theta}) r ds d\theta \end{aligned} \quad (158)$$

$$\begin{aligned}
& - \mathcal{I}_a^-(M, M') - \mathcal{I}_b^-(M, M') - \mathcal{I}_c(J, M') + \mathcal{I}_d(J, M') - \int_{\Omega} i\omega\varepsilon(E_r^m \cdot E_r'^m + E_{\theta}^m \cdot E_{\theta}'^m + E_z^m \cdot E_z'^m) r dr dz \\
& - \int_{\Omega} \frac{1}{i\omega\mu} \left(\frac{\partial E_{\theta}^m}{\partial r} + \frac{1}{r}(E_{\theta}^m + m u_r^m) \right) \left(\frac{\partial E_{\theta}'^m}{\partial r} + \frac{1}{r}(E_{\theta}'^m + m E_r'^m) \right) r dr dz \\
& - \int_{\Omega} \frac{1}{i\omega\mu} \left(\frac{\partial E_r^m}{\partial z} - \frac{\partial E_z^m}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial E_r'^m}{\partial z} - \frac{\partial E_z'^m}{\partial r} \right) r dr dz - \int_{\Omega} \frac{1}{i\omega\mu} \left(\frac{m}{r} E_z^m + \frac{\partial E_{\theta}^m}{\partial z} \right) \left(\frac{m}{r} E_z'^m + \frac{\partial E_{\theta}'^m}{\partial z} \right) r dr dz \\
& = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\Gamma} \{ H^{inc} \cdot (\mathbf{m}'_{rz}{}^{-m} \sin m\theta \vec{\tau}_{rz} + \mathbf{m}'_{\theta}{}^{-m} \cos m\theta \vec{\tau}_{\theta}) \} r ds d\theta
\end{aligned} \tag{159}$$

C'est précisément l'ensemble d'équations (158)-(159) que l'on se propose d'approcher à l'aide de bases d'éléments finis de classe $H(rot)$ pour Ω et $H(div)$ pour Γ , compatibles entre elles. On en détaille les calculs au paragraphe 10.2.

8. LES ÉLÉMENTS FINIS $H(rot)$ DE MAXWELL-FOURIER [24]

On s'intéresse dans ce paragraphe à la construction d'éléments finis unisolvents et conformes dans l'espace \mathcal{H}^m pour le n -ième mode de Fourier [20]. Pour déterminer de tels éléments, on choisit comme domaine géométrique élémentaire un triangle K du plan rz . On cherche comme espace de polynômes d'approximation un espace \mathcal{P} de dimension finie, et un ensemble de formes linéaires (les degrés de liberté) et vérifiant la propriété d'unisolvence. Deux cas sont discutés: le cas général $m \geq 1$ et son équivalent immédiat $m \leq -1$, et le cas $m = 0$ correspondant au mode fondamental Fourier. Pour $u^m = (u_r^m, u_{\theta}^m, u_z^m)$, les inconnues initiales du problème (6), on introduit les deux vecteurs (voir (19) et la remarque 4.7),

$$U^m = \begin{bmatrix} U_r^m \\ U_z^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u_r^m + u_{\theta}^m}{r} + \frac{\partial u_{\theta}^m}{\partial r} \\ \frac{u_z^m}{r} + \frac{\partial u_{\theta}^m}{\partial z} \end{bmatrix} \text{ et } u_{mer}^m = \begin{bmatrix} u_r^m \\ u_z^m \end{bmatrix} \tag{160}$$

On a évidemment la proposition suivante, résultant de la définition de \mathcal{H}^m

Proposition 8.1. *une condition nécessaire et suffisante pour que u^m appartienne à $\mathcal{H}^m(\Omega)$, pour un ouvert axisymétrique Ω , est que les fonctions u_{θ}^m et $(\frac{\partial u_r^m}{\partial z} - \frac{\partial u_z^m}{\partial r})$ appartiennent à l'espace $L_1^2(\Omega)$, et que les champs u_{mer}^m et U^m appartiennent à l'espace vectoriel $(L_1^2(\Omega))^2$.*

A cette fin on introduit la notion d'*inconnues principales*.

Définition 8.2. les inconnues supposées polynômiales en les variables r et z , sont dites *principales*, si les autres fonctions dont l'appartenance à L_1^2 est requise, sont aussi des polynômes à cause de leur propre expression en les inconnues.

Ce n'est pas le cas des inconnues initiales $(u_r^m, u_{\theta}^m, u_z^m)$ à cause de la présence de la variable r au dénominateur de $rot_r u$.

8.1. Modes de rang autres que zéro

On choisit comme inconnues principales pour ces modes, les fonctions: $(U_r^m, u_\theta^m, U_z^m)$. Pour $m \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} U_r^m &= \frac{1}{r}(mu_r^m + \frac{\partial(ru_\theta^m)}{\partial r}) \quad \text{ou} \quad u_r^m = \frac{1}{m}(rU_r^m - \frac{\partial(ru_\theta^m)}{\partial r}) \\ U_z^m &= \frac{1}{r}(mu_z^m + \frac{\partial(ru_\theta^m)}{\partial z}) \quad \text{ou} \quad u_z^m = \frac{1}{m}(rU_z^m - \frac{\partial(ru_\theta^m)}{\partial z}) \end{aligned} \quad (161)$$

De plus on a les 3 conditions d'appartenance à L_1^2 et relative à u_r^m, u_z^m et $(\frac{\partial u_r^m}{\partial z} - \frac{\partial u_z^m}{\partial r})$.

Pour u_r^m, u_z^m , ces conditions se réduisent à l'appartenance à L_1^2 du gradient de (ru_θ^m) . Et pour la dernière condition on a :

$$(\frac{\partial u_z^m}{\partial r} - \frac{\partial u_r^m}{\partial z}) = \frac{1}{m} \text{rot}(rU^m)$$

Ces expressions sont polynômiales dès que u_θ^m, U_r^m, U_z^m le sont elles mêmes. C'est une situation analogue pour le coefficient de rang $m \geq 1$, pour la partie antisymétrique. C'est naturellement encore la même chose pour $m \leq -1$.

8.2. Modes de rang zéro

Partie symétrique de U^0 . Pour ce mode le nombre d'inconnues initiales est deux (u_r^0, u_z^0) . Elles sont principales puisque la seule condition de carré sommable concerne (avec le poids r) la fonction scalaire $(\frac{\partial u_r^0}{\partial z} - \frac{\partial u_z^0}{\partial r})$. Ici la situation pratique est la même que dans le cas classique à une dimension en variable cartésienne, donc on utilise des éléments finis standard.

Partie antisymétrique de U^0 . La solution unique du problème est la fonction u_θ^0 puisque $u_r^0 = u_z^0 = 0$, et le champ du plan U^0 se réduit à $\nabla(u_\theta^0)$. Cette inconnue n'est pas principale parce que le terme $\frac{u_\theta^0}{r}$ apparaît dans U^0 . L'inconnue naturelle est donc

$$\eta^0 = \frac{1}{r}u_\theta^0$$

puisque $u_\theta^0 = r\eta^0$ et $U^0 = \frac{1}{r}\nabla(r^2\eta^0)$ sont polynômiaux dès que η^0 est polynômial.

Il est clair que les résultats qui précèdent fournissent une méthode générale de construction d'éléments finis en les inconnues principales U^m et u_θ^m . Pour chacune d'entre elles on utilise respectivement des éléments finis standard pour les inconnues initiales u^m , seulement avec des polynômes d'ordre inférieur ou égal à 2.

8.3. Construction des éléments finis pour le problème de Maxwell-Fourier

Il résulte des paragraphes précédents que, dans un certain sens, on a séparé les variables du problème, en une inconnue scalaire u_θ et une inconnue vectorielle U . Par conséquent une étude d'éléments finis adaptés au problème, aboutit à l'approximation de u_θ par utilisation d'éléments finis de classe H^1 et par l'approximation de U par des éléments finis de classe $H(\text{rot})$. C'est ce que l'on propose de rappeler en utilisant des éléments finis avec des polynômes en la variable rz de degré deux, mais qui peuvent être généralisés à n'importe quel degré.

On considère le premier cas $|m| \geq 1$. Soit K un triangle du plan rz . D'après ce qui précède, on est en droit de considérer comme ensemble de degrés de liberté, agissant sur les fonctions de composantes u_r, u_θ, u_z

pour un certain $u \in \mathcal{H}^m(\Omega)$, ce qui suit (on a omis pour plus de clarté dans la suite les indices m pour u^m et U^m):

$$\sigma_\theta : u \rightarrow u_\theta(a) \quad (162)$$

si a est un sommet du triangle K , associé à:

$$\mathcal{P}_2 \text{ polynômes d'interpolation d'ordre } \leq 2 \quad (163)$$

D'autre part si Γ est une arête de K et τ un vecteur unité tangent à Γ , on peut considérer la circulation de U le long de Γ . C'est-à-dire que l'on prend comme degrés de liberté l'ensemble des formes linéaires suivantes:

$$\sigma_\Gamma : u \rightarrow \int_\Gamma \begin{bmatrix} \frac{mu_r + u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \\ \frac{mu_z}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \tau \, d\Gamma \quad (164)$$

En fait il apparaît plus approprié (et nous semble t-il équivalent vis-à-vis de l'ordre d'approximation) d'utiliser à la place des circulations ci-dessus, les suivantes:

$$\sigma_\Gamma : u \rightarrow \int_\Gamma \begin{bmatrix} \frac{mu_r + u_\theta}{r} \\ \frac{mu_z}{r} \end{bmatrix} \cdot \tau \, d\Gamma \quad (165)$$

De plus on sélectionne comme espace de polynômes l'ensemble des polynômes d'ordre 2, de classe $H(\text{rot}, \Omega)$, défini par Nédélec [31]:

$$\mathcal{R} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z^2 \\ -rz \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -rz \\ r^2 \end{bmatrix} \right\} \quad (166)$$

qui est un espace vectoriel polynômial de dimension 8.

On suppose que u , de composantes u_r, u_θ, u_z , et U comme au-dessus sont des polynômes de degré 2, exactement déterminés par 18 coefficients. On impose que:

$$\begin{bmatrix} U_r \\ U_z \end{bmatrix} \in \mathcal{R} \quad (167)$$

Alors un tel polynôme est déterminé par 14 coefficients. Finalement en utilisant la proposition 4.11 et en prenant en compte les conditions (22.i) et (22.ii), cela fournit cinq autres relations sur les coefficients, on est conduit à considérer l'espace de polynômes pour les équations de Maxwell-Fourier, les vecteurs u définis par 9 coefficients et de la forme:

$$u = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_4 r + \alpha_3 z + \alpha_8 z^2 - \alpha_6 r z \\ -m\alpha_1 + \alpha_2 r - m\alpha_3 z + \alpha_7 r^2 - m\alpha_8 z^2 + \alpha_9 r z \\ \alpha_5 r + \alpha_6 r^2 - \alpha_8 r z \end{bmatrix} \quad (168)$$

où les α_i sont des constantes.

On peut donner maintenant le nouvel élément fini:

Proposition 8.3. éléments finis avec 9 d.d.l., pour $|\mathbf{m}| \geq 1$

L'élément fini suivant $(\Sigma^m, K, \mathcal{P}^m)$ est isosolvent et conforme dans $\mathcal{H}^m(\Omega)$:

- K : triangle à trois sommets a_i , avec les points milieux d'arête b_i et d'arête Γ_i portant des vecteurs tangents unitaires τ_i , pour $1 \leq i \leq 3$
- \mathcal{P}^m : espace de polynômes défini par (168)
- Σ^m : ensemble des 9 formes linéaires, pour $1 \leq i \leq 3$:

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_{\theta_i} : u \rightarrow u_{\theta}(a_i) \\ \tilde{\sigma}_{\theta_i} : u \rightarrow u_{\theta}(b_i) \\ \sigma_{\Gamma_i} : u \rightarrow \int_{\Gamma_i} \begin{bmatrix} \frac{mu_r + u_{\theta}}{r} \\ \frac{mu_z}{r} \end{bmatrix} \cdot \tau_i d\Gamma_i \end{array} \right. \quad (169)$$

Preuve. Par construction on n'a rien à démontrer, excepter de se référer à [9] et [31]. \square

Si on impose à l'ensemble des polynômes de la proposition 8.3, les relations $\alpha_7 = \alpha_8 = \alpha_9 = 0$, on obtient le plus simple des éléments finis de Maxwell-Fourier pour $|m| \geq 1$:

Proposition 8.4. éléments finis avec 6 d.d.l., pour $|m| \geq 1$

L'élément fini suivant $(\Sigma^m, K, \mathcal{P}^m)$ est unisolvent et conforme dans $\mathcal{H}^m(\Omega)$:

- K : triangle à trois sommets a_i , d'arêtes notées Γ_i de vecteur tangent τ_i , pour $1 \leq i \leq 3$
- \mathcal{P}^m : espace de polynômes défini par

$$u = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_4 r + \alpha_3 z - \alpha_6 r z \\ -m\alpha_1 + \alpha_2 r - m\alpha_3 z \\ \alpha_5 r + \alpha_6 r^2 \end{bmatrix} \quad (170)$$

- Σ^m : ensemble des 6 formes linéaires, pour $1 \leq i \leq 3$:

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_{\theta_i} : u \rightarrow u_{\theta}(a_i) \\ \sigma_{\Gamma_i} : u \rightarrow \int_{\Gamma_i} \begin{bmatrix} \frac{mu_r + u_{\theta}}{r} \\ \frac{mu_z}{r} \end{bmatrix} \cdot \tau_i d\Gamma_i \end{array} \right. \quad (171)$$

On définit maintenant un élément fini pour le mode fondamental de Fourier, le mode $m = 0$. Ce cas correspond à un problème purement axisymétrique, et conduit aux relations suivantes:

$u = \begin{bmatrix} u_r \\ u_{\theta} \\ u_z \end{bmatrix}$ est l'inconnue et u_r, u_{θ}, u_z sont des fonctions des seules variables r et z . Ici on peut voir que

l'inconnue u nous permet de séparer les équations de Maxwell (1), ou plus précisément notre problème modèle (2), en deux problèmes distincts:

- . u_θ est une solution scalaire de l'équation des ondes en les variables r et z
- . (u_r, u_z) est un vecteur solution du système suivant:

$$\begin{cases} -\omega^2 \varepsilon \mu u_r - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = -i\omega \mu j_r \\ -\omega^2 \varepsilon \mu u_z + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = -i\omega \mu j_z \\ + \text{conditions aux limites} \end{cases}$$

L'élément fini se déduit facilement pour le cas $m = 0$. On a la

Proposition 8.5. éléments finis avec 6 d.d.l., pour $\mathbf{m} = \mathbf{0}$

L'élément fini suivant $(\sum^0, K, \mathcal{P}^0)$ est unisolvent et conforme dans $\mathcal{H}^0(\Omega)$:

- K : triangle d'arête Γ_i et de vecteur unité tangent τ_i , pour $1 \leq i \leq 3$
- \mathcal{P}^0 : espace de polynômes défini par

$$u = \begin{bmatrix} \alpha_1 r - \alpha_3 r z \\ (\alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 z) r \\ \alpha_2 + \alpha_3 r^2 \end{bmatrix} \quad (172)$$

- \sum^0 : ensemble des 6 formes linéaires, pour $1 \leq i \leq 3$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\theta_i} : u \rightarrow \frac{1}{r} u_\theta(a_i) \\ \sigma_{\Gamma_i} : u \rightarrow \int_{\Gamma_i} \begin{bmatrix} u_r \\ u_z \end{bmatrix} \cdot \tau_i d\Gamma_i \end{array} \right. \quad (173)$$

Remarque 8.6. Il est clair que suivant la présentation de ce paragraphe 8.3 et comme indiqué dans la remarque 4.8, on peut envisager plus généralement des éléments finis de degrés quelconques. On peut choisir, pour k, k' entiers, d' approximer:

- u_θ , par l'élément fini $(\sum_L^k, K, \mathcal{P}^k)$,

$$\bullet U = \begin{bmatrix} \frac{m u_r + u_\theta}{r} \\ \frac{u_z}{r} \end{bmatrix} + \nabla u_\theta, \text{ par l'élément fini } (\sum_N^{k'}, K, \mathcal{P}^{k'}),$$

où $(\sum_L^k, K, \mathcal{P}^k)$ est l'élément fini de Lagrange de degré k , si l'on reprend les notations de [9] et où $(\sum_N^{k'}, K, \mathcal{P}^{k'})$ est l'élément fini de classe $H(\text{rot})$ de [31]. C'est ce point de vue qui est envisagé dans la thèse [7].

8.4. Utilisation des éléments finis de Maxwell-Fourier à 6 d.d.l.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}_+^2 = \{(r, z), r > 0\}$. Soit $\tau_h = \cup_{l=1}^{N_e} K_l$ un maillage de Ω en N_e triangles. On présente ici comment déterminer les bases de fonctions dans le cas du mode de Fourier modes $m \neq 0$. On réécrit l'ensemble des d.d.l. défini par (173), $\sum = \{\sigma_i \text{ tel que } \sigma_i = \sigma_{\theta_i} \text{ et } \sigma_{i+3} = \sigma_{\Gamma_i} \text{ pour } i = 1, 3\}$, et on cherche des fonctions

p_j solutions du système linéaire 6×6 suivant:

$$\sigma_i(p_j) = \delta_{ij}, \text{ (symbole de Kronecker qui vaut 0 si } i \neq j, 1 \text{ sinon), pour } 1 \leq i, j \leq 6 \quad (174)$$

Soit p_j une fonction définie par (172) et pour laquelle on cherche 6 coefficients réels $\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j, \alpha_4^j, \alpha_5^j, \alpha_6^j$, tels que cette fonction vérifie explicitement le système (174). On note (r_i, z_i) et Γ_i , pour $i = 1, 3$ respectivement les trois sommets et les trois arêtes du triangle K . On note aussi $\tau_i = \begin{bmatrix} \lambda_i \\ \mu_i \end{bmatrix}$, le vecteur unité tangent à l'arête Γ_i de K . On définit les trois matrices 3×3 :

la première correspondant aux d.d.l. relatifs aux sommets:

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} -1 & r_1 & -z_1 \\ -1 & r_2 & -z_2 \\ -1 & r_3 & -z_3 \end{bmatrix},$$

la seconde correspond aux d.d.l. liés aux circulations:

$$\mathcal{M}_j = \begin{bmatrix} 0 & m_j^1 & 0 \\ 0 & m_j^2 & 0 \\ 0 & m_j^3 & 0 \end{bmatrix}$$

où $m_j^i = \lambda_j \int_{\Gamma_i} d\Gamma_i$, et la troisième:

$$\mathcal{N}_j = \begin{bmatrix} n_j'^1 & n_j''^1 & n_j'''^1 \\ n_j'^2 & n_j''^2 & n_j'''^2 \\ n_j'^3 & n_j''^3 & n_j'''^3 \end{bmatrix}$$

avec $n_j'^i = \lambda_j \int_{\Gamma_i} d\Gamma_i$, $n_j''^i = \mu_j \int_{\Gamma_i} d\Gamma_i$, $n_j'''^i = \int_{\Gamma_i} (\mu_j r - \lambda_j z) d\Gamma_i$.

Puis on résout pour chaque élément de numéro j , le système 6×6 ci-dessous:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M} & 0 \\ \mathcal{M}_j & \mathcal{N}_j \end{bmatrix} (\alpha_i^j) = \delta_{ij} \quad (175)$$

dont la solution fournit les six fonctions de base dont le support rencontre le triangle K .

9. ÉLÉMENTS FINIS DE BORD $H(div)$

On détermine maintenant une famille d'éléments finis pour la partie des variables de bord ne dépendant que de l'abscisse curviligne s . Cela est rendu possible par la séparation des variables s et θ , de la même manière que pour la partie volumique du paragraphe 5, équation (24), entre les variables (r, z) et θ . A cette fin on va déterminer (voir figure 3) la trace d'un \vec{u} de \mathcal{H}^m sur le bord Γ dans le plan méridien ($\theta = 0$).

9.1. Approximation de l'abscisse curviligne

On considère dans le plan \mathbb{R}_{rz}^+ , le bord Γ de l'ouvert Ω . On désigne par s , l'abscisse curviligne le long de Γ , celle définie par (65). On discrétise Γ en segments (ceux définis par les triangles de l'approximation de Ω , qui s'appuient sur Γ), de telle sorte que:

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^N [\varphi(s_i), \varphi(s_{i+1})] = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i,$$

avec $s_1 = 0$ et $s_{N+1} = l(\Gamma) = \text{longueur}(\Gamma)$.

On considère aussi la suite de points du plan $(r_i, z_i) = \varphi(s_i)$, extrémités des segments Γ_i . Alors on définit l'abscisse curviligne approchée, par:

$$\begin{aligned} \varphi : [0, l(\Gamma)] \subset \mathbb{R} &\rightarrow \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i \subset \mathbb{R}_{rz}^+ \\ s &\rightarrow \sum_{i=1}^N \chi_i(s) \varphi_i(s) \end{aligned}$$

où, en prenant nulle la somme des longueurs pour $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \varphi_i(s) &= \left(r_i - \left(\sum_{k=1}^{i-1} l(\Gamma_k) \right) \cdot \frac{r_{i+1} - r_i}{l(\Gamma_i)} + s \cdot \frac{r_{i+1} - r_i}{l(\Gamma_i)}, z_i - \left(\sum_{k=1}^{i-1} l(\Gamma_k) \right) \cdot \frac{z_{i+1} - z_i}{l(\Gamma_i)} + s \cdot \frac{z_{i+1} - z_i}{l(\Gamma_i)} \right) \\ \chi_i(s) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{k=1}^{i-1} l(\Gamma_k) \leq s \leq \sum_{k=1}^i l(\Gamma_k) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{176}$$

9.2. Construction d'éléments finis de Maxwell-Fourier de bord à 3 d.d.l.

Les courants dans le cas général (géométrie cartésienne 3d) sont définis dans l'espace $H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$ si Γ est la frontière régulière d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^3 . On rappelle que :

$$H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma) = \{ \mathbf{j} \in TH^{-1/2}(\Gamma), \text{div}_{\Gamma} \mathbf{j} \in H^{-1/2}(\Gamma) \}, \tag{177}$$

où : $TH^{-1/2}(\Gamma) = \{ \mathbf{j} = n_{\wedge} E|_{\Gamma} \text{ tel que } E \in (H^1(O))^3 \}$, ou encore [8]:

$$H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma) = \{ \mathbf{j} \in (H^{-1/2}(\Gamma))^3, \vec{n} \cdot \mathbf{j} = 0, \text{div}_{\Gamma} \mathbf{j} \in H^{-1/2}(\Gamma) \}.$$

Il apparaît clairement dans la pratique qu'il y a deux manières de construire des éléments finis courants dans de tels espaces : soit directement à partir de fonctions polynômes définis sur la surface (les éléments finis de Raviart-Thomas), soit indirectement comme traces de polynômes (177) choisis dans les espaces de Sobolev à partir desquels on définit ces courants (les éléments finis de Nédélec). Dans le cas axisymétrique et dans le cas d'une équation intégrale pure (*efie* par exemple) on peut choisir de bâtir des éléments finis linéique directement. On peut aussi les construire à partir des traces des éléments finis Fourier-Maxwell [25]. Néanmoins, la question qui est posée dans le cas d'éléments finis de volume, est la possibilité de bâtir à partir de ces derniers, construits sur le bord Γ , des relèvements de fonctions définies sur le volume dont ils sont les traces. C'est ce qu'on présente ci-dessous.

9.2.1. *Eléments finis linéiques de $H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$*

Conformément aux expressions issues des relations (102-106), on pose pour tout $(s, \theta) \in \Gamma \times [0, 2\pi[$:

$$\vec{J}(s, \theta) = J_{rz}(s, \theta) \cdot \vec{\tau}_{rz}(s, \theta) + J_{\theta}(s, \theta) \cdot \vec{\tau}_{\theta}(s, \theta) \quad (178)$$

On rappelle les correspondances et notations suivantes (voir figure4(b)):

$$\begin{aligned} O &\rightarrow O' = \Omega \times [0, 2\pi[\\ \partial O &\rightarrow \partial O' = \Gamma \times [0, 2\pi[\\ \Gamma_{rz} &\rightarrow]s_1, s_2[\times [0, 2\pi[\\ \Gamma_{\theta} &\rightarrow \{s_1\} \times [0, 2\pi[\end{aligned} \quad (179)$$

L'appartenance à $H(\text{div}, O')$ des courants \vec{J} définies sur $\partial O'$, se traduit par la continuité du flux de courant

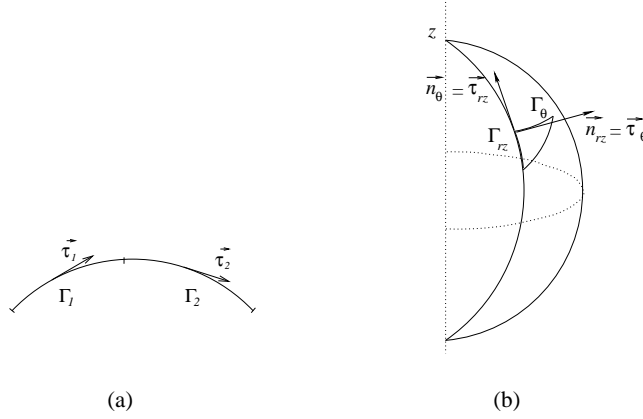


FIGURE 3

sur Γ_{θ} et s'exprime, à l'aide des sauts $[\]_s$ et $[\]_{\theta}$, par:

$$\int_{\Gamma_{\theta}} [\vec{J} \cdot \vec{\tau}_{rz}] d\gamma = [J_{rz}(s, \theta)]_s = 0, \quad (180)$$

et par la continuité (toujours assurée) du flux de courant sur Γ_{rz} qui s'exprime par:

$$\int_{\Gamma_{rz}} [\vec{J} \cdot \vec{\tau}_{\theta}] d\gamma = \int_{s_1}^{s_2} [J_{\theta}(s, \theta)]_{\theta} r ds = 0. \quad (181)$$

D'où le choix des degrés de liberté pour des éléments finis de classe $H(\text{div})$. C'est la même conséquence qu'entraîne aussi la formule de Green (89).

De la même manière que l'on définit les éléments finis $H(\text{rot})$ des champs définis par (9) et (10) à l'aide de l'expression simplifiée des champs (u_r, u_{θ}, u_z) fournit par la définition (18) issue de la formulation variationnelle (15), on utilise la formulation variationnelle (158)-(159) et les formes (122-130), etc., pour introduire comme expression à discrétiser, le courant surfacique:

$$\vec{j}(s) = j_{rz}(s) \cdot \vec{\tau}_{rz}(s) + j_{\theta}(s) \cdot \vec{\tau}_{\theta}(s) \quad (182)$$

et de même pour \vec{m} . C'est-à-dire que la prise en compte de la variation en θ se fait dans les formulations intégrales. On choisit comme expression des courants surfaciques, une approximation avec des polynômes d'ordre 1, en fonction de la variable s , abscisse curviligne donnée par (176):

$$\vec{j}(s) = (\beta_1 + \beta_2 s) \cdot \vec{\tau} + (\beta_3 + \beta_4 s) \cdot \vec{e}_\theta \quad (183)$$

Il faut comme dans le cas du plan méridien (volume) distinguer selon que le segment s'appuie ou non sur l'axe $\{r = 0\}$. Cela fait trois cas d'étude: le premier segment, correspondant au cas $s = 0$, le dernier segment correspondant au cas $s = l(\Gamma)$, et enfin les autres segments, en position non axiale (torique). On obtient une expression simplifiée lorsqu'on tient compte de la divergence de j sous les formes (127),(128), pour exiger en $r = 0$, la nullité des termes constants, ce qui fixe les coefficients respectifs de β_1 , puisque la quantité:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} j_{rz}^m(s) + \frac{m}{r} j_\theta^m(s) = 0, \quad (184)$$

impose de choisir \vec{j} , avec d'autres constantes β_i , sous la forme suivante:

$$\vec{j}(s) = (m\beta_1 + \beta_2 s) \cdot \vec{\tau} + \left(-\frac{\partial r}{\partial s} \beta_1 + \beta_3 s\right) \cdot \vec{e}_\theta$$

Cette même contrainte (184) en $r = 0$, mais $s = l(\Gamma)$, entraîne également, pour la relation qui précède, la nécessité suivante:

$$\frac{s}{r} \left(-\frac{\partial r}{\partial s} \beta_2 + m\beta_3\right) = 0$$

Ces termes qui ne posent pas de problèmes en $s = 0$, puisque le réel $\frac{s}{r}$ est borné par régularité de Γ , impose une relation entre β_2 et β_3 en $s = l(\Gamma)$, ce qui n'est pas compatible avec 3 degrés de liberté. C'est pourquoi pour la deuxième extrémité de Γ , on utilise la fonction qui vérifie (184) en $s = l(\Gamma)$:

$$\vec{j}(s) = (m\beta_1 + \beta_2 s) \cdot \vec{\tau} + \left(\beta_3 - \left(\frac{1}{m} \frac{\partial r}{\partial s} \left(\frac{1}{l(\Gamma)} \beta_1 + \beta_2\right) + \frac{1}{l(\Gamma)} \beta_3\right) s\right) \cdot \vec{e}_\theta$$

Cela constitue l'élément fini frontière de la proposition 9.1 ci-dessous.

Comme on désire prendre en compte 3 degrés de liberté par segment, on peut aussi poser - pour faire un choix de degrés de liberté compatible avec le choix (171) - et pour des constantes β_i :

$$\vec{j}(s) = (m\beta_1 + \beta_2 s(s - l(\Gamma))) \cdot \vec{\tau} + \left(-\frac{\partial r}{\partial s} \beta_1 + \beta_3 s(s - l(\Gamma))\right) \cdot \vec{e}_\theta \quad (185)$$

D'où les deux propositions suivantes:

Proposition 9.1. éléments finis frontière avec 3 d.d.l., pour $|m| \geq 1$

On définit comme éléments finis $(\sum^m, \Gamma_i, \mathcal{P}^m)$ sur la frontière Γ , dans $\mathcal{H}(\text{div}, \Gamma)$:

- Γ_i : segment de sommets d'abscisse curviligne s_i, s_{i+1} de vecteur tangent $\vec{\tau}$,
- \mathcal{P}^m : espace de polynômes en la variable réelle s , défini par:

$$\vec{j}(s) = (m\beta_1 + \beta_2 s) \cdot \vec{\tau} + \left(-\frac{\partial r}{\partial s} \beta_1 + \beta_3 s\right) \cdot \vec{e}_\theta, \text{ sauf pour l'extrémité de } \Gamma, \quad (186)$$

ou par:

$$\vec{j}(s) = (m\beta_1 + \beta_2 s) \cdot \vec{\tau} + (\beta_3 - (\frac{1}{m} \frac{\partial r}{\partial s} (\frac{1}{l(\Gamma)} \beta_1 + \beta_2) + \frac{1}{l(\Gamma)} \beta_3) s) \cdot \vec{e}_\theta, \text{ sauf pour l'origine de } \Gamma, \quad (187)$$

- Σ^m : ensemble des 3 formes linéaires suivantes:

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_{\theta_1} : \vec{j} \rightarrow \vec{j} \cdot \vec{\tau} (s_i) \\ \sigma_{\theta_2} : \vec{j} \rightarrow \vec{j} \cdot \vec{\tau} (s_{i+1}) \\ \sigma_\Gamma : \vec{j} \rightarrow \int_{\Gamma_i} \vec{j} \cdot (\frac{m\vec{e}_\theta + \frac{\partial r}{\partial s} \vec{\tau}}{s}) ds \end{array} \right. \quad (188)$$

Puis la seconde proposition suivante qui tient compte des relations sur l'axe, en augmentant l'ordre des polynômes (mais pas celui des d.d.l.):

Proposition 9.2. éléments finis frontière avec 3 d.d.l., pour $|m| \geq 1$

On définit comme éléments finis $(\Sigma^m, \Gamma_i, \mathcal{P}^m)$ sur la frontière Γ , dans $\mathcal{H}(\text{div}, \Gamma)$:

- Γ_i : segment de sommets d'abscisse curviligne s_i, s_{i+1} de vecteur tangent $\vec{\tau}$,
- \mathcal{P}^m : espace de polynômes en la variable réelle s , défini par:

$$\vec{j}(s) = (m\beta_1 + \beta_2 s(s - l(\Gamma))) \cdot \vec{\tau} + (-\frac{\partial r}{\partial s} \beta_1 + \beta_3 s(s - l(\Gamma))) \cdot \vec{e}_\theta \quad (189)$$

- Σ^m : ensemble des 3 formes linéaires suivantes:

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_{\theta_1} : \vec{j} \rightarrow \vec{j} \cdot \vec{\tau} (s_i) \\ \sigma_{\theta_2} : \vec{j} \rightarrow \vec{j} \cdot \vec{\tau} (s_{i+1}) \\ \sigma_\Gamma : \vec{j} \rightarrow \int_{\Gamma_i} \vec{j} \cdot (\frac{m\vec{e}_\theta + \frac{\partial r}{\partial s} \vec{\tau}}{s}) ds \end{array} \right. \quad (190)$$

Remarque 9.3. On a donc dans ce dernier cas:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta_1}(\vec{j}) &= m\beta_1 + \beta_2 s_i (s_i - l(\Gamma)), \\ \sigma_{\theta_2}(\vec{j}) &= m\beta_1 + \beta_2 s_{i+1} (s_{i+1} - l(\Gamma)), \\ \sigma_\Gamma(\vec{j}) &= (\frac{\partial r}{\partial s} \beta_2 + m\beta_3) \int_{s_i}^{s_{i+1}} (s - l(\Gamma)) ds. \end{aligned} \quad (191)$$

D'autre part on vérifie que:

le degré de liberté $\sigma_{\theta_1}(\vec{j})$ correspond au d.d.l. de volume : $u_\theta(\varphi(s_i))$,

le degré de liberté $\sigma_{\theta_2}(\vec{\mathbf{j}})$ correspond au d.d.l. de volume : $u_\theta(\varphi(s_{i+1}))$,

le degré de liberté $\sigma_\Gamma(\vec{\mathbf{j}})$ correspond au d.d.l. de volume : $\int_{\Gamma_i} \begin{bmatrix} \frac{mu_r + u_\theta}{r} \\ 0 \\ \frac{mu_z}{r} \end{bmatrix} \cdot \vec{\tau} d\gamma$.

De la même manière on peut formuler la proposition suivante, qui fait un choix de degrés de liberté compatible avec (173):

Proposition 9.4. éléments finis frontière avec 3 d.d.l., pour $m = 0$

On définit comme éléments finis $(\Sigma^0, \Gamma_i, \mathcal{P}^0)$ sur la frontière Γ , dans $\mathcal{H}(div, \Gamma)$:

- Γ_i : segment de sommets d'abscisse curviligne s_i, s_{i+1} de vecteur tangent $\vec{\tau}$,
- \mathcal{P}^0 : espace de polynômes en la variable réelle s , défini par:

$$\vec{\mathbf{j}} = (\beta_1 + \beta_2 s)s \cdot \vec{\tau} + \beta_3 \cdot \vec{e}_\theta \quad (192)$$

- Σ^0 : ensemble des 3 formes linéaires suivantes:

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_{\theta_1} : \vec{\mathbf{j}} \rightarrow \frac{\vec{\mathbf{j}}}{s} \cdot \vec{\tau} (s_i) \\ \sigma_{\theta_2} : \vec{\mathbf{j}} \rightarrow \frac{\vec{\mathbf{j}}}{s} \cdot \vec{\tau} (s_{i+1}) \\ \sigma_\Gamma : \vec{\mathbf{j}} \rightarrow \int_{\Gamma_i} \vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{e}_\theta ds . \end{array} \right. \quad (193)$$

Remarque 9.5. On vérifie là aussi que:

le degré de liberté $\sigma_{\theta_1}(\vec{\mathbf{j}})$ correspond au d.d.l. de volume : $\frac{u_\theta}{r}(\varphi(s_i))$,

le degré de liberté $\sigma_{\theta_2}(\vec{\mathbf{j}})$ correspond au d.d.l. de volume : $\frac{u_\theta}{r}(\varphi(s_{i+1}))$,

le degré de liberté $\sigma_\Gamma(\vec{\mathbf{j}})$ correspond au d.d.l. de volume : $\int_{\Gamma_i} \begin{bmatrix} u_r \\ 0 \\ u_z \end{bmatrix} \cdot \vec{\tau} d\gamma$.

9.2.2. *Eléments finis de $H^{-1/2}(div, \Gamma)$ comme traces d'éléments finis de classe $H(rot, \Omega)$*

En vue du couplage, on peut envisager de définir des relèvements polynômiaux $H(rot)$ d'éléments finis de classe $H(div)$, pour des triangles par exemple. Il est plus aisé de déterminer des éléments finis $H(rot)$, construits sur un segment à partir de n'importe quel élément fini construit sur une triangle ou un quadrilatère, ayant ce segment comme côté, en choisissant d'en prendre la trace tangentielle. Il va de soi que la difficulté est de faire coïncider le nombre et la nature des degrés de liberté, avec les expressions et l'ordre des polynômes.

Pour \vec{u} donné comme dans (4), on calcule:

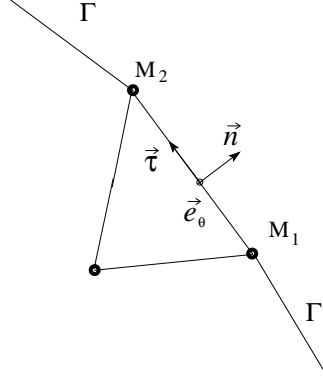


FIGURE 4

$$\vec{u} \wedge \vec{n} = \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} n_r \\ 0 \\ n_z \end{bmatrix} \quad (194)$$

On pose:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_{rz}(\theta = 0) = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{\|M_1 M_2\|} = \begin{bmatrix} -n_z \\ 0 \\ n_r \end{bmatrix} \quad (195)$$

Alors:

$$\vec{u} \wedge \vec{n} = \begin{bmatrix} n_z u_\theta \\ n_r u_z - n_z u_r \\ -n_r u_\theta \end{bmatrix} \quad (196)$$

avec

$$\vec{e}_\theta = \vec{\tau}_\theta(\theta = 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

il vient (c'est le cas $\theta = 0$ de la relation (102)):

$$\vec{u} \wedge \vec{n}|_\Gamma = -(u_\theta)|_\Gamma \cdot \vec{\tau} + \begin{bmatrix} u_r \\ 0 \\ u_z \end{bmatrix} \cdot \vec{\tau}|_\Gamma \cdot \vec{e}_\theta \quad (197)$$

On pose pour tout $(r, z) \in \Gamma$:

$$\vec{j}(r, z) = j_{rz}(r, z) \cdot \vec{\tau}(r, z) + j_\theta(r, z) \cdot \vec{e}_\theta(r, z), \quad (198)$$

où j_{rz} et j_θ sont des polynômes 1 en r, z .

On note aussi, de manière abusive, avec (65), la fonction $\vec{j} \circ \varphi(s)$:

$$\vec{j}(s) = j_{rz}(s) \cdot \vec{\tau}(s) + j_\theta(s) \cdot \vec{e}_\theta(s), \quad (199)$$

De même on note aussi pour simplifier: $r(s) = r \circ \varphi_1(s)$ et $z(s) = z \circ \varphi_2(s)$.

On construit les éléments finis $H(\text{div}, \Gamma)$, comme trace des éléments finis $H(\text{rot}, \Omega)$ du paragraphe précédent,

construits sur des triangles. On reprend l'expression du champ (170):

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_4 r + \alpha_3 z - \alpha_6 r z \\ -m\alpha_1 + \alpha_2 r - m\alpha_3 z \\ \alpha_5 r + \alpha_6 r^2 \end{bmatrix}$$

Si on calcule la trace de la composante tangentielle, on obtient des courants surfaciques qui ne dépendent plus que des 5 constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$. En effet les termes de degré 2, en α_6 , s'éliminent. On définit alors de manière identique aux éléments finis sur le triangle, un élément fini sur un côté du triangle en imposant des conditions suffisantes d'appartenance à l'espace $H(\text{div})$ des courants dont le support linéique rencontre l'axe (cette condition est superflue pour les supports toriques, comme c'était déjà le cas pour les éléments finis sur le triangle). Pour cela on choisit de fixer:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} j_{rz}^m(s) + \frac{m}{r} j_\theta^m(s) = \text{constante}, \quad (200)$$

pour s extrémités de l'arête déterminée par les deux abscisses curvilignes s_i et s_{i+1} . Cela procure une famille à 2 paramètres qui peuvent être choisis égaux à 0 ou à 1. De telle sorte qu'au final, on obtient des courants dépendants de 3 constantes. Et on énonce la

Proposition 9.6. éléments finis frontière avec 3 d.d.l., pour $|\mathbf{m}| \geq 1$

On définit comme éléments finis $(\Sigma^m, \Gamma_i, \mathcal{P}^m)$ sur la frontière Γ , dans $\mathcal{H}(\text{div}, \Gamma)$:

- Γ_i : segment de sommets d'abscisse curviligne s_i, s_{i+1} de vecteur tangent $\vec{\tau}$,
- \mathcal{P}^m : espace de polynômes en la variable réelle s , défini par la trace tangentielle $\vec{u} \wedge \vec{n}$, du champ:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_4 r(s) + \alpha_3 z(s) - \alpha_6 r(s)z(s) \\ -m\alpha_1 + \alpha_2 r(s) - m\alpha_3 z(s) \\ \alpha_5 r(s) + \alpha_6 r(s)^2 \end{bmatrix}$$

et vérifiant les 2 relations (200) avec $j_{rz}(s) = -u_\theta(s)$ et $j_\theta(s) = \left(\begin{bmatrix} u_r \\ 0 \\ u_z \end{bmatrix} \cdot \vec{\tau} \right)_{|\Gamma}(s)$

- Σ^m : ensemble des 3 formes linéaires suivantes:

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_{\theta_1} : \vec{j} \rightarrow \vec{j} \cdot \vec{\tau} (s_i) \\ \sigma_{\theta_2} : \vec{j} \rightarrow \vec{j} \cdot \vec{\tau} (s_{i+1}) \\ \sigma_\Gamma : \vec{j} \rightarrow \int_{\Gamma_i} \vec{j} \cdot \left(\frac{m\vec{e}_\theta + \frac{\partial r}{\partial s} \vec{\tau}}{s} \right) ds \end{array} \right. \quad (201)$$

La première application de ce résultat est de faire le choix évident des traces des éléments de Maxwell-Fourier des chapitres précédents. Les relations (200) sont alors contenues dans ce choix.

Il est encore évident que cette démarche est valable, rappelant la remarque 8.6, pour tout autre élément fini bâti pour $H(\text{rot}, \Omega)$, en partant du couple $(U, u_\theta) \in (\mathcal{R}^k, P_{k'})$. C'est ce qui est envisagé pour des éléments finis d'ordre élevé dans [7].

De même des éléments finis définis sur des quadrilatères, fournissent aussi par restriction à un côté, des familles

d'éléments finis dans $H(div)$ a priori surdéterminées: c'est-à-dire qu'il faut imposer un certain nombre de constantes pour identifier le nombre de d.d.l. et l'ordre des polynômes.

Quoiqu'il en soit, cette démarche, *i.e.* la détermination de d.d.l. du bord $H(div)$ comme traces d'éléments finis $H(rot)$, nécessite la connaissance d'une maille du plan méridien rz . C'est bien sûr le cas lors du couplage.

10. DISCRÉTISATION DE LA FORMULATION COUPLÉE DES ÉQUATIONS DE MAXWELL

10.1. Ecriture du système linéaire couplée

On suppose que le champ électromagnétique et l'ouvert Ω , et donc aussi le bord Γ , sont approchés par une méthode d'éléments finis.

Le problème (158)-(159) a pour inconnue le triplet (E, J, M) . L'approximation des (158)-(159) utilise alors les éléments finis (170)(171) et (172)(173) pour la partie volumique et (189)(188) et (192)(193) pour la partie surfacique. Il en résulte un problème linéaire classique de la forme $AX = B$, auquel on s'intéresse maintenant. C'est dire d'une part que le domaine Ω est maillé de tétraèdres formant un ensemble de N_v arêtes et sommets, que le bord Γ est découpé en N_s segments Γ_i et $N_s + 1$ sommets de bord, que d'autre part $H(rot, \Omega)$ est approché par un espace vectoriel V_h et enfin l'espace $H^{-\frac{1}{2}}(div, \Gamma)$ est approché par un espace vectoriel W_h . On définit donc les espaces:

$$V_h = \text{lin}\{p_i\}_{i=1, N_v} \subset H(rot, \Omega) \quad (202)$$

et pour les courants J et M :

$$W_h = \text{lin}\{j_i\}_{i=1, N_s} \subset H^{-\frac{1}{2}}(div, \Gamma) \quad (203)$$

avec les notations (73), sachant que pour le courant M on a identité des degrés de liberté:

$$\int_{\Gamma_i} (M, \vec{\tau}_\theta) dl = \int_{\Gamma_i} (E \wedge \vec{\tau}_n, \vec{\tau}_{rz} \wedge \vec{\tau}_n) dl = \int_{\Gamma_i} (E, \vec{\tau}_{rz}) dl \quad (204)$$

On définit l'ensemble \mathcal{I} des numéros de d.d.l. intérieurs, de cardinal N_i , l'ensemble \mathcal{J} des numéros de d.d.l. de bord relatif à J , de cardinal N_s et l'ensemble \mathcal{M} des numéros de d.d.l. de bord relatif à M de cardinal N_s .

On a en fait: $N_v = N_i + N_s$.

On a donc formellement pour le triplet (E, J, M) l'expression suivante, sur une base de $V_h \times W_h \times W_h$:

$$(E, J, M) = \left(\sum_{i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{M}} \alpha_i p_i, \sum_{k \in \mathcal{J}} \beta_k j_k, \sum_{l \in \mathcal{M}} \gamma_l i_l \right) \quad (205)$$

On a donc ($\alpha_l = \gamma_l$):

$$E = \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i p_i + \sum_{l \in \mathcal{M}} \gamma_l p_l \quad (206)$$

et aussi:

$$J = \sum_{k \in \mathcal{J}} \beta_k j_k \quad (207)$$

et donc la relation fondamentale du couplage (discret) des éléments finis de volume et de frontière:

$$M = \sum_{l \in \mathcal{M}} \alpha_l (p_l \wedge n) = \sum_{l \in \mathcal{M}} \gamma_l (p_l \wedge n) = \sum_{l \in \mathcal{M}} \gamma_l i_l. \quad (208)$$

Le problème continu (158)-(159) s'écrit sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{array}{l} \text{champ } E \\ \text{champ } E \text{ ou courant } M \\ \text{courant } J \end{array} \begin{bmatrix} A_{ii} & A_{il} & 0 \\ {}^t A_{il} & A_{ll} & A_{lk} \\ 0 & {}^t A_{lk} & A_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \gamma_l \\ \beta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_i \\ b_l \\ b_k \end{bmatrix} \quad (209)$$

Dans l'expression ci-dessus, la matrice A_{ll} est la somme de deux contributions:

$$A_{ll} = A_{ll}^v + A_{ll}^s \quad (210)$$

où A_{ll}^v : représente la contribution éléments finis de volume,

et A_{ll}^s : représente la contribution éléments finis de bord.

Le système (209) permet de déduire l'expression de:

$$\alpha_i = -A_{ii}^{-1} A_{il} \gamma_l + A_{ii}^{-1} b_i \quad (211)$$

et d'autre part:

$$\begin{aligned} (A_{ll} - {}^t A_{il} A_{ii}^{-1} A_{il}) \gamma_l + A_{lk} \beta_k &= b_l - {}^t A_{il} A_{ii}^{-1} b_i \\ {}^t A_{lk} \gamma_l + A_{kk} \beta_k &= b_k \end{aligned} \quad (212)$$

Si on pose:

$$A_{ll}^c = A_{ll}^v - {}^t A_{il} A_{ii}^{-1} A_{il} \quad (213)$$

alors finalement le code couplé se résume dans l'inversion du système suivant:

$$\begin{bmatrix} A_{ll}^c + A_{ll}^s & A_{lk} \\ {}^t A_{lk} & A_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_l \\ \beta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_l - {}^t A_{il} A_{ii}^{-1} b_i \\ b_k \end{bmatrix} \quad (214)$$

10.2. Ecriture des matrices élémentaires

On reprend chacun des termes des équations (158)-(159) de manière explicite. On considère les termes avec le courant \mathbf{j} , les intégrales avec le courant \mathbf{m} s'en déduisent. On choisit un triplet $(E, \mathbf{j}, \mathbf{m})$ comme dans (205). Les différents types d'intégrales sont l'objet des paragraphes qui suivent.

10.2.1. Ecriture des matrices élémentaires volumes

Matrices av_{ik} . Ce sont les termes suivants, produits $L^2(\Omega)$:

$$av_{ik} = - \int_{\Omega} i\omega \varepsilon ((p_i)_r^m \cdot (p_k)_r^m + (p_i)_\theta^m \cdot (p_k)_\theta^m + (p_i)_z^m \cdot (p_k)_z^m) r dr dz \quad (215)$$

Le résultat est la matrice assemblée:

$$\begin{bmatrix} Av_{ii} & Av_{il} \\ {}^t Av_{il} & Av_{ll} \end{bmatrix} \quad (216)$$

Matrices bv_{ik} . Ce sont les termes suivants, produits de rotationnels $L^2(\Omega)$:

$$\begin{aligned} bv_{ik} = & - \int_{\Omega} \frac{1}{i\omega\mu} \left(\frac{\partial(p_i)_\theta^m}{\partial r} + \frac{1}{r} ((p_i)_\theta^m + m u_r^m) \right) \left(\frac{\partial(p_k)_\theta^m}{\partial r} + \frac{1}{r} ((p_k)_\theta^m + m (p_k)_r^m) \right) r dr dz \\ & - \int_{\Omega} \frac{1}{i\omega\mu} \left(\frac{\partial(p_i)_r^m}{\partial z} - \frac{\partial(p_i)_z^m}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial(p_k)_r^m}{\partial z} - \frac{\partial(p_k)_z^m}{\partial r} \right) r dr dz - \int_{\Omega} \frac{1}{i\omega\mu} \left(\frac{m}{r} (p_i)_z^m + \frac{\partial(p_i)_\theta^m}{\partial z} \right) \left(\frac{m}{r} (p_k)_z^m + \frac{\partial(p_k)_\theta^m}{\partial z} \right) r dr dz \end{aligned} \quad (217)$$

Le résultat est la matrice assemblée:

$$\begin{bmatrix} Bv_{ii} & Bv_{il} \\ {}^t Bv_{il} & Bv_{ll} \end{bmatrix} \quad (218)$$

10.2.2. Ecriture des matrices élémentaires surface

Matrices as_{ik} et as'_{ik} . On pose $J = (J_i)^m$, $J' = (J_k)^m$ dans (122), produits $L^2(\Gamma)$, et dans (154), (157):

$$as_{ik} = \mathcal{I}_a(J, J') + \mathcal{I}_{c.c.fie}(J, J') + \mathcal{I}_{d.c.fie}(J, J') \quad (219)$$

Le résultat est la matrice assemblée:

$$[As_{kk}] \quad (220)$$

et on pose $M = (M_i)^m$, $M' = (M_k)^m$ dans (124) pour obtenir les termes:

$$as'_{ik} = \mathcal{I}_a^-(M, M') \quad (221)$$

Le résultat est la matrice assemblée:

$$[As_{il}] \quad (222)$$

Matrices bs_{ik} et bs'_{ik} . On pose $J = (J_i)^m$ et $J' = (J_k)^m$ dans (129). Ce sont les termes suivants produits de divergences $L^2(\Gamma)$:

$$bs_{ik} = \mathcal{I}_b(J, J') \quad (223)$$

Le résultat est la matrice assemblée:

$$[Bs_{kk}] \quad (224)$$

et on pose $M = (M_i)^m$, $M' = (M_k)^m$ dans (130) pour obtenir les termes:

$$bs'_{ik} = \mathcal{I}_b^-(M, M') \quad (225)$$

Le résultat est la matrice assemblée:

$$[Bs_{il}] \quad (226)$$

Matrices cs_{ik} et cs'_{ik} . On pose $J = (J_i)^m$ et $M' = (M_k)^m$ dans (136) et dans (148), (151):

$$cs_{ik} = \mathcal{I}_c(J, M') \quad (227)$$

Le résultat est la matrice assemblée:

$$[Cs_{kl}] \quad (228)$$

et on pose $M = (M_i)^m$ et $J' = (J_k)^m$ dans (138) pour obtenir les termes:

$$cs'_{ik} = \mathcal{I}_c^-(M, J') + \mathcal{I}_{a.c.fie}(M, J') + \mathcal{I}_{b.c.fie}(M, J') \quad (229)$$

Le résultat est la matrice assemblée:

$$[Cs_{lk}] \quad (230)$$

Matrices ds_{ik} et $d's_{ik}$. On pose $J = (J_i)^m$ et $M' = (M_k)^m$ dans (143). Ce sont les termes suivants

$$ds_{ik} = \mathcal{I}_d(J, M') \quad (231)$$

Le résultat est la matrice assemblée:

$$[Ds_{lk}] \quad (232)$$

et on pose $M = (M_i)^m$ et $J' = (J_k)^m$ dans (144) pour obtenir les termes:

$$ds'_{ik} = \mathcal{I}_d^-(M, J') \quad (233)$$

Le résultat est la matrice assemblée:

$$[Ds_{kl}] \quad (234)$$

Vecteurs $f s_k$. Ce sont les termes suivants, seconds membres

$$\begin{aligned} f s_k = \int_{\Gamma} \{ & H^{inc} \cdot ((\mathbf{m}_k)_{rz}^m \sin m\theta \vec{\tau}_{rz} + (\mathbf{m}_k)_{\theta}^m \cos m\theta \vec{\tau}_{\theta}) - \eta E^{inc} \cdot ((\mathbf{j}_k)_{rz}^m \cos m\theta \vec{\tau}_{rz} + (\mathbf{j}_k)_{\theta}^m \sin m\theta \vec{\tau}_{\theta}) \\ & + Z(1 - \eta) H^{inc} \cdot ((\mathbf{j}_k)_{\theta}^m \sin m\theta \vec{\tau}_{rz} - (\mathbf{j}_k)_{rz}^m \cos m\theta \vec{\tau}_{\theta}) \} r ds d\theta \end{aligned} \quad (235)$$

Pour le champ incident on se reportera au paragraphe 11 et à la proposition 11.1.

Au final, on a les relations suivantes:

$$\begin{aligned} A_{ii} &= Av_{ii} + Bv_{ii} \\ A_{il} &= Av_{il} + Bv_{il} \\ {}^t A_{ii} &= {}^t Av_{il} + {}^t Bv_{il} \\ A_{ll} &= Av_{ll} + Bv_{ll} + As_{ll} + Bs_{ll} \\ A_{lk} &= Cs_{lk} + Ds_{lk} \\ {}^t A_{lk} &= Cs_{kl} + Ds_{kl} \\ A_{kk} &= As_{kk} + Bs_{kk} \end{aligned} \quad (236)$$

10.3. Intégration numérique des termes matriciels élémentaires

10.3.1. Méthode de Gay [2], [35]

On rappelle ici cette technique subtile, d'une part dans le cas le plus contraignant, *i.e.* lorsque on effectue une intégration double sur des segments confondus et d'autre part dans le cas où ces segments ont un point en commun (segments adjacents).

Méthode de Gay pour segments confondus. Cette méthode de traitement des singularités en 2d et 3d aussi bien qu'en axisymétrique, se préoccupe d'intégrer des expressions du type:

$$\tilde{I} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\xi'_1}^{\xi'_2} \int_0^\pi \frac{\tilde{M}(\xi, \xi', \varphi)}{\tilde{R}(\xi, \xi', \varphi)} d\xi d\xi' d\varphi \quad (237)$$

si ξ et ξ' sont les abscisses curvilignes définissant les coordonnées $(r_1, z_1), (r_2, z_2)$ de deux segments portés par Γ et Γ' , et où:

$$\tilde{R}(\xi, \xi', \varphi) = \sqrt{(r_1(\xi) - r_2(\xi'))^2 + (z_1(\xi) - z_2(\xi'))^2 + 2r_1(\xi)r_2(\xi')(1 - \cos \varphi)}$$

et \tilde{M} est une fonction régulière de (ξ, ξ', φ) . On a:

$$\tilde{I} = (\xi_2 - \xi_1)(\xi'_2 - \xi'_1) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^\pi \frac{M(t_1, t_2, \varphi)}{R(t_1, t_2, \varphi)} dt_1 dt_2 d\varphi, \quad (238)$$

si l'on pose:

$$\begin{aligned} \xi &= (\xi_2 - \xi_1)t_1 + \xi_1 \\ \xi' &= (\xi'_2 - \xi'_1)t_2 + \xi'_1 \end{aligned}$$

soit:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} \\ t_2 &= \frac{\xi' - \xi'_1}{\xi'_2 - \xi'_1} \end{aligned}$$

et:

$$\begin{aligned} M(t_1, t_2, \varphi) &= \tilde{M}((\xi_2 - \xi_1)t_1 + \xi_1, (\xi'_2 - \xi'_1)t_2 + \xi'_1, \varphi), \\ R(t_1, t_2, \varphi) &= \tilde{R}((\xi_2 - \xi_1)t_1 + \xi_1, (\xi'_2 - \xi'_1)t_2 + \xi'_1, \varphi), \end{aligned}$$

Il nous faut donc évaluer l'intégrale:

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^\pi \frac{M(t_1, t_2, \varphi)}{R(t_1, t_2, \varphi)} dt_1 dt_2 d\varphi \quad (239)$$

M est régulier et:

$$R(t_1, t_2, \varphi) = \sqrt{(\rho_1(t_1) - \rho_2(t_2))^2 + (z_1(t_1) - z_2(t_2))^2 + 2\rho_1(t_1)\rho_2(t_2)(1 - \cos \varphi)}$$

où (ρ_1, z_1) et (ρ_2, z_2) définissent les segments Γ, Γ' , paramétrés par t_1 et t_2 .

On suppose que les segments d'intégration sont confondus: ils correspondent au cas où la singularité est déterminée par la droite suivante: $\{(t_1, t_2, t_3) \in [0, 1]^3, t_1 = t_2, t_3 = 0\}$.

On réécrit I sous la forme:

$$I = \pi \int_0^1 dt_3 \left(\int_{T_1} \frac{M(t_1, t_2, \pi t_3)}{R(t_1, t_2, \pi t_3)} dt_1 dt_2 + \int_{T_2} \frac{M(t_1, t_2, \pi t_3)}{R(t_1, t_2, \pi t_3)} dt_1 dt_2 \right) \quad (240)$$

avec: $T_1 = \{(t_1, t_2) \in [0, 1]^2 \text{ avec } t_2 \leq t_1\}$ et $T_2 = \{(t_1, t_2) \in [0, 1]^2 \text{ avec } t_1 \leq t_2\}$.

Pour conclure on effectue alors, dans l'expression qui précède, les changements de variables suivant:

dans le triangle T_1 :

$$\begin{aligned} t_1^{(1)} &= (1 - s_1)s_2 + s_1 \\ t_2^{(1)} &= (1 - s_1)s_2 \\ t_3^{(1)} &= s_3 \end{aligned} \quad (241)$$

dans le triangle T_2 :

$$\begin{aligned} t_1^{(2)} &= (1 - s_1)s_2 \\ t_2^{(2)} &= (1 - s_1)s_2 + s_1 \\ t_3^{(2)} &= s_3 \end{aligned} \quad (242)$$

Ces deux transformations ont le même jacobien $(1 - s_1)$.

Donc il vient:

$$I = \pi \int_0^1 ds_3 \int_{[0,1]^1} \left(\frac{M(t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \pi t_3^{(1)})}{R(t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \pi t_3^{(1)})} + \frac{M(t_1^{(2)}, t_2^{(2)}, \pi t_3^{(2)})}{R(t_1^{(2)}, t_2^{(2)}, \pi t_3^{(2)})} \right) (1 - s_1) ds_1 ds_2. \quad (243)$$

On réécrit ce qui précède sous la forme:

$$I = \pi \int_0^1 ds_2 \int_{[0,1]^1} \left(\frac{M(t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \pi t_3^{(1)})}{R(t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \pi t_3^{(1)})} + \frac{M(t_1^{(2)}, t_2^{(2)}, \pi t_3^{(2)})}{R(t_1^{(2)}, t_2^{(2)}, \pi t_3^{(2)})} \right) (1 - s_1) ds_1 ds_3, \quad (244)$$

pour faire apparaître la singularité en $s_1 = s_3$. Et comme ci-dessus, on fait le changement de variable, pour $(u_1, u_2, u_3) \in [0, 1]^3$:

pour $(s_1, s_3) \in T_1$:

$$\begin{aligned} s_1^{(1)} &= u_1 \\ s_2^{(1)} &= u_2 \\ s_3^{(1)} &= u_1 \cdot u_3 \end{aligned} \quad (245)$$

et pour $(s_1, s_3) \in T_2$:

$$\begin{aligned} s_1^{(2)} &= u_1 \cdot u_3 \\ s_2^{(2)} &= u_2 \\ s_3^{(2)} &= u_1 \end{aligned} \quad (246)$$

Ces deux transformations ont le même jacobien u_1 .

De telle sorte qu'au final l'intégrale I est la somme des quatre termes suivant:

$$\begin{aligned} I &= \pi \int_{[0,1]^3} \frac{M((1 - u_1)u_2 + u_1, (1 - u_1)u_2, \pi u_1 \cdot u_3)}{R((1 - u_1)u_2 + u_1, (1 - u_1)u_2, \pi u_1 \cdot u_3)} (1 - u_1) du_1 du_2 du_3 \\ &+ \pi \int_{[0,1]^3} \frac{M((1 - u_1 \cdot u_3)u_2 + u_1 \cdot u_3, (1 - u_1 \cdot u_3)u_2, \pi u_1)}{R((1 - u_1 \cdot u_3)u_2 + u_1 \cdot u_3, (1 - u_1 \cdot u_3)u_2, \pi u_1)} (1 - u_1 \cdot u_3) du_1 du_2 du_3 \\ &+ \pi \int_{[0,1]^3} \frac{M((1 - u_1)u_2, (1 - u_1)u_2 + u_1, \pi u_1 \cdot u_3)}{R((1 - u_1)u_2, (1 - u_1)u_2 + u_1, \pi u_1 \cdot u_3)} (1 - u_1) du_1 du_2 du_3 \\ &+ \pi \int_{[0,1]^3} \frac{M((1 - u_1 \cdot u_3)u_2, (1 - u_1 \cdot u_3)u_2 + u_1 \cdot u_3, \pi u_1)}{R((1 - u_1 \cdot u_3)u_2, (1 - u_1 \cdot u_3)u_2 + u_1 \cdot u_3, \pi u_1)} (1 - u_1 \cdot u_3) du_1 du_2 du_3 \end{aligned} \quad (247)$$

Tous ces changements de variables ont pour objet de supprimer la singularité et rendent donc possible l'utilisation de méthodes classiques d'intégration de fonctions régulières (poids et points de Gauss).

Méthode de Gay pour segments adjacents. On est dans le cas de deux segments consécutifs (voir fig. 5) et on doit évaluer une intégrale du type:

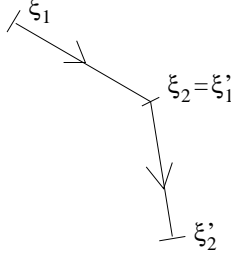


FIGURE 5

$$\tilde{I} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\xi_1'}^{\xi_2'} \int_0^\pi \frac{\tilde{M}(\xi, \xi', \varphi)}{\tilde{R}(\xi, \xi', \varphi)} d\xi d\xi' d\varphi \quad (248)$$

si ξ et ξ' sont des abscisses curvilignes de deux segments consécutifs, *i.e.* $\xi_2 = \xi_1'$ et où \tilde{R} est le même qu'au paragraphe précédent.

On a alors:

$$\tilde{I} = (\xi_2 - \xi_1)(\xi_2' - \xi_2) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^\pi \frac{M(t_1, t_2, \varphi)}{R(t_1, t_2, \varphi)} dt_1 dt_2 t_2 d\varphi, \quad (249)$$

où:

$$\begin{aligned} \xi &= (\xi_1 - \xi_2)t_1 + \xi_2 \\ \xi' &= (\xi_2' - \xi_2)t_2 + \xi_2 \end{aligned}$$

soit:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} \\ t_2 &= \frac{\xi' - \xi_2}{\xi_2' - \xi_2} \end{aligned}$$

et:

$$\begin{aligned} M(t_1, t_2, \varphi) &= \tilde{M}((\xi_1 - \xi_2)t_1 + \xi_2, (\xi_2' - \xi_2)t_2 + \xi_2, \varphi), \\ R(t_1, t_2, \varphi) &= \tilde{R}((\xi_1 - \xi_2)t_1 + \xi_2, (\xi_2' - \xi_2)t_2 + \xi_2, \varphi), \end{aligned}$$

Il nous faut donc évaluer l'intégrale:

$$I = \pi \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{M(t_1, t_2, \pi t_3)}{R(t_1, t_2, \pi t_3)} dt_1 dt_2 dt_3 \quad (250)$$

La singularité est centrée en $t_1 = t_2 = t_3 = 0$. Alors:

$$I = \pi \left(\int_{T_1} \frac{M(t_1, t_2, \pi t_3)}{R(t_1, t_2, \pi t_3)} + \int_{T_2} \frac{M(t_1, t_2, \pi t_3)}{R(t_1, t_2, \pi t_3)} + \int_{T_3} \frac{M(t_1, t_2, \pi t_3)}{R(t_1, t_2, \pi t_3)} \right) dt_1 dt_2 dt_3 \quad (251)$$

où:

$$T_1 = \{t_2 \leq t_1, t_3 \leq t_1\}, T_2 = \{t_1 \leq t_2, t_3 \leq t_2\}, T_3 = \{t_1 \leq t_3, t_2 \leq t_3\}.$$

On fait alors le changement de variables: dans T_1 :

$$\begin{aligned} t_1 &= s_1 \\ t_2 &= s_1 s_2 \\ t_3 &= s_1 s_3 \end{aligned} \quad (252)$$

dans le triangle T_2 :

$$\begin{aligned} t_1 &= s_1 s_2 \\ t_2 &= s_1 \\ t_3 &= s_1 s_3 \end{aligned} \quad (253)$$

et dans le triangle T_3 :

$$\begin{aligned} t_1 &= s_1 s_3 \\ t_2 &= s_1 s_2 \\ t_3 &= s_1 \end{aligned} \quad (254)$$

Le jacobien de ces transformations est: s_1^2 .

$$I = \pi \int_{[0,1]^3} \left(\frac{M(s_1, s_1 s_2, \pi s_1 s_3)}{R(s_1, s_1 s_2, \pi s_1 s_3)} + \frac{M(s_1 s_2, s_1, \pi s_1 s_3)}{R(s_1 s_2, s_1, \pi s_1 s_3)} + \frac{M(s_1 s_3, s_1 s_2, \pi s_1)}{R(s_1 s_3, s_1 s_2, \pi s_1)} \right) s_1^2 ds_1 ds_2 ds_3 \quad (255)$$

10.3.2. Méthode d'utilisation de points de Gauss bien choisis, de Duruflé [15], [16]

Termes as_{ik} , as'_{ik} , bs_{ik} et bs'_{ik} . Ce sont des termes produits $L^2(\Gamma)$ qui sont formés à partir des définitions (65), (75) et (132). Dans ces calculs interviennent des termes élémentaires du type suivant:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(s, s', \phi) \sin \phi \, d\phi = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(s, s', \phi) \sin \phi \cos m\phi \, d\phi = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(s, s', \phi) \cos \phi \sin m\phi \, d\phi = 0 \quad (256)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(s, s', \phi) \cos \phi \, d\phi = 2 \int_0^{\pi} \Phi(s, s', \phi) \cos \phi \, d\phi \quad (257)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(s, s', \phi) \cos \phi \cos m\phi \, d\phi = 2 \int_0^{\pi} \Phi(s, s', \phi) \cos \phi \cos m\phi \, d\phi \quad (258)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(s, s', \phi) \sin \phi \sin m\phi \, d\phi = 2 \int_0^{\pi} \Phi(s, s', \phi) \sin \phi \sin m\phi \, d\phi \quad (259)$$

Termes cs_{ik} et cs'_{ik} . Dans ces calculs interviennent des termes élémentaires du type que les relations ci-dessus (256)-(259), dans lesquelles on substitue $\Phi(s, s', \phi)$, la fonction $\nabla\Phi(s, s', \phi)$.

Il nous faut donc calculer des termes de la forme suivante:

$$a_1 = 2 \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \left\{ \int_0^{\pi} \Phi(s, s', \phi) \cos \phi \, d\phi \right\} \mathcal{F}_1(s, s') \, rr' \, ds \, ds' \quad (260)$$

$$a_2 = 2 \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \left\{ \int_0^{\pi} \Phi(s, s', \phi) \cos \phi \cos m\phi \, d\phi \right\} \mathcal{F}_2(s, s') \, rr' \, ds \, ds' \quad (261)$$

$$a_3 = 2 \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \left\{ \int_0^{\pi} \Phi(s, s', \phi) \sin \phi \sin m\phi \, d\phi \right\} \mathcal{F}_3(s, s') \, rr' \, ds \, ds' \quad (262)$$

et ceux de la forme suivante:

$$c_1 = 2 \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \left\{ \int_0^{\pi} \nabla \Phi(s, s', \phi) \cos \phi d\phi \right\} \cdot \mathcal{G}_1(s, s') rr' ds ds' \quad (263)$$

$$c_2 = 2 \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \left\{ \int_0^{\pi} \nabla \Phi(s, s', \phi) \cos \phi \cos m\phi d\phi \right\} \cdot \mathcal{G}_2(s, s') rr' ds ds' \quad (264)$$

$$c_3 = 2 \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \left\{ \int_0^{\pi} \nabla \Phi(s, s', \phi) \sin \phi \sin m\phi d\phi \right\} \cdot \mathcal{G}_3(s, s') rr' ds ds' \quad (265)$$

L'intégration numérique des termes a_k, c_l , se fait suivant Duruflé [15] à l'aide de formules de quadrature de Gauss que l'on détaille ci-dessous. Il s'agit maintenant de définir plusieurs ensembles de poids et points de Gauss, pour l'approximation de (260),(261),(262), d'une part, de (263),(264),(265) d'autre part. L'étude citée permet de résumer le choix aux formes ci-dessous.

Intégrales régulières. Les intégrales en la variable ϕ s'intègrent à l'aide de $N_{\phi} + 1$ poids et points de Gauss $(\phi_r, \omega_r)_{r=1, N_{\phi}+1}$.

On choisit comme valeur de l'entier $N_{\phi} = 2(n + 4fr_{max})$, où m est le mode de Fourier, f la fréquence et r_{max} , la valeur maximum de la variable R .

Les intégrales en la variable s , intégrales extérieures, s'intègrent à l'aide de $k + 1$ poids et points de Gauss $(\xi_p, \omega_p)_{p=1, (k+1)}$.

Les intégrales en la variable s' , intégrales intérieures, s'intègrent à l'aide de $k + 1$ poids et points de Gauss $(\xi'_q, \omega_q)_{q=1, (k+1)}$.

Dans ces derniers on choisit l'entier $k = 2$ égal à l'ordre de l'approximation.

Intégrales singulières. Les intégrales singulières proviennent des cas où les fonctions courants sur Γ ont des supports confondus (cas défavorables), des supports en contact par un point, enfin du cas où les fonctions courants ont des supports confondus et qu'un point se trouve sur l'axe $r = 0$ (cas les plus défavorables).

Intégrales singulières pour des supports confondus

Les intégrales en la variable ϕ s'intègrent en deux parties, sur un intervalle $[0, \pi] = [0, \phi_1] \cup [\phi_1, \pi]$, où on choisit:

$$\phi_1 = \frac{\pi}{m + 4fr_{max}}$$

Les intégrales en la variable ϕ s'intègrent sur $[\phi_1, \pi]$ à l'aide de $N_{\phi} + 1$ poids et points de Gauss $(\phi_r, \omega_r)_{r=1, N_{\phi}+1}$. Les intégrales en la variable s, s' , intégrales extérieures et intérieures, s'intègrent à l'aide de $2k + 1$ poids et points de Gauss (on surintègre): $(\xi_p, \omega_p)_{p=1, (2k+1)}$ et $(\xi'_q, \omega_q)_{q=1, (2k+1)}$. Ces intégrales se calculent comme les intégrales régulières ci-dessus.

Pour le complément d'intervalle $[0, \phi_1]$, les intégrales en la variable ϕ s'intègrent sur un intervalle $[0, \phi_1]$ à l'aide de $2k + 1$ poids et points de Gauss, pour cette variable on utilise de plus, un méthode dite de Gauss-squared (voir ci-après). Les intégrales en la variable s , intégrales extérieures, s'intègrent à l'aide de $2k + 1$ poids et points de Gauss $(\xi_p, \omega_p)_{p=1, (2k+1)}$. Les intégrales en la variable s' , intégrales intérieures, s'intègrent comme suit (méthode dite Gauss-squared):

chaque valeur ξ_p est une valeur singulière de l'intégrale. On découpe l'intervalle $[0, 1]$ en l'union des trois intervalles $[0, \xi_p]$, $[\xi_p, 2\xi_p]$ et $[2\xi_p, 1]$. On prend autour de cette valeur les poids et points (d'accumulation) de Gauss suivants, sur l'intervalle $[0, \xi_p]$, et pour $q = 1, (2k + 1)$, à l'aide de transformations simples:

$$\xi'_q = \xi_p(1 - \hat{\xi}_q^2) \text{ et } \omega_q = 2\hat{\xi}_q \xi_p \hat{\omega}_q$$

et les points suivants, sur l'intervalle $[\xi_p, 2\xi_p]$, et pour $q = 1, (2k + 1)$:

$$\xi'_q = \xi_p(1 + \hat{\xi}_q^2) \text{ et } \omega_q = 2\hat{\xi}_q\xi_p\hat{\omega}_q$$

enfin pour terminer l'intégration, sur l'intervalle $[2\xi_p, 1]$, et pour $q = 1, (2k + 1)$:

$$(\xi'_q, \omega_q)_{q=1, (2k+1)}$$

Intégrales singulières pour des supports en contact, ou joints

Les intégrales en la variable ϕ s'intègrent à l'aide de poids et points de Gauss $(\phi_r, \omega_r)_{r=1, N_\phi}$.

On choisit comme valeur de l'entier $N_\phi = 2k + 1$,

Les intégrales en la variable s , intégrales extérieures, s'intègrent à l'aide de $2k + 1$ poids et points de Gauss $(\xi_p, \omega_p)_{p=1, (2k+1)}$.

Les intégrales en la variable s' , intégrales intérieures, s'intègrent à l'aide de $2k + 1$ poids et points de Gauss $(\xi'_q, \omega_q)_{q=1, (2k+1)}$.

Intégrales singulières pour des supports supports confondus et axiaux

Les intégrales en la variable ϕ s'intègrent à l'aide de $N_\phi + 1$ poids et points de Gauss $(\phi_r, \omega_r)_{r=1, N_\phi+1}$.

On choisit comme valeur de l'entier $N_\phi = \max(3k, 2m + 1)$, où m est le mode de Fourier.

Les intégrales en la variable s , intégrales extérieures, s'intègrent à l'aide de $3k + 1$ poids et points de Gauss $(\xi_p, \omega_p)_{p=1, (3k+1)}$. Mais on fait le choix en plus de prendre 0 comme point d'accumulation:

$$\xi_p = \hat{\xi}_p^2 \text{ et } \omega_p = 2\hat{\xi}_p\hat{\omega}_p$$

Les intégrales en la variable s' , intégrales intérieures, s'intègrent (méthode Gauss-squared) comme suit: chaque valeur ξ_p est une valeur singulière de l'intégrale, et on prend autour de cette valeur les poids et points (d'accumulation) de Gauss suivants, sur l'intervalle $[0, \xi_p]$, et pour $q = 1, (2k + 1)$:

$$\xi'_q = \xi_p(1 - \hat{\xi}_q^2) \text{ et } \omega_q = 2\hat{\xi}_q\xi_p\hat{\omega}_q$$

et les points suivants, sur l'intervalle $[\xi_p, 2\xi_p]$, et pour $q = 1, (2k + 1)$:

$$\xi'_q = \xi_p(1 + \hat{\xi}_q^2) \text{ et } \omega_q = 2\hat{\xi}_q\xi_p\hat{\omega}_q$$

enfin pour terminer l'intégration, sur l'intervalle $[2\xi_p, 1]$, et pour $q = 1, (2k + 1)$:

$$(\xi'_q, \omega_q)_{q=1, (2k+1)}$$

Au final le calcul des termes matriciels conduit à des expressions d'approximation du type suivant, pour des ensembles de points et poids de Gauss $(\xi_p, \omega_p), (\xi'_q, \omega_q), (\Phi_r, \omega_r)$:

$$\tilde{a}_1 = 2 \sum_p \sum_q \sum_r \omega_p \omega_q \omega_r \Phi(\xi_p, \xi'_q, \phi_r) \cos \phi_r \mathcal{F}_1(\xi_p, \xi'_q) r(\xi_p) r(\xi'_q) \quad (266)$$

$$\tilde{a}_2 = 2 \sum_p \sum_q \sum_r \omega_p \omega_q \omega_r \Phi(\xi_p, \xi'_q, \phi_r) \cos \phi_r \cos m\phi_r \mathcal{F}_2(\xi_p, \xi'_q) r(\xi_p) r(\xi'_q) \quad (267)$$

$$\tilde{a}_3 = 2i \sum_p \sum_q \sum_r \omega_p \omega_q \omega_r \Phi(\xi_p, \xi'_q, \phi_r) \sin \phi_r \sin m\phi_r \mathcal{F}_3(\xi_p, \xi'_q) r(\xi_p) r(\xi'_q) \quad (268)$$

et:

$$\tilde{c}_1 = 2 \sum_p \sum_q \sum_r \omega_p \omega_q \omega_r \nabla \Phi(\xi_p, \xi'_q, \phi_r) \cos \phi_r \mathcal{G}_1(\xi_p, \xi'_q) r(\xi_p) r(\xi'_q) \quad (269)$$

$$\tilde{c}_2 = 2 \sum_p \sum_q \sum_r \omega_p \omega_q \omega_r \nabla \Phi(\xi_p, \xi'_q, \phi_r) \cos \phi_r \cos m \phi_r \mathcal{G}_2(\xi_p, \xi'_q) r(\xi_p) r(\xi'_q) \quad (270)$$

$$\tilde{c}_3 = 2i \sum_p \sum_q \sum_r \omega_p \omega_q \omega_r \nabla \Phi(\xi_p, \xi'_q, \phi_r) \sin \phi_r \sin m \phi_r \mathcal{G}_3(\xi_p, \xi'_q) r(\xi_p) r(\xi'_q) \quad (271)$$

11. CAS TEST ET COMPARAISONS

Le premier des paragraphes qui suivent est particulièrement destiné à la vérification algébrique des termes matriciels. Les autres concernent la vérification du calcul de champ proprement dit.

11.1. Étude des valeurs propres de l'opérateur *efie* sur la sphère conductrice.

On reprend l'exposé proposé dans les textes, et les notations pour cette section, de [10] ou [36]. On définit les fonctions classiques suivantes:

- $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$: fonction de Bessel d'ordre $n + \frac{1}{2}$.
- $j_n(x)$: fonction sphérique de Bessel d'ordre n .
- $\psi_n(x)$: fonction de Ricatti-Bessel d'ordre n .
- $Y_{n+\frac{1}{2}}(x)$: fonction de Neumann d'ordre $n + \frac{1}{2}$.
- $y_n(x)$: fonction sphérique de Neumann d'ordre n .
- $\zeta_n(x)$: fonction de Ricatti-Neumann d'ordre n .
- $H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x)$: fonction de Hankel de première espèce d'ordre $n + \frac{1}{2}$.
- $h_n^{(1)}(x)$: fonction sphérique de Hankel de première espèce d'ordre n .
- $\xi_n^{(1)}(x)$: fonction sphérique de Ricatti-Hankel de première espèce d'ordre n .

On a les relations suivantes:

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x) \quad (272)$$

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{n+\frac{1}{2}}(x) \quad (273)$$

$$h_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) \quad (274)$$

et d'autre part:

$$\psi_n(x) = x j_n(x) \quad (275)$$

$$\zeta_n(x) = x y_n(x) \quad (276)$$

$$\xi_n^{(1)}(x) = x h_n^{(1)}(x) \quad (277)$$

enfin on peut montrer aisément les relations:

$$\psi_n'(x) = \frac{x}{2n+1} ((n+1)j_{n-1}(x) - n j_n(x)) \quad (278)$$

$$\xi_n^{(1)'}(x) = \frac{x}{2n+1} ((n+1)h_{n-1}^{(1)}(x) - n h_n^{(1)}(x)) \quad (279)$$

Soit S_a^2 la sphère de rayon a . On désigne par \vec{r} le vecteur unitaire radial, normal à la sphère. On définit $TL_2(S_a^2)$ comme l'ensemble des champs tangents complexes de carré intégrable:

$$TL_2(S_a^2) = \{J(a\vec{r}) \in L_2(S_a^2)^3, J(a\vec{r}) \cdot \vec{r} = 0\} \quad (280)$$

Cette variété possède une base de fonctions: les harmoniques sphériques \tilde{Y}_n^m , que l'on définit comme suit:

$$\tilde{Y}_n^m = P_n^{|m|}(\cos \theta)e^{im\varphi}, \quad n \geq 0, |m| \leq n \quad (281)$$

et:

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}, \quad m \geq 0, \quad (282)$$

On définit aussi les scalaires:

$$d_{n,m} = \frac{1}{4\pi} \frac{(n-|m|)!(2n+1)}{(n+|m|)!n(n+1)} \quad (283)$$

où (θ, φ) sont les angles usuels des coordonnées sphériques. On introduit alors les fonctions:

$$\begin{aligned} u_{n,m}^{(+)}(a\vec{r}) &= d_{n,m}^{1/2} \vec{\nabla}_{S_a^2} \tilde{Y}_n^m(\vec{r}) \\ u_{n,m}^{(-)}(a\vec{r}) &= d_{n,m}^{1/2} \vec{r} \wedge \vec{\nabla}_{S_a^2} \tilde{Y}_n^m(\vec{r}) \end{aligned} \quad (284)$$

où:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_{S_a^2}(r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} \vec{\theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi} \vec{\varphi} \right) \\ \vec{r} \wedge \vec{\nabla}_{S_a^2}(r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} \vec{\varphi} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi} \vec{\theta} \right) \end{aligned} \quad (285)$$

et:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{bmatrix} \quad \vec{\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{bmatrix} \quad \vec{\varphi} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (286)$$

Alors tout champ J de $TL_2(S_a^2)$ peut être décomposé en:

$$J(a\vec{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \sum_{\epsilon=\pm} J_{n,m}^{(\epsilon)} u_{n,m}^{(\epsilon)}(a\vec{r}) \quad (287)$$

Dans la suite D_a^- désigne un domaine sphérique délimité par S_a^2 , et par D_a^+ , l'ouvert complémentaire de D_a^- . Soit $J(x)$ un courant de surface sur S_a^2 , on définit pour $y \in D_a^- \cup D_a^+$

$$\tilde{T}J(y) = k \int_{S_a^2} (\Phi(x, y)J(x) + \frac{1}{k^2} \vec{\nabla}_x \Phi(x, y) \operatorname{div}_{S_a^2} J(x)) d\sigma(x) \quad (288)$$

où $\operatorname{div}_{S_a^2}$ est la divergence surfacique et où Φ est la fonction de Green donnée par (28). On définit d'autre part, à partir de ce qui précède les deux opérateurs suivants (revoir (48)(49)):

$$TJ(y) = kTJ(y) = \lim_{x \rightarrow y} n(y) \wedge (\tilde{T}J(x) \wedge n(y)) \quad (289)$$

et:

$$KJ(y) = \mathcal{K}J(y) = \left(\int_{\Gamma} n(y) \wedge (\vec{\nabla}_x \Phi(x, y) \wedge J(x)) d\Gamma(x) \right) \wedge n(y) \quad (290)$$

On peut alors démontrer que l'action sur la base complète déterminée ci-dessus des opérateurs T et K , conduit d'une part à:

$$i T \vec{\nabla}_{S_a^2} \tilde{Y}_n^m(\vec{r}) = -\xi_n^{(1)'}(ka) \psi_n'(ka) \vec{\nabla}_{S_a^2} \tilde{Y}_n^m(\vec{r}), \quad (291)$$

$$K \vec{\nabla}_{S_a^2} \tilde{Y}_n^m(\vec{r}) = k_n (\vec{r} \wedge \vec{\nabla}_{S_a^2} \tilde{Y}_n^m(\vec{r})), \quad (292)$$

avec:

$$k_n = \frac{i}{2} (\xi_n^{(1)'}(ka) \psi_n(ka) + \xi_n^{(1)}(ka) \psi_n'(ka)),$$

et d'autre part à:

$$i T (\vec{r} \wedge \vec{\nabla}_{S_a^2} \tilde{Y}_n^m(\vec{r})) = -\xi_n^{(1)}(ka) \psi_n(ka) (\vec{r} \wedge \vec{\nabla}_{S_a^2} \tilde{Y}_n^m(\vec{r})), \quad (293)$$

$$K (\vec{r} \wedge \vec{\nabla}_{S_a^2} \tilde{Y}_n^m(\vec{r})) = k_n \vec{\nabla}_{S_a^2} \tilde{Y}_n^m(\vec{r}). \quad (294)$$

C'est-à-dire en particulier que $u_{n,m}^{(+)}$ et $u_{n,m}^{(-)}$ sont les fonctions propres de T avec respectivement, les valeurs propres $t_{n,m}^{(+)} = i \xi_n^{(1)'}(ka) \psi_n'(ka)$ et $t_{n,m}^{(-)} = i \xi_n^{(1)}(ka) \psi_n(ka)$. Et $(u_{n,m}^{(+)} + u_{n,m}^{(-)})$ et $(u_{n,m}^{(+)} - u_{n,m}^{(-)})$ sont les fonctions propres de K avec respectivement, les valeurs propres $+k_n$ et $-k_n$.

On cherchera à valider ces résultats en comparant les valeurs de $t_{n,m}^{(+)}$, $t_{n,m}^{(-)}$, $+k_n$ et $-k_n$ avec les valeurs propres respectives de la matrice d'assemblage du problème linéaire associé à la diffraction d'onde par une sphère conductrice

11.2. Calcul de la surface équivalente radar, la SER.

11.2.1. Calcul de la SER pour $m \neq 0$.

On peut évaluer la SER à l'aide de la quantité champ à l'infini défini sur un pourtour Γ , pour toute direction de l'espace ξ , par:

$$S(\xi) = i\omega\mu_0(\hat{\mathbf{j}}(\xi) - \xi(\xi, \hat{\mathbf{j}}(\xi))) - ik(\xi \wedge \hat{\mathbf{m}}(\xi)),$$

où:

$$\hat{\mathbf{j}}(\xi) = \int_{\partial O} e^{-ik\xi y} \mathbf{j}(y) d\gamma(y),$$

et:

$$\hat{\mathbf{m}}(\xi) = \int_{\partial O} e^{-ik\xi y} \mathbf{m}(y) d\gamma(y).$$

On prend de plus (on omet les indices m):

$$\vec{\mathbf{j}} = j_{rz} \cos(m\theta) \vec{\tau}_{rz} + j_\theta \sin(m\theta) \vec{\tau}_\theta,$$

$$\vec{\mathbf{m}} = m_{rz} \sin(m\theta) \vec{\tau}_{rz} + m_\theta \cos(m\theta) \vec{\tau}_\theta,$$

$$\text{avec : } \vec{\tau}_{rz} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial s} \cos \theta \\ \frac{\partial r}{\partial s} \sin \theta \\ \frac{\partial r}{\partial s} \end{bmatrix}, \quad \vec{\tau}_\theta = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{D'autre part si: } \xi = \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{bmatrix} \text{ et } y = \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{bmatrix},$$

alors :

$$e^{-ik\xi y} = C e^{-i\chi(r) \cos \theta}$$

$$\text{si: } \chi(r) = kr \sin \alpha, \text{ et: } C = e^{-ikz \cos \alpha}.$$

Alors on a:

$$\hat{\mathbf{j}}(\xi) = \int_{\Gamma} C \mathbf{j}_{rz} \int_0^{2\pi} e^{-i\chi(r) \cos \theta} \cos(m\theta) \overrightarrow{\tau_{rz}} r d\theta ds + \int_{\Gamma} C \mathbf{j}_{\theta} \int_0^{2\pi} e^{-i\chi(r) \cos \theta} \sin(m\theta) \overrightarrow{\tau_{\theta}} r d\theta ds,$$

et:

$$\hat{\mathbf{m}}(\xi) = \int_{\Gamma} C \mathbf{m}_{rz} \int_0^{2\pi} e^{-i\chi(r) \cos \theta} \sin(m\theta) \overrightarrow{\tau_{rz}} r d\theta ds + \int_{\Gamma} C \mathbf{m}_{\theta} \int_0^{2\pi} e^{-i\chi(r) \cos \theta} \cos(m\theta) \overrightarrow{\tau_{\theta}} r d\theta ds.$$

Si on utilise les relations classiques des fonctions de Bessel B_m (voir *infra* relation (299)), on obtient finalement les 3 composantes de $\hat{\mathbf{j}}(\xi)$:

$$(\hat{\mathbf{j}}(\xi))_1 = i^{m-1} \pi \int_{\Gamma} C \mathbf{j}_{rz} r \partial r [B_{m-1}(\chi(r)) - B_{m+1}(\chi(r))] ds - i^{m-1} \pi \int_{\Gamma} C \mathbf{j}_{\theta} r [B_{m-1}(\chi(r)) + B_{m+1}(\chi(r))] ds$$

$$(\hat{\mathbf{j}}(\xi))_2 = 0$$

$$(\hat{\mathbf{j}}(\xi))_3 = 2i^m \pi \int_{\Gamma} C \mathbf{j}_{rz} r \partial z [B_m(\chi(r))] ds$$

et les 3 composantes de $\hat{\mathbf{m}}(\xi)$:

$$(\hat{\mathbf{m}}(\xi))_1 = 0$$

$$(\hat{\mathbf{m}}(\xi))_2 = i^{m-1} \pi \int_{\Gamma} C \mathbf{m}_{rz} r \partial r [B_{m-1}(\chi(r)) + B_{m+1}(\chi(r))] ds + i^{m-1} \pi \int_{\Gamma} C \mathbf{m}_{\theta} r [B_{m-1}(\chi(r)) - B_{m+1}(\chi(r))] ds$$

$$(\hat{\mathbf{m}}(\xi))_3 = 0$$

On est donc à même de déterminer le vecteur $S(\xi)$ avec lequel on forme le nombre réel SER.

11.2.2. Calcul de la SER pour $m = 0$.

On considère toujours le champ à l'infini de la section précédente avec les quantités déjà définies. On prend dans le cas du mode $m = 0$:

$$\overrightarrow{\mathbf{j}} = \mathbf{j}_{rz}^0 \overrightarrow{\tau_{rz}},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{m}} = \mathbf{m}_{\theta}^0 \overrightarrow{\tau_{\theta}}.$$

Alors:

$$\hat{\mathbf{j}}(\xi) = \int_{\Gamma} C \mathbf{j}_{rz} \int_0^{2\pi} e^{-i\chi(r) \cos \theta} \overrightarrow{\tau_{rz}} r d\theta ds$$

et:

$$\hat{\mathbf{m}}(\xi) = \int_{\Gamma} C \mathbf{m}_{\theta} \int_0^{2\pi} e^{-i\chi(r) \cos \theta} \overrightarrow{\tau_{\theta}} r d\theta ds$$

et donc:

$$(\hat{j}(\xi))_1 = 2i\pi \int_{\Gamma} C_{rz}^0 r \partial r B_1(\chi(r)) ds$$

$$(\hat{j}(\xi))_2 = 0$$

$$(\hat{j}(\xi))_3 = 2\pi \int_{\Gamma} C_{rz}^0 r \partial z B_0(\chi(r)) ds$$

et les 3 composantes de $\hat{\mathbf{m}}(\xi)$:

$$(\hat{\mathbf{m}}(\xi))_1 = 0$$

$$(\hat{\mathbf{m}}(\xi))_2 = 2i\pi \int_{\Gamma} C_{\theta}^0 r B_1(\chi(r)) ds$$

$$(\hat{\mathbf{m}}(\xi))_3 = 0$$

11.3. Diffraction de la sphère conductrice.

La formulation mathématique du problème couplé et non borné, des équations de Maxwell en volume et en surface, qui résout le problème de la diffraction d'ondes planes par un objet borné quelconque, a été codée. Les tests de la mise au point informatique sont de plusieurs sortes:

- D'abord des cas élémentaires de vérifications locales du calcul des intégrales singulières, des termes matriciels.
- Des cas analytiques comme la diffraction de sphères et les calculs à l'aide des séries de Mie. On teste la nouvelle formulation sur les solutions analytiques de la sphère conductrice ou diélectrique, diffractée par une onde plane.
- On compare les résultats de la nouvelle formulation avec les solutions obtenues avec *SHF89* et *SHFC*, sur certains cas bien choisis.

A cette fin on présente pour terminer la décomposition de l'onde incidente en modes de Fourier. On reprend pour cela les calculs de [23].

Dans la suite on désigne par c , la vitesse de la lumière et par η l'impédance caractéristique du vide. On considère classiquement deux polarisations des champs incidents E^{inc} et H^{inc} , que l'on définit selon une polarisation 1 et polarisation 2 et que l'on note E_j^{inc} et H_j^{inc} respectivement: si $j = 1, 2$ est la polarisation, si \vec{x} désigne le vecteur (x, y, z) , on écrit le champ électromagnétique sous la forme suivante (voir figure 5):

$$E_j^{inc}(x, y, z) = E_{0j} \vec{e}_{0j} e^{ic\vec{u}_0 \cdot \vec{x}} \quad (295)$$

et

$$H_j^{inc}(x, y, z) = H_{0j} \vec{h}_{0j} e^{ic\vec{u}_0 \cdot \vec{x}} \quad (296)$$

où les vecteurs unitaires \vec{e}_{0j} et \vec{h}_{0j} vérifient $\vec{u}_0 = \vec{e}_{0j} \wedge \vec{h}_{0j}$. On prend d'autre part le vecteur incident \vec{u}_0 dans le plan xOz et on note $\alpha = \text{angle}(\vec{u}_0, \vec{Oz})$.

Pour la polarisation 1, le champ incident est dans le plan xOz orthogonal au vecteur \vec{u}_0 :

$$\vec{E}_1^{inc}(x, y, z) = E_{01} \begin{bmatrix} -\cos\alpha \\ 0 \\ \sin\alpha \end{bmatrix}; \quad \vec{H}_1^{inc}(x, y, z) = \frac{E_{01}}{\eta} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (297)$$

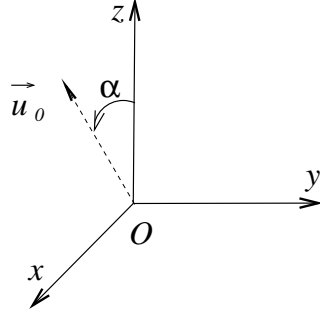


FIGURE 6

et pour la polarisation 2, le champ incident est orthogonal au plan xOz :

$$\overrightarrow{E_2^{inc}}(x, y, z) = E_{02} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \overrightarrow{H_2^{inc}}(x, y, z) = \frac{E_{02}}{\eta} \begin{bmatrix} -\cos \alpha \\ 0 \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (298)$$

On introduit les fonctions de Bessel suivantes, pour $m \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{R}$:

$$B_m(z) = \frac{(-i)^m}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iz \cos \theta} \cos(m\theta) d\theta \quad (299)$$

Alors suivant [23] (proposition II.4 et annexe 2), on propose la décomposition suivante:

Proposition 11.1. Si $\chi(r) = cr \sin \alpha$, le champ incident $\overrightarrow{E_j^{inc}}(r, \theta, z)$ et $\overrightarrow{H_j^{inc}}(r, \theta, z)$, pour $j = 1, 2$, se décompose en modes de Fourier selon les expressions suivantes:

$$\overrightarrow{E_1^{inc}}(r, \theta, z) = E_{01} e^{icz \cos \alpha} \left\{ \begin{bmatrix} -i \cos \alpha B_1(\chi(r)) \\ 0 \\ \sin \alpha B_0(\chi(r)) \end{bmatrix} + \sum_{m>0} 2 \begin{bmatrix} i^{m+1} \cos \alpha \left[\frac{B_{m-1}(\chi(r)) - B_{m+1}(\chi(r))}{2} \right] \cos m\theta \\ i^{m-1} \cos \alpha \left[\frac{B_{m-1}(\chi(r)) + B_{m+1}(\chi(r))}{2} \right] \sin m\theta \\ i^m \sin \alpha B_m(\chi(r)) \cos m\theta \end{bmatrix} \right\} \quad (300)$$

$$\overrightarrow{H_1^{inc}}(r, \theta, z) = -\frac{E_{01}}{\eta} e^{icz \cos \alpha} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ i B_1(\chi(r)) \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{m>0} 2 \begin{bmatrix} i^{m-1} \left[\frac{B_{m-1}(\chi(r)) + B_{m+1}(\chi(r))}{2} \right] \sin m\theta \\ i^{m-1} \left[\frac{B_{m-1}(\chi(r)) - B_{m+1}(\chi(r))}{2} \right] \cos m\theta \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (301)$$

$$\vec{E}_2^{inc}(r, \theta, z) = E_{02} e^{icz \cos \alpha} \left\{ \left[\begin{array}{c} 0 \\ i B_1(\chi(r)) \\ 0 \end{array} \right] + \sum_{m>0} 2 \left[\begin{array}{c} i^{m-1} \left[\frac{B_{m-1}(\chi(r)) + B_{m+1}(\chi(r))}{2} \right] \sin m\theta \\ i^{m-1} \left[\frac{B_{m-1}(\chi(r)) - B_{m+1}(\chi(r))}{2} \right] \cos m\theta \\ 0 \end{array} \right] \right\} \quad (302)$$

$$\vec{H}_2^{inc}(r, \theta, z) = \frac{E_{02}}{\eta} e^{icz \cos \alpha} \left\{ \left[\begin{array}{c} -i \cos \alpha B_1(\chi(r)) \\ 0 \\ \sin \alpha B_0(\chi(r)) \end{array} \right] + \sum_{m>0} 2 \left[\begin{array}{c} i^{m+1} \cos \alpha \left[\frac{B_{m-1}(\chi(r)) - B_{m+1}(\chi(r))}{2} \right] \cos m\theta \\ i^{m-1} \cos \alpha \left[\frac{B_{m-1}(\chi(r)) + B_{m+1}(\chi(r))}{2} \right] \sin m\theta \\ i^m \sin \alpha B_m(\chi(r)) \cos m\theta \end{array} \right] \right\} \quad (303)$$

12. APERÇUS NUMÉRIQUES.

On présente, très rapidement, trois types de résultats qui rendent compte de la bonne qualité des calculs menés dans cette étude.

12.1. Calcul de valeurs propres: validité des matrices de la discrétisation.

On compare dans les deux tableaux suivants, les valeurs propres calculées à l'aide du code FuMel (la sphère de rayon 1 m est maillée avec seulement 32 éléments), aux valeurs propres analytiques des relations (291) et (293), c'est la figure 7, et les relations (292) et (294), c'est la figure 8. La représentation des valeurs propres sur la figure est la suivante: les parties réelles et imaginaires des valeurs propres de \mathbb{C} , sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée. L'accord est bon.

Comparaison valeurs propres exactes-calculées - Matrice A_JJ, A_MM
MODE 0 - Maillages sph_diel, TH_FIN

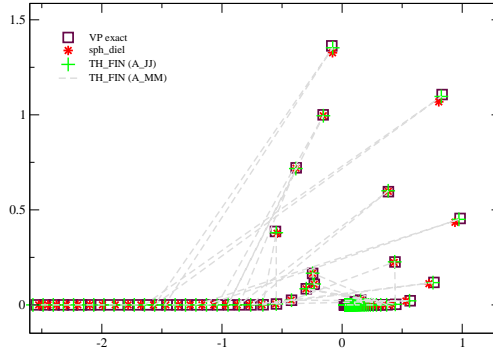


FIGURE 7

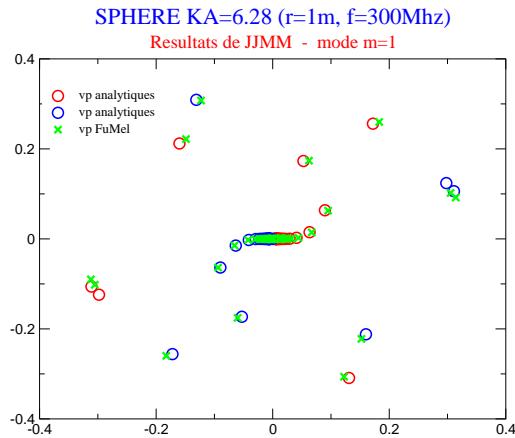


FIGURE 8

12.2. Diffraction d'une sphère conductrice et série de Mie.

On compare le calcul de la SER réalisé à l'aide du code FuMel (figure 9), d'une sphère conductrice de rayon $R = 0.25m$, à incidence 0 degré, à la SER calculée avec les séries de Mie. L'accord est excellent.

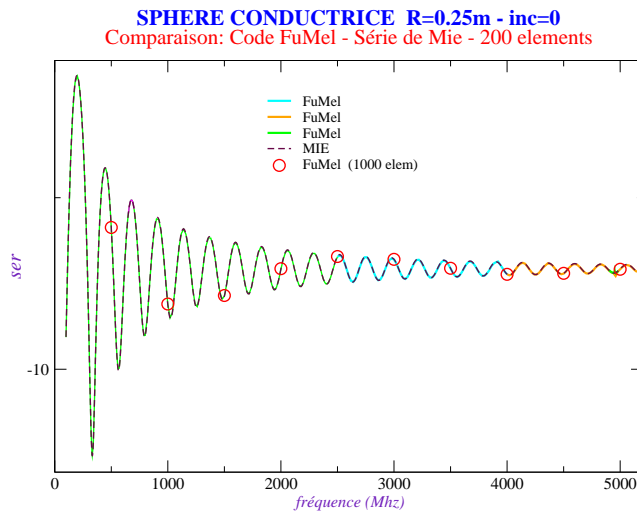


FIGURE 9

12.3. Diffraction d'une sphère diélectrique et série de Mie.

On compare le calcul de la SER réalisé à l'aide du code FuMel (figure 10), d'une sphère conductrice de rayon $R = 0.245m$, recouverte par $5mm$ de diélectrique homogène ($\epsilon = 3., \mu = 2.$), à incidence 0 degré, à la SER calculée avec les séries de Mie. Chacun des calculs est réalisé bien sûr, sur un maillage identique. Là encore l'accord est excellent avec l'analytique, comme on peut le constater sur le grossissement de la figure 11.

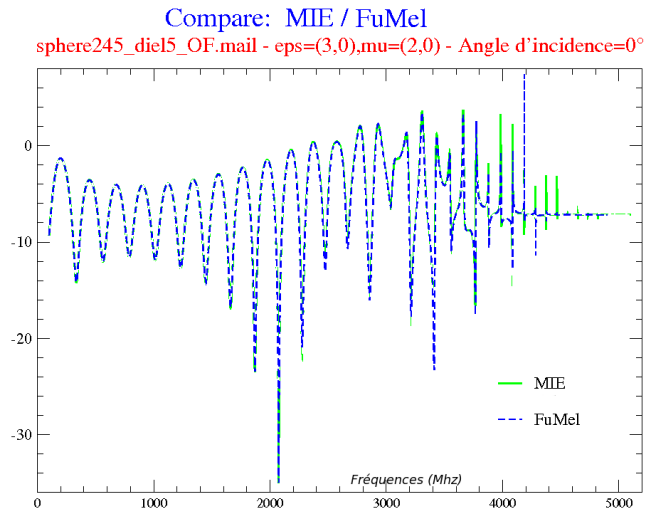


FIGURE 10

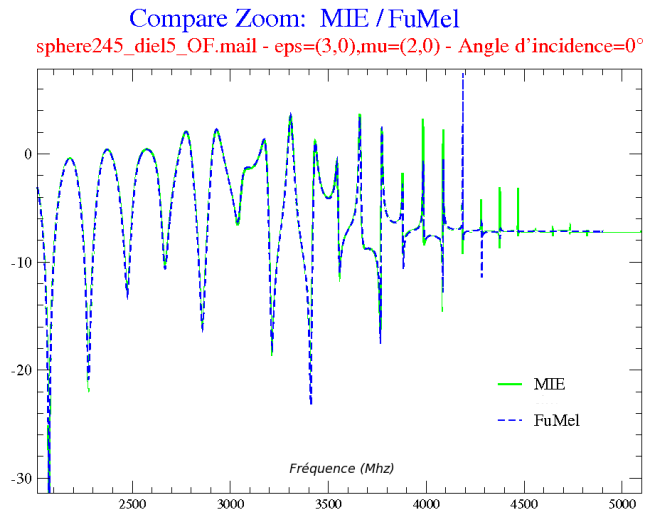


FIGURE 11

13. CONCLUSIONS

Cette nouvelle approche a l'avantage d'être complète en ce sens qu'elle fait intervenir le champ électromagnétique dans toutes ses composantes, celui qui est naturel à calculer dans la physique de la diffraction d'onde. Cet aspect de robustesse de la méthode est très important: il est nécessaire, pour la facilité de mise en oeuvre des solutions techniques, pour l'étude et la réduction de la SER, de disposer d'un outil fiable dans les nouvelles conditions de son utilisation: très hautes fréquences, maillages très fins et très peuplés. C'est le but poursuivi par cette nouvelle présentation de calculs et sa mise en forme informatique, sous la forme du nouveau code de calcul FuMel. La mise au point de l'élément fini de bord et son codage représentent la partie non classique de cette étude. Leur couplage avec des éléments finis de volume déjà codés est plus aisé, mais a nécessité d'intenses efforts de développement informatique.

La formulation et le code FuMel fonctionnent aussi bien en formulation *efie*, *mfie* que *cfie*. Cette dernière

formulation, bien qu'ayant des qualités d'approximation moindre que la *efie*, présente l'avantage d'éviter les problèmes liés aux fréquences de résonance. Il est très aisé de modéliser les matériaux anisotropes. Il suffit pour cela de remplacer les constantes électriques ε et μ , par les matrices 3×3 qui représentent ces tenseurs, exprimés dans la géométrie axisymétrique. Les calculs dans le nouveau code sont effectués avec des éléments finis d'ordre 1. L'intérêt de cette nouvelle formulation est aussi la possibilité, dans un second temps [7], de faire des approximations à des ordres supérieurs, 2 ou 3, et aussi d'introduire des éléments finis courbes, mieux à même de décrire des formes quelconques. On peut espérer certainement une aussi bonne ou meilleure approximation pour un ordre donné que ce que l'on connaissait auparavant.

Un rapport de présentation des différents aspects de la résolution et du codage, prolongera cette étude théorique. En particulier on s'attardera sur la résolution d'algèbre linéaire du problème. On donnera un ensemble exhaustif des possibilités et des réalisations de calcul possible avec le code FuMel.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Bendali, A., (1984): *Approximation par éléments finis de surface de problèmes de diffraction des ondes électromagnétiques*. Thèse de doctorat, Université Paris VI.
- [2] Bonnemason, P., (2010): *Communication écrite*.
- [3] Bonnemason, P., Lacoste, P., (1995): *Une formulation éléments finis-équations intégrales pour le calcul de la SER d'objets 3D quelconques: le code SUMER_C*. Rapport DAM/CEL-V/DMA/MCN n°2676.
- [4] Brezis, H., (1986): *Analyse fonctionnelle*. Masson, Paris.
- [5] Buffa, A., Ciarlet, P. (2001): *On traces for functional spaces related to Maxwell's equations. Part I: An integration by parts formula in Lipschitz polyhedra*. Math. Methods Appl. Sci., **24**, pp. 9-30.
- [6] Buffa, A., Hiptmair, R. (2004): *A coercive combined field integral equation for electromagnetic scattering*. SIAM J., Numer. Anal., **42**, pp. 621-640.
- [7] Cambon, S., *Thèse à paraître*. INSA Toulouse.
- [8] Cessenat, M., (1986): *Mathematical methods in electromagnetism problems*. North-Holland, Amsterdam.
- [9] Ciarlet, P.G., (1986): *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland, Amsterdam.
- [10] Collino, F., (2008): *Iterative methods and integral equations for electromagnetism: a systematic study for spherical geometry*. Rapport d'étude CEA.
- [11] Collino, F., Ghanemi, S., Joly P. (1998): *Domain decomposition method for harmonic wave propagation : a general presentation*. Rapport INRIA-RR, no 3473.
- [12] Colton, D., Kress, R., (1992): *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg.
- [13] Dautray, R., Lions, J.-L., (1991): *Handbook*. Dunod, Paris.
- [14] Dunn, E.A., Byun, J.-K., Branch, E.D., Jin, J.-M., (2006): *Numerical Simulation of BOR Scattering and Radiation Using a Higher Order FEM*. IEEE Trans. Antennas Propag., **54**, n°3.
- [15] Durufflé, M., (2006): *Intégration numérique et éléments finis d'ordre élevé appliqués aux équations de Maxwell en régime harmonique*. Thèse de l'Université Paris Dauphine.
- [16] Durufflé, M., (2008): *Communication écrite*.
- [17] Duvaut, G., Lions, J.-L., (1971): *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris.
- [18] Gay, J., (1993): *Une décomposition du champ électromagnétique en partie symétrique et antisymétrique réelle et en séries de Fourier*. Rapport DAM/CESTA/SIS.
- [19] Gay, J., Haugazeau, Y., (1991): *Structure symétrique pour les systèmes de Maxwell couplés entre éléments finis et équations intégrales*. Rapport CESTA/SI n°97.
- [20] Gay, J., Lacoste, P., (1991): *A new family of finite element for the Maxwell-Fourier equations*. In: Cohen, G., Halpern, L., Joly, P., eds, Proceedings of the 1-st Int. conf. on math. aspects of wave prop. SIAM, Strasbourg 746-749.
- [21] Grisvard, P., (1963): *Espaces intermédiaires entre espaces de Sobolev avec poids*. Ann. Scuol. Sup. Pisa, série III, **XVII**, 255-296.
- [22] Hanouzet, B., (1971): *Rendi Conti del Seminario matematico della Universita di Padova*. Vol. XLVI .
- [23] Hélot, J.-P., (1996): *Prise en compte des problèmes d'antennes dans un code d'équations intégrales*. Thèse de l'Université de Bordeaux.
- [24] Lacoste, P., (2000): *Solution of Maxwell equation in axisymmetric geometry by Fourier series decomposition and by use of H(rot) conforming finite element*. Numer. Math. **84** (4), 577-609.
- [25] Lacoste, P., (1996): *Couplage des éléments finis volumiques PALAS et des éléments finis surfaciques ARLENE. Théorie. Codage. Tests de référence et validation*. Rapport CISI/RSO-CESTA n°96T060.
- [26] Levillain, F., (1991): *Couplage éléments finis équations intégrales pour la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogène*. École Polytechnique.

- [27] McLean, W., (2000): *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral equations*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [28] Martin, P.A., Ola, P., (1993): *Boundary integral equations for the scattering of electromagnetic waves by a homogeneous dielectric obstacle*. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, **123A**, 185-208.
- [29] Mercier, B., Raugel, G., (1982): *Résolution d'un problème aux limites dans un ouvert axisymétrique par élément finis en r, z et séries de Fourier en θ* . RAIRO d'analyse numérique, **16**, 405-461.
- [30] Morgan, M., Mei, K., (1979): *Finite-element computation of scattering by inhomogeneous penetrable bodies of revolution*. IEEE Trans. Antennas Propag., **27**, n°2.
- [31] Nédélec, J.-C., (1980): *Mixed finite elements in \mathbb{R}^3* . Numer. Math. **35**, 315-341.
- [32] Nédélec, J.-C., (2001): *Linear Integral Equations: Integral Representations for Harmonic Problems*. Applied Mathematical Sciences, 144. Springer-Verlag, New York.
- [33] Panich, O.I., (1965): *On the question of solvability of the exterior boundary-value problem for the wave equation and Maxwell's equation*. Usp. Mat. Nauk 20A, 221-226 (en russe).
- [34] Raviart, P.-A., Thomas, J.-M., (1977): *A mixed finite element method for second order elliptic problems*. Springer Verlag, Berlin.
- [35] Stupfel, B., Le Martret, R., Bonnemason, P., Scheurer, B., (1991): *Combined boundary-element and finite-element method for the scattering problem by axisymmetric penetrable objects*. In: Cohen, G., Halpern, L., Joly, P., eds, Proceedings of the 1-st Int. conf. on math. aspects of wave prop. SIAM, Strasbourg 332-341.
- [36] Zerbib, N., (2005): *Méthodes de sous-structuration et de décomposition de domaine pour la résolution des équations de Maxwell : Application au rayonnement d'antenne dans un environnement complexe*. Thèse. INSA Toulouse.