



# Symétrie et théorie des groupes à travers la physique

Jacques Villain

► **To cite this version:**

| Jacques Villain. Symétrie et théorie des groupes à travers la physique. 2009. cea-00396043

**HAL Id: cea-00396043**

**<https://hal-cea.archives-ouvertes.fr/cea-00396043>**

Preprint submitted on 16 Jun 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Symétrie et théorie des groupes à travers la physique

Jacques Villain

18 juin 2009

## Résumé

Les propriétés de la matière sont liées, comme l'avait remarqué Pierre Curie en 1884, au type de symétrie qui y règne. La théorie des groupes est un outil systématique, mais pas toujours commode, pour exploiter cette symétrie, notamment quand il faut trouver les vecteurs propres et valeurs propres d'un opérateur. Certaines propriétés (pouvoir rotatoire optique, piézoélectricité...) sont interdites dans des cristaux ou molécules de haute symétrie. Quelques théorèmes (Noether, Goldstone...) établissent des relations générales entre les propriétés physiques et la symétrie. On passe en revue quelques applications de la théorie des groupes à la physique de la matière condensée, à la physique des particules élémentaires, à la mécanique quantique, à l'électromagnétisme. La théorie des groupes n'est pas seulement un outil, mais aussi une belle construction qui permet de mieux comprendre la nature.

## 1 Symétrie et propriétés physiques

Notre vie est possible grâce aux propriétés physique des molécules qui nous entourent :  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $H_2O$ .... Or ces propriétés physiques dépendent beaucoup de la symétrie. Ainsi les molécules  $O_2$  et  $N_2$  sont symétriques par rapport à leur centre de gravité (Fig. 1). Cela implique que leur moment électrique est nul. Cette propriété subsiste quand la molécule vibre. Il en résulte que l'air sec n'absorbe pas le rayonnement infrarouge émis par la terre<sup>1</sup>. L'effet de serre est donc dû uniquement à l'eau et à d'autres molécules moins symétriques. Les molécules les plus abondantes dans l'air ( $O_2$  et  $N_2$ ) ne contribuent pas à l'effet de serre. C'est un résultat essentiel, et pourtant sa démonstration est élémentaire.

Nous donnerons un autre exemple qui concerne un matériau à la mode actuellement, le graphène[40]. Sa structure électronique a une propriété remarquable : la bande de conduction et la bande de valence sont situées l'une au dessus de l'autre mais se touchent en un nombre fini de points de l'espace réciproque, à la différence de ce qui se passe soit dans un métal, soit dans un isolant ou un semi-conducteur. Nous montrons dans l'appendice A comment cela résulte de la symétrie.

Ce sont là des exemples de la simplification souvent apportée par la symétrie dans les problèmes de physique. Il existe des problèmes où la symétrie est plus compliquée, mais néanmoins permet de faciliter l'analyse des propriétés physiques. Il est alors souvent utile d'utiliser la notion de groupe et la théorie des groupes.

Le présent texte est la version française d'un cours introductif présenté à une école sur la symétrie en physique de la matière condensée, tenue en mai 2009. Nous ferons de nombreuses références aux autres cours de cette école, qui seront publiés en 2010 au Journal de Physique

---

<sup>1</sup>Cependant les molécules d'oxygène et d'azote peuvent acquérir un moment électrique si les électrons se déplacent par rapport aux noyaux, mais cela correspond à des fréquences de vibration élevées qui sont celles de la lumière visible. L'oxygène et l'azote absorbent donc une partie de la lumière visible venant du soleil.

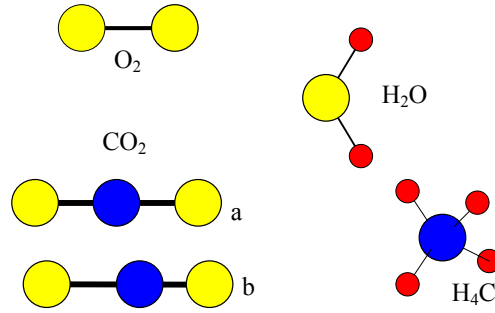


FIG. 1 – Symétrie de différentes molécules. L’oxygène est centrosymétrique et conserve sa symétrie quand il vibre. Il en résulte qu’il ne peut ni absorber ni émettre du rayonnement infrarouge. L’eau, le dioxyde de carbone et le méthane ont un moment électrique variable quand ils vibrent, peuvent absorber et émettre du rayonnement infrarouge. Le dioxyde de carbone a, par symétrie, un moment électrique moyen nul (a) mais acquiert un moment non nul quand il vibre (b). Le méthane a une propriété analogue.

IV. Cette publication aura l’avantage de réunir de façon compacte la plupart des éléments nécessaires à un approfondissement, mais cet approfondissement peut aussi se trouver dans les autres références dispersées auxquelles nous renvoyons.

Nous essaierons d’éviter un exposé trop superficiel, tout en évitant des complications techniques excessives. Ce juste milieu est difficile à trouver, et nous comptons sur l’indulgence de nos lecteurs.

## 2 Définition du concept de groupe

Un groupe est un ensemble d’éléments  $g_i$  muni d’une règle d’association interne (que nous appellerons en général multiplication) qui associe à toute paire  $g_i, g_j$  un autre élément de l’ensemble que nous appellerons produit et que nous noterons  $g_i \cdot g_j$  ou  $g_i g_j$ . Il doit y avoir un élément neutre 1 tels que  $g_i \cdot 1 = 1 \cdot g_i = g_i$ . Enfin chaque élément  $g_i$  doit avoir un inverse  $g_i^{-1}$  tel que  $g_i \cdot g_i^{-1} = g_i^{-1} \cdot g_i = 1$ . Un groupe peut être fini ou infini. Il est dit commutatif ou abélien si  $g_i \cdot g_j = g_j \cdot g_i$ . Les transformations qui laissent un système invariant forment un groupe. L’élément neutre est alors constitué par la ”transformation identique” ou ”identité” 1, qui transforme un objet en lui-même. Par exemple, la symétrie  $I$  par rapport à un point forme avec l’identité un groupe de 2 éléments. C’est ce groupe que nous avons considéré au paragraphe précédent, sans prononcer le mot, car pour un problème aussi simple la notion de groupe et la théorie des groupes sont inutiles.

Le groupe de transformations qui laissent un objet invariant est appelé la symétrie de cet objet. Ce mot ”symétrie” a donc une signification plus large que celle qu’elle a dans la vie courante.

## 3 Quelques groupes qui servent au physicien

Il est utile de faire une liste de groupes que les physiciens utilisent souvent. Le lecteur est invité à survoler rapidement cette énumération pour y revenir quand ce sera nécessaire.

1) Le groupe SO3 ou SO(3) des rotations de l'espace à 3 dimensions autour d'un point donné. Dans le traitement non relativiste de l'atome d'hydrogène, le hamiltonien est invariant par SO3 et cela facilite la recherche des fonctions d'onde. On peut définir plus généralement le groupe SO( $n$ ). 2) Le groupe O3 ou O(3) des rotations propres et impropres 3-D. Une rotation impropre est le produit d'une rotation par une symétrie par rapport à un point (ou à un plan).

3) Le groupe des translations 3-D. Il intervient dans la propagation d'une particule libre non relativiste.

4) Le groupe des rotations et translations 3-D.

5) Groupe des translations qui conservent un cristal (sous-groupe de (3)).

6) Groupe des rotations propres et impropres qui conservent un cristal (sous-groupe de (4)). C'est le groupe "d'espace" du cristal.

7) Groupe des rotations propres et impropres autour d'un axe, passant par un point donné, qui conservent un cristal (sous-groupe fini de (3)) : groupe "ponctuel".

8) Groupe de Lorentz, groupe de Poincaré. Ce sont des groupes de transformations adaptées à la relativité. En relativité, on ne peut pas traiter le temps  $t$  indépendamment des coordonnées d'espace  $x, y, z$ . Il faut donc faire intervenir des transformations qui agissent sur les 4 coordonnées  $x, y, z, t$ . Par exemple celle qui transforme  $(x, y, z, t)$  en

$$x' = (x - vt)/(1 - \beta^2)^{1/2} ; t' = (t - vx/c)/(1 - \beta^2)^{1/2} ; y' = y ; z' = z \quad (1)$$

où  $\beta = v/c$ . Cette transformation décrit le passage d'un repère particulier à un autre repère en translation uniforme à vitesse  $v$  dans la direction  $x$  par rapport au premier. On remarque qu'elle conserve la quantité

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \quad (2)$$

alors qu'une rotation ou une translation tridimensionnelle conserve

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3)$$

Toute transformation qui conserve (2) s'appelle une transformation de Lorentz. Les transformations de Lorentz constituent le groupe de Poincaré. On appelle groupe de Lorentz l'ensemble des transformations de Lorentz qui conservent l'origine (0,0,0,0).

9) SU2, SU3... SU $n$ ...= groupe des matrices  $n \times n$  unitaires de déterminant 1. On écrit aussi SU( $n$ ).

10) U( $n$ ) est le groupe des matrices unitaires  $n \times n$ . Par exemple, U(1) est formé par les nombres  $\exp(i\varphi)$ . Les groupes continus tels que O( $n$ ) font partie d'une classe plus générale dont les éléments sont appelés groupes de Lie.

En résumé : la notion de groupe est partout présente en physique. La question est maintenant : à quoi peut-elle servir ? On va donner des exemples.

## 4 Cristallographie

Un cristal est la forme thermodynamiquement stable de la plupart des solides à basse températures. D'où l'importance des cristaux.

Comme on l'a dit plus haut, la symétrie d'un cristal est définie par son groupe d'espace, dont chaque élément est le produit d'une translation par une rotation  $\mathcal{R}$  autour d'un point O donné. Si on ne considère que les rotations  $\mathcal{R}$ , elles forment aussi un groupe (fini) appelé groupe ponctuel. Pour des détails, on se pourra se reporter aux articles de Grenier (2009) et d'Aroyo (2009). Certaines propriétés ne dépendent que du groupe ponctuel. D'autre part un cristal à un seul atome par maille (comme le fer et beaucoup d'autres corps simples) s'appelle un réseau de Bravais.

Il existe 32 groupes ponctuels et 230 groupes d'espace, comme l'ont démontré indépendamment Schönflies et Fedorov en 1890. Il existe 14 réseaux de Bravais, comme l'a montré Bravais en 1848. Ces nombres résultent de la solution d'un pur problème de mathématique, comparable à l'énumération descriptive des 5 polyèdres réguliers, donnée par Euclide<sup>2</sup>. Le dénombrement et la description des groupes d'espace et ponctuels n'est pas une application de la théorie des groupes, mais plutôt une partie de cette théorie.

A quoi servent groupes d'espace et ponctuels? Certaines propriétés physiques existent ou n'existent pas selon la symétrie du cristal, c'est-à-dire selon son groupe d'espace ou son groupe ponctuel. Un exemple est la pyroélectricité, caractérisée par un moment dipolaire électrique par maille  $\mathbf{P}$  non nul. Dans un cristal pyroélectrique, toute opération de symétrie doit préserver la direction de la polarisation. Le seul axe de rotation possible est donc parallèle à  $\mathbf{P}$ . En outre il ne peut y avoir de plan miroir perpendiculaire à  $\mathbf{P}$ . Ceci n'autorise que les groupes ponctuels  $C_n$ ,  $C_{nv}$ , et  $C_{1h}$ . Le groupe  $C_1$  est constitué par l'élément unité seul, et il est triclinique. Le groupe  $C_n$  comporte un axe de rotation d'ordre  $n$  ( $n=2, 3, 4, 5$ ) et rien d'autre. Le groupe  $C_{nv}$  comporte en outre un "miroir" (ou plan de symétrie) parallèle à cet axe. Le groupe  $C_{1h}$  est constitué par l'élément unité et un miroir.

Plus simple encore est la biréfringence. Elle existe pour tous les cristaux non cubiques. Elle est liée à la forme du tenseur de permittivité électrique  $\epsilon$  défini par  $D = \epsilon E$ , où  $E$  et  $D$  sont respectivement le champ et le déplacement électrique. Il y a biréfringence si la matrice  $\epsilon$  n'a pas ses 3 valeurs propres dégénérées.

Des matrices? Le physicien en rencontre souvent de bien plus compliquées, et il a besoin de connaître leurs valeurs propres et leurs vecteurs propres. Nous allons voir que la théorie des groupes peut l'aider.

## 5 Vecteurs propres d'un opérateur et représentations irréductibles d'un groupe

La théorie des groupes permet de simplifier la recherche et la classification des vecteurs propres (et par conséquent des valeurs propres) d'une matrice ou d'un opérateur. Il peut s'agir par exemple d'un hamiltonien. Un cas bien connu, où l'on fait de la théorie des groupes sans le savoir, est celui d'une matrice  $N \times N$  invariante par translation :  $M(n, m) = M(n+p, m+p)$  quel que soit l'entier  $p$ . Nous supposons des conditions aux limites périodiques, c'est à dire que  $n$  et  $m$  sont définis modulo  $N$ . On sait que les vecteurs propres ont la forme

$$u(n) = Const \times \exp(ikn) \quad (4)$$

où  $k$  est tels que  $\exp(ikN) = 1$ . C'est une propriété familière, mais étonnante : la seule invariance par le groupe des translations détermine les vecteurs propres, quelles que soient les valeurs numériques des éléments de matrice! Les valeurs propres s'en déduisent en une ligne, et elles dépendent des éléments de matrice. Cette propriété est un cas particulier d'une propriété générale : si une matrice est  $T$  invariante par les opérations  $g$  d'un groupe  $G$ , tout élément  $g$  transforme tout vecteur propre  $|u\rangle$  en un vecteur propre  $T(g)|u\rangle$ , où les matrices  $T(g)$  forment une représentation de  $G$ , c'est à dire que  $T(g)T(g') = T(gg')$ . Dans l'exemple précédent, les éléments

<sup>2</sup>Pour donner une idée de la démonstration, montrons que toute rotation d'angle  $\varphi < \pi/3$  est interdite. Si une telle rotation laissait un réseau de Bravais invariant, ce réseau contiendrait 3 points ABC avec AB=BC et l'angle ABC égal à  $\varphi < \pi/3$ . La longueur AC serait donc inférieure à AB et BC. Mais le réseau devrait alors aussi contenir un point D avec AD=AC et l'angle DAC égal à  $\varphi < \pi/3$ . La longueur DC serait donc inférieure à AD et AC. Par récurrence on peut donc trouver des longueurs aussi petites que l'on veut, ce qui est impossible puisque la distance interatomique ne peut être inférieure, disons, à 0,1 micromètre

de  $G$  sont les translations  $g_p$  qui transforment  $M(n, m)$  en  $M(n + p, m + p)$ , et  $T(g_p) = \exp(ikp)$  est un nombre, c'est-à-dire une matrice  $1 \times 1$ . On dit que les matrices  $T(g_p)$  constituent une représentation de dimension 1. Bien sûr il y a autant de telles représentations qu'il y a de nombres  $k$ , donc il y en a  $N$ , qu'il faut distinguer par un indice, de sorte que  $T_k(g_p) = \exp(ikp)$ . Avec 2 représentations  $T_k$  et  $T_{k'}$  on peut construire une représentation qui associe à  $g$  la matrice

$$\begin{bmatrix} T_k(g) & 0 \\ 0 & T_{k'}(g) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Une telle représentation est dite réductible. Dans la recherche des vecteurs propres d'une matrice invariante par un groupe  $G$ , on peut imposer à ces vecteurs de se transformer selon une représentation irréductible. On trouve ainsi tous les vecteurs propres... à condition, à la fin du calcul, de combiner ceux qui correspondent à chaque valeur propre. Dans l'exemple précédent, s'il se trouve que la matrice  $M(n, m)$  est réelle et symétrique, il faut combiner  $u_k(n) = \exp(ikn)$  et  $u_{-k}(n) = \exp(-ikn)$ .

Une représentation de dimension 1 est évidemment irréductible. Les représentations irréductibles du groupe des translations s'écrivent donc sans difficultés, et pas seulement dans le cas d'un espace unidimensionnel. Dans des cas plus compliqués, la recherche des représentations irréductibles est plus difficile, mais simplifie souvent la recherche des vecteurs propres.

On peut résumer ce paragraphe par les règles fondamentales suivantes :

1) Pour trouver les vecteurs propres d'un opérateur invariant par un groupe  $G$ , on peut se restreindre à l'espace des vecteurs qui se transforment selon chaque représentation irréductible. On dit que ces vecteurs propres appartiennent à cette représentation irréductible. Cette méthode permet d'obtenir *tous* les vecteurs propres. Cette règle constitue le théorème de développement (expansion theorem, Streitwolf 1971). Elle ramène la diagonalisation d'une grande matrice à celle d'un certain nombre de petites matrices, dont chacune correspond à une représentation irréductible différente. La matrice  $M$ , grâce à un choix des vecteurs de base, prend donc la forme diagonale par blocs :

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & M_p & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & M_r \end{bmatrix} \quad (6)$$

2) Pour obtenir chaque petite matrice, la théorie des groupes fournit des recettes. Une telle recette est brièvement décrite dans l'appendice B. Pour la justification et pour des exemples, on peut se reporter à Canals (2009) Ballou (2009), Rodriguez-Carvajal (2009).

Exercice. Considérer les fonctions d'onde à un électron dans un potentiel périodique. Selon le théorème de Floquet-Bloch, elles ont la forme  $\psi_k(r) = \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})u_k(\mathbf{r})$  où  $u_k(\mathbf{r})$  a la période du potentiel. Relier cette propriété aux représentations irréductibles du groupe des translations du réseau.

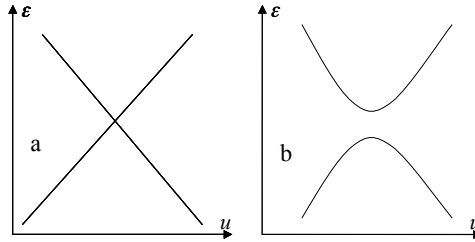


FIG. 2 – a) Si deux valeurs propres d’une matrice appartiennent à 2 représentations différentes, la variation d’un paramètre  $u$  permet de les rendre égales. b) Si les deux valeurs propres appartiennent à la même représentation, elles ne sont en général jamais égales.

## 6 Quelques exemples d’applications de la théorie des groupes

### 6.1 Dégénérescence d’un hamiltonien à spectre discret ou d’une matrice

Voyons d’abord le cas d’une matrice  $2 \times 2$  (le hamiltonien d’un spin  $1/2$  par exemple) dont les éléments sont  $a_{ij}$ . Pour qu’elle soit dégénérée, il faut qu’elle soit un multiple de la matrice unité. Il faut donc remplir les conditions  $a_{11} = a_{22}$  et  $a_{12} = a_{21} = 0$ . Même si la matrice est hermitique (cas d’un hamiltonien) ces conditions sont difficiles à remplir et exigent de faire varier plus d’un paramètre.... A moins que les deux vecteurs propres n’appartiennent à des représentations différentes. Dans ce cas,  $a_{12}$  et  $a_{21}$  sont automatiquement nuls et la dégénérescence apparaît quand  $a_{11} = a_{22}$ .

Le cas d’une matrice plus grande est plus compliqué, mais analogue : la variation d’un seul paramètre ne fait en général pas apparaître de dégénérescence exacte (Fig. 2) sauf pour des valeurs propres appartenant à des représentations différentes.

### 6.2 Effet Jahn-Teller

Supposons que les valeurs propres dont il vient d’être question soient les énergies possibles d’un électron localisé dans un cristal, dont la symétrie est assez élevée pour que les 2 valeurs propres soient dégénérées. D’après ce qui vient d’être dit, cette dégénérescence ne peut guère se produire que si les vecteurs propres appartiennent à 2 représentations différentes. Si le cristal subit une distorsion, la dégénérescence disparaît avec la symétrie. Cela entraîne une augmentation d’une des valeurs propres et une diminution de l’autre. L’électron choisit la plus basse valeur propre, de sorte que la distorsion est énergétiquement favorable (Amara 2009). Il faut évidemment qu’il n’y ait qu’un électron pour les deux états.

### 6.3 Spectre de phonons d’un cristal

Les fréquences des phonons de vecteur d’onde  $\mathbf{q}$  sont les valeurs propres d’une matrice finie dont les éléments ne sont en général connus qu’avec une précision médiocre. Mais la symétrie de la matrice est connue. Si le vecteur  $\mathbf{q}$  est quelconque, la matrice n’a aucune symétrie et la théorie des groupes ne sert à rien. Par contre, elle peut simplifier considérablement le calcul dans le cas

où  $\mathbf{q}$  est, par exemple, sur un axe de symétrie. En particulier, on peut alors savoir quelles sont les dégénérescences (Kreisel 2009).

## 6.4 Structures magnétiques

Quand les atomes d'un cristal portent un moment magnétique, ces moments s'ordonnent généralement à basse température. La structure magnétique qui en résulte se superpose à la structure cristallographique. Deux cas sont possibles, dont des exemples sont décrits par Bourée (2009).

Premier cas : la structure magnétique et la structure cristallographique ont une périodicité commune (avec une maille qui peut être plus grande que la maille cristallographique paramagnétique de haute température). Les opérations de symétrie qui conservent la structure magnétique et la structure cristallographique forment un groupe. Les groupes magnétiques ainsi obtenus peuvent être catalogués à la façon des groupes d'espace habituels (Rodríguez-Carvajal 2009). Leur nombre est fini.

Deuxième cas : la structure magnétique a une période incommensurable avec le réseau cristallin. La situation la plus favorable est le voisinage d'une transition continue du paramagnétisme à une phase magnétiquement ordonnée. D'après la théorie de Landau des transitions de phase (Toledano 2009) la structure magnétique doit correspondre à un vecteur propre d'une certaine matrice, la matrice susceptibilité paramagnétique généralisée (Schweizer et al. 2007), qui définit la réponse linéaire des moments à un champ magnétique modulé dans l'espace. La théorie des groupes permet, comme on l'a expliqué au paragraphe 5, de faciliter cette recherche. Une méthode basée sur les représentations a été proposée initialement par Bertaut (1971) puis perfectionnée par Schweizer (2005, 2006, 2007, 2009). A basse température, diverses complications peuvent se produire. D'abord, des harmoniques apparaissent à cause de l'anisotropie magnétocristalline. En outre, un verrouillage (lock-in) des deux périodes (magnétique et cristallographique) est fréquent. La structure magnétique devient alors commensurable avec le réseau cristallin, avec une périodicité qui peut être très longue. Quand on fait varier un paramètre (pression, température...) on peut avoir, en principe, une succession de verrouillages prenant l'aspect d'un "escalier du diable" (Axel et Aubry 1981) ou d'un escalier "inoffensif" (Villain et Gordon 1980).

## 6.5 L'hélium 3 superfluide et la supraconductivité inhabituelle

La supraconductivité est caractérisée par une valeur non nulle de  $\Delta_{\sigma\sigma'}(\mathbf{k}) = \langle c_{k\sigma} c_{-k\sigma'} \rangle$  où l'opérateur  $c_{k\sigma}$  annihile un électron d'impulsion  $\hbar\mathbf{k}$  et de spin  $\sigma = \pm 1/2$ .

Dans la théorie classique de la supraconductivité élaborée par Bardeen, Cooper et Schrieffer, les paires de Cooper sont dans un état de spin singulet et le paramètre d'ordre  $\Delta_{\sigma\sigma'}(\mathbf{k})$  est indépendant la direction  $\mathbf{k}/k$ . Il est pratiquement nul loin de la surface de Fermi, où il a une valeur  $\Delta$ . Ceci est une bonne description de la plupart des supraconducteurs usuels comme Nb.

Dans les supraconducteurs inhabituels ("non-conventionnel"), le paramètre d'ordre  $\Delta_{\sigma\sigma'}(\mathbf{k})$  peut dépendre de  $\hat{k} = \mathbf{k}/k$  (Houzet 2009). De plus, les paires de Cooper peuvent être dans l'état triplet de spin. Quand les opérations du groupe ponctuel  $\mathcal{G}_0$  du cristal agissent sur  $\mathbf{k}$ , la fonction  $\Delta_{\sigma\sigma'}(\mathbf{k})$  doit se transformer comme une représentation irréductible de  $\mathcal{G}_0$ . Ainsi, la théorie des groupes fournit une classification des divers types de supraconductivité possibles. Cette classification facilite l'étude expérimentale.

Dans  $^3\text{He}$  superfluide, de façon analogue, il se forme des paires de fermions de vecteurs d'onde  $\mathbf{k}$  et  $-\mathbf{k}$ . Les paires sont dans l'état triplet. La fonction d'onde orbitale doit se transformer comme une représentation irréductible  $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$  du groupe des rotations, où  $\theta$  et  $\varphi$  sont les angles



d'Euler de  $\hat{k}$ . La condition usuelle sur l'antisymétrie de la fonction d'onde des fermions impose que  $\ell$  soit impaire. En pratique,  $\ell = 1$ .

L'énumération qui précède est succincte avec excès. Elle sera complétée et explicitée par les exposés cités en référence et par des manuels tels que ceux de Meijer & Bauer (2004), de Hamermesh (1962) ou de Streitwolf (1971) dont le volume modeste et le formalisme simple rendent la lecture agréable.

## 7 Fonctions d'onde et groupe des rotations

L'espace est invariant par translation et par rotation. Nous avons vu que le groupe des translations est trop simple pour que la théorie des groupes soit indispensable. Voyons donc quelles informations peut apporter l'invariance par rotation. Le problème se pose par exemple si on veut calculer la fonction d'onde d'un électron soumis à l'attraction d'un noyau situé en un point fixe O ; c'est le cas de l'atome d'hydrogène. Ce problème est bien connu, mais il est utile de le réexaminer en insistant sur l'invariance par rotation. D'après la règle fondamentale, nous pouvons simplifier la recherche des fonctions d'onde (solutions de l'équation de Schrödinger) en cherchant les représentations irréductibles du groupe des rotations. C'est, en réalité, ce qui est fait dans les manuels de mécanique quantique, mais souvent sans le dire.

Les représentations irréductibles de dimension  $(2\ell + 1)$  impaire du groupe des rotations peuvent s'obtenir en prenant pour vecteurs de base les fonctions

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = B_{lm} P_{lm}(\cos \theta) \exp(im\varphi) \quad (7)$$

où les nombres  $B_{lm}$  sont des constantes de normalisation et

$$P_{lm}(w) = (1 - w^2)^{|m|/2} d^{|m|} P_l(w) / dw^{|m|} \quad (8)$$

où  $P_l(w)$  est le polynôme de Legendre d'ordre  $l$

$$P_l(w) = (2^{-l} / l!) d^l (w^2 - 1)^l / dw^l \quad (9)$$

La théorie des groupes nous dit que les solutions de l'équation de Schrödinger dans un potentiel invariant par rotation ont la forme

$$\psi_{lm}(r, \theta, \varphi) = R_l(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (10)$$

et qu'il n'y a plus qu'à déterminer la fonction radiale  $R_l(r)$ . Cette factorisation est, bien sûr, dans les manuels, mais elle est souvent présentée comme un miracle alors que la théorie des groupes permet de la prévoir. D'autre part, les manuels introduisent généralement les harmoniques sphériques  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  comme instruments d'étude du moment angulaire et ne font pas toujours la liaison avec les rotations. La fin de ce paragraphe est consacrée à cette relation. Il s'agit de savoir comment une fonction  $f(x, y, z)$  (une fonction d'onde par exemple) se transforme par une rotation des axes, par exemple autour de l'axe  $z$  qui est donc invariant. Si  $\varphi$  est l'angle de rotation, les nouvelles coordonnées sont  $x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi$  et  $y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$ . La fonction  $f(x, y, z)$  se transforme en une fonction de  $x'$ ,  $y'$  et  $z$  qui, pour  $\varphi$  petit, peut s'écrire

$$f(x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, x' \sin \varphi + y' \cos \varphi, z') = f(x' - y' \varphi, x' \varphi + y', z') = (1 + \rho_z) f(x', y', z')$$

où l'opérateur de rotation infinitésimal  $\rho_z$  est  $\rho_z = x \partial y - y \partial x$ . Il coïncide avec  $iL_z / \hbar$ , où  $\mathbf{L}$  est l'expression du moment angulaire orbital en mécanique quantique. Des opérateurs de rotation

infinitésimaux  $\rho_x$  et  $\rho_y$  autour de  $x$  et  $y$  peuvent être obtenus de façon analogue. L'identité  $\rho_\alpha = iL_\alpha/\hbar$  est valable pour les 3 composantes  $\alpha = x, y, z$ . On en déduit les règles de commutation

$$[\rho_x, \rho_y] = -\rho_z \quad ; \quad [\rho_y, \rho_z] = -\rho_x \quad ; \quad [\rho_z, \rho_x] = -\rho_y \quad (11)$$

On verra que la relation entre opérateur de rotation et moment angulaire est un cas particulier du théorème de Noether énoncé au paragraphe 11.

Dans le présent paragraphe, on a introduit à partir de la théorie des groupes, et somme toute de la géométrie, des concepts et des résultats (harmoniques sphériques, règles de commutation) qui sont généralement déduits de la mécanique quantique. Or ce raisonnement géométrique est plus simple et plus élémentaire, puisque l'on n'a pas fait usage de la relation de De Broglie  $\mathbf{p} = i\hbar\nabla$ , hypothèse physique à laquelle nous sommes habitués, mais tout de même moins élémentaire que la simple géométrie. L'approche géométrique est aussi plus générale et plus élégante.

Les règles de commutation (11) sont des propriétés essentielles des opérateurs de rotation. Elles sont le point de départ inévitable de la recherche des représentations de SO3. Cette recherche mène, comme on va le voir, au concept de spineur.

## 8 Les représentations irréductibles de dimension paire du groupe des rotations et le spin.

La formule (7) ne fournit que des représentations irréductibles de dimension impaire du groupe des rotation SO3. Le présent paragraphe est une quête des représentations irréductibles de dimension paire de SO3. En fait on se limitera à chercher une représentations irréductible de dimension 2, ce qui est suffisant pour les besoins des sciences physiques.

Une telle représentation doit contenir trois matrices  $2 \times 2$  associées aux rotations infinitésimales autour des axes  $x, y, z$ . Ces matrices doivent vérifier des relations de commutation analogues à (11). Comme il résulte des manuels de mécanique quantique, de telles matrices sont les matrices de Pauli

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

qu'il convient seulement de multiplier par  $i/2$ . On peut ainsi espérer que les matrices<sup>3</sup>

$$\exp[(i\varphi/2)(\alpha\sigma_x + \beta\sigma_y + \gamma\sigma_z)] = 1 \cos \varphi/2 + i(\alpha\sigma_x + \beta\sigma_y + \gamma\sigma_z) \sin \varphi/2 \quad (13)$$

forment une représentation du groupe des rotations SO3.

Dans le langage des physiciens, il en est bien ainsi. La matrice (13) correspond à une rotation d'angle  $\varphi$  autour d'un axe parallèle au vecteur unité de composantes  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Malheureusement, la formule (13) a une étrange propriété. La rotation d'angle  $2n\pi$  autour de n'importe quel axe est évidemment l'identité. Or, si  $\varphi = 2n\pi$ , la matrice (13) est égale à 1 si  $n$  est pair (ce qui est fort bien) mais égale à -1 si  $n$  est impair. Plus généralement, la relation (13) associe à toute rotation deux matrices  $A$  and  $-A$ . Ceci n'est pas autorisé par la définition d'une représentation acceptée par les mathématiciens.

Nous dirons que les matrices (13) forment une "représentation spinorielle" de SO3. Une représentation spinorielle est bivaluée, et par suite, *stricto sensu*, ce n'est pas une représentation. Il nous arrivera cependant, par la suite, de l'appeler ainsi pour simplifier.

<sup>3</sup>L'égalité (13) peut être vérifiée en développant l'exponentielle en série et en utilisant les relations d'anticommutation des matrices de Pauli.

Une représentation spinorielle agit sur des matrices colonnes à deux éléments qu'on appelle des spineurs. Le terme 'spineur' se justifie parce que ces objets sont utilisés pour la description mathématique d'un spin 1/2. Cependant, le concept de spineur avait été inventé par le mathématicien Élie Cartan dès 1913, 9 ans avant la découverte expérimentale du spin de l'électron par Stern and Gerlach en 1922. Les mathématiques étaient déjà prêtes à être utilisées par les physiciens.

Au paragraphe 7, on avait utilisé la théorie des groupes pour obtenir les vecteurs propres d'un opérateur donné agissant sur un espace vectoriel connu. Dans ce paragraphe, la théorie des groupes a fonctionné autrement. La nature spinorielle de la fonction d'onde n'était *a priori* pas connue, c'est la théorie des groupes qui a permis de la découvrir. Certes, beaucoup de manuels de mécanique quantique n'y font pas appel, mais sans la théorie des groupes l'apparition des spineurs devient artificielle.

## 9 Fonctions d'onde relativistes d'un électron.

La relativité fait intervenir, comme on l'a vu, un espace à 4 dimensions, dans lequel les changements d'axes combinent le temps  $t$  (ou plutôt  $x^0 = ct$ ) et les 3 coordonnées d'espace  $x^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ).

Alors que la recherche de la fonction d'onde d'une particule non relativiste nous avait amenés à rechercher les représentations irréductibles du groupe des rotations, c'est maintenant les représentations du groupe de Lorentz qui nous intéressent. Nous nous bornerons ici au cas d'une particule de spin 1/2 comme l'électron. La représentation appropriée est à 2 dimensions, et spinorielle. Elles font appel aux matrices de Pauli et ne sera pas donnée ici. Par contre, nous insisterons sur une difficulté qui n'apparaissait pas en physique quantique non-relativiste.

Il se trouve qu'il n'y a pas moyen de définir une fonction d'onde qui se transforme selon la représentation spinorielle irréductible de dimension 2 du groupe de Lorentz. Comme on le montre dans l'appendice C, il faut introduire une représentation spinorielle de dimension 4, qui est réductible et s'obtient en combinant la représentation irréductible de dimension 2 avec une représentation analogue, mais non équivalente (Cartan 1938). On obtient ainsi une fonction d'onde spinorielle à 4 composantes qui vérifie l'équation de Dirac :

$$\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi + mc\psi = 0$$

où il faut sommer sur  $\mu$  (convention d'Einstein). Les matrices  $4\times 4$   $\gamma^\mu$  vérifient les règles d'anticommutation  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ , où

$$g^{\mu\nu} = g^\mu\delta^{\mu\nu} \quad (14)$$

et<sup>4</sup>

$$g^1 = g^2 = g^3 = 1 \quad ; \quad g^0 = -1 \quad (15)$$

Un choix possible est

$$\gamma^\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -i\sigma_\alpha \\ i\sigma_\alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (\alpha = 1, 2, 3); \quad \gamma^0 = i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

où les blocs sont des matrices  $2\times 2$ . Les  $\sigma_i$  sont les matrices de Pauli.

---

<sup>4</sup>La quantité  $g^{\mu\nu}$  est un tenseur, qui garde la même forme diagonale dans tous les systèmes d'axes reliés par une transformation de Lorentz. Au contraire,  $\delta^{\mu\nu}$  n'est pas un tenseur et  $g^\mu$ , défini par (15), n'est pas vecteur. La relation (15) peut être vraie pour un choix particulier des axes, mais elle n'est pas préservée par une transformation de Lorentz. On dit que la quantité  $g^\mu$  n'est pas covariante. Pour cette raison, on ne l'introduit en général pas.

## 10 L'électromagnétisme et l'électrodynamique : symétrie de jauge

Si une particule matérielle a une fonction d'onde qu'on peut souvent supposer scalaire, il n'en est pas ainsi du photon. La lumière est caractérisée par un champ électrique et un champ magnétique, qui sont des vecteurs. Dans ce cas, le groupe des rotations à 3 dimensions et ses représentations ne sont guère utiles. Le groupe des rotations est important dans le cas d'un électron qui tourne autour d'un noyau immobile. Les photons n'ont pas l'habitude de tourner autour d'un centre.

Bien entendu, l'électromagnétisme nécessite l'emploi de la relativité. Fort heureusement, la relativité restreinte suffit. Dans ce cadre, le champ électromagnétique est caractérisé par un tenseur antisymétrique  $F_{\mu\nu}$  à  $4 \times 4$  composantes, dont 6 sont non nulles et indépendantes (champ électrique et champ magnétique). Mais ce tenseur peut s'exprimer en fonction du potentiel vecteur  $A_\mu$  :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (17)$$

Comme il vaut mieux avoir une quantité à 4 composantes qu'une quantité à 6 composantes, l'emploi de  $A$  à la place de  $F$  est inévitable (au moins en mécanique quantique). Mais cela implique une difficulté : En effet, la quantité physique mesurable n'est pas le potentiel vecteur  $A$ , mais le champ électromagnétique, et celui-ci n'est pas modifié si on remplace  $A$  par

$$A'_\mu = A_\mu - g_\mu \partial_\mu \Lambda(\mathbf{r}, t) \quad (18)$$

où  $g_\mu$  est défini (15)<sup>5</sup>. Le choix arbitraire de  $\Lambda$  s'appelle une jauge. Comme la quantification du champ électromagnétique (7) ou (8) conduit à des photons, ceux-ci sont appelés bosons de jauge. Si l'on a une particule chargée (électron) qui interagit avec le champ électromagnétique, le choix de la jauge reste arbitraire, mais un changement de la jauge implique également un changement de la phase de la fonction d'onde (Voir appendice D). Celle-ci est donc multipliée par un nombre  $\exp(i\varphi)$ . Ce facteur engendre un groupe, le groupe U1.

Il est à remarquer que dans un superfluide ou un supraconducteur, il apparaît aussi une *phase* qui est liée aux opérateurs de champ. Le hamiltonien est invariant par un changement global de cette phase. Cette invariance est brisée dans un superfluide ou un supraconducteur. On décrit souvent ce phénomène comme une brisure de l'invariance de jauge. Il y a en effet une analogie avec la jauge en électrodynamique, puisque c'est aussi le groupe U1 qui intervient, mais le phénomène physique est différent et les photons ne jouent aucun rôle dans un superfluide.

Les transformations de jauge de l'électrodynamique forment un groupe. Cette remarque n'avance cependant pas à grand' chose car le groupe abélien U(1) est fort simple et ne nécessite pas la machinerie lourde de la théorie des groupes. D'excellents manuels d'électrodynamique quantique n'évoquent même pas le concept de groupe de jauge. Cependant, l'électrodynamique fournit une introduction didactique à des théories de jauge bien plus compliquées, nécessaire pour décrire les particules élémentaires autres que l'électron. Avant d'en parler, il convient d'énoncer 2 théorèmes généraux, qui servent en physique de la matière condensée comme en physique des particules.

---

<sup>5</sup>Comme on l'a remarqué précédemment,  $g^\mu$  n'est pas covariant. Par suite,  $\Lambda(\mathbf{r}, t)$  n'est pas forcément covariant non plus. La 'jauge de Coulomb' qu'on utilise beaucoup, ne l'est pas.

## 11 Deux théorèmes généraux

### 11.1 Théorème de Noether (1915)

A tout groupe continu de symétries peut être associée une quantité conservée, et vice-versa (Noether 1918, Byers 1996). Ainsi la conservation de la quantité de mouvement est la conséquence de la symétrie de translation dans l'espace. De même, la conservation de l'énergie cinétique est liée à l'invariance par translation dans le temps. La conservation du moment cinétique provient de l'invariance par rotation.

### 11.2 Théorème de Goldstone

Le théorème de Goldstone affirme l'apparition d'excitations de "gap" nul quand une symétrie continue est brisée. Considérons par exemple un cristal. Il brise la symétrie continue de translation de l'espace. Les excitations correspondantes sont les phonons acoustiques, dont la fréquence  $\omega_q$  est liée au vecteur d'onde  $\mathbf{q}$ , pour  $q$  petit, par la relation linéaire  $\omega_q = \alpha q$ . Leur énergie s'annule donc quand  $q$  tend vers 0. Le théorème de Goldstone (Goldstone 1961, Goldstone et al. 1962) affirme que cette propriété est générale : toute brisure de symétrie continue s'accompagne de l'apparition d'excitations (généralement des bosons) dont l'énergie peut tendre vers 0. Dans le cas du magnétisme, la brisure de symétrie de rotation des spins entraîne l'apparition de magnons à basse température. Mais attention ! La symétrie de rotation des spins est bien présente (à haute température) dans certains modèles comme le modèle de Heisenberg, mais ces modèles qui négligent l'anisotropie magnétocristalline ne sont qu'approchés, et l'énergie des magnons ne s'annule pas strictement.

Quant à la supraconductivité, elle est traitée dans l'appendice F.

Si les physiciens de la matière condensée se sont appropriés le théorème de Goldstone, il est bon de rappeler que l'idée de Goldstone était de l'appliquer aux particules élémentaires. Sa démonstration était donc relativiste... et utilisait un bagage technique appréciablement plus perfectionné que celui dont ont besoin les physiciens de la matière condensée. Or, en relativité, l'énergie d'une particule est  $E = c(m^2c^2 + p^2)^{1/2}$  ; si la masse au repos  $m$  est finie, cette énergie s'écrit, pour  $p$  petit,  $E = mc^2 + p^2/(2m)$  ; mais si la masse est nulle, alors  $E = cp = \hbar q$ . Les physiciens des particules élémentaires aiment donc formuler le théorème de Goldstone en disant que la brisure d'une symétrie continue entraîne l'existence de bosons de masse nulle<sup>6</sup>

Masse nulle ou non nulle ? C'est ce qui détermine la portée de l'interaction transportée par des "bosons de jauge"). Considérons d'abord le champ électromagnétique, véhiculé par des photons, dont la masse est nulle. Une charge à l'origine  $O$  produit à distance  $r$  un potentiel électrique  $V(r)$  proportionnel à  $1/r$ , solution (pour  $r$  non nul) de l'équation de Laplace  $\nabla^2 V = 0$ . Mais si le potentiel est dû à des particules de masse  $m$  non nulle, il doit vérifier l'équation de Schrödinger  $\nabla^2 V = \kappa^2 V$  avec  $\kappa = mc/\hbar$  (Yukawa 1949). La solution est  $V(r) = Const \times \exp(-\kappa r)/r$ , donc à courte portée.

En fait, le théorème de Goldstone fut entre 1960 et 1970 pour les physiciens des particules élémentaires une source de perplexité comme le verrons.

---

<sup>6</sup>En physique de la matière condensée aussi, les quasi-particules sans masse comme les phonons ont un spectre linéaire,  $\omega_q = \alpha q$ , alors que des particules de masse non nulle, par exemple les électrons, ont un spectre quadratique.

## 12 Les particules élémentaires

### 12.1 Les symétries qui sembleraient s'imposer : parité, etc.

En physique de la matière condensée, le nombre d'électrons est supposé constant, tout comme le nombre de noyaux de chaque élément. La seule interaction considérée est l'interaction électromagnétique (et quelquefois la pesanteur). C'est une bonne approximation sur la terre, même si quelquefois la présence d'une substance radioactive nous oblige à faire un peu de physique nucléaire. Cette science met en jeu une interaction d'une autre nature, l'interaction nucléaire forte, qui lie les nucléons dans le noyau. L'ordre de grandeur de l'énergie à considérer est plus élevé. Par exemple l'énergie des fragments de fission de l'uranium se mesure en MeV alors que les niveaux électroniques dans un atome se mesurent en eV ou en KeV.

La physique des particules élémentaires s'intéresse à des énergies plus élevées encore, qui se mesurent en GeV. Les règles de symétrie auxquelles nous sommes habitués résistent-elles à ces énergies colossales? Ainsi les équations du mouvement que nous écrivons à basse énergie sont invariantes par le renversement du temps  $T$  et par le renversement  $P$  des coordonnées d'espace. En est-il de même pour la physique beaucoup plus riche dans laquelle on introduit les interactions nucléaires en plus de l'interaction électromagnétique?

La réponse est oui, dans la mesure où on ne considère que les interactions fortes, et électromagnétiques. En outre, il y a invariance par rapport à un autre opérateur  $C$  inconnu en physique de la matière condensée : c'est l'opérateur qui change une particule en antiparticule (par exemple un électron en positon). Cette invariance limite les réactions possibles et simplifie beaucoup la théorie de l'interaction forte et ses applications.

Mais, l'interaction forte ne décrit pas tous les phénomènes, et certains (comme la désintégration  $\beta$ ) font intervenir une autre interaction, dite faible. Et cette dernière n'est pas invariante par  $P$ , ni par  $C$ , ni par  $T$ . On crut quelque temps qu'elle est invariante par le produit  $CP$  (qui transforme par exemple un proton de spin  $1/2$  en un antiproton de spin  $-1/2$ ) mais ce n'est pas tout à fait vrai non plus. Il reste le produit  $CPT$ . L'invariance par  $CPT$  est garantie par un théorème démontré en 1954 par Lüders et Pauli à partir d'hypothèses quasiment inattaquables.

### 12.2 Des idées plus surprenantes : isospin, etc.

Les théoriciens des hautes énergies ont introduit bien d'autres symétries, qui leur paraissent indispensables pour simplifier le foisonnement de particules. Mais faut-il parler davantage de particules élémentaires dans une école consacrée à la symétrie dans la matière condensée? Une première raison de le faire est qu'il y a eu, à certaines époques, une forte et fructueuse interaction entre les physiciens des deux bords, et que certains comme Goldstone, Wilson, Anderson, Parisi, Yang, Lee, se sont illustrés dans les deux branches.

Une deuxième raison est que, dans une école sur la symétrie tenue en 2009, il est difficile d'ignorer le prix Nobel de physique 2008, décerné aux Japonais Yoichiro Nambu, Makoto Kobayashi et Toshihide Maskawa pour leurs travaux sur la symétrie dans la physique des particules élémentaires. Les symétries qu'utilisent les théoriciens des particules élémentaires ne s'imposent pas de façon immédiate comme celles qui apparaissent en physique de la matière condensée. Le pionnier en la matière fut Heisenberg, qui vers 1932 suggéra qu'une symétrie existe entre le proton et le neutron... à condition d'ignorer l'interaction électromagnétique, qui est faible à l'échelle du noyau. En ne tenant compte que de l'interaction nucléaire forte, le proton et le neutron peuvent en effet être considérés comme deux états d'une même particule, le nucléon. De même que les deux états d'un ferromagnétique sont distingués par les spins des électrons, on définit une variable analogue au spin, qu'on appelle l'isospin. Comme le spin de l'électron, il a 2 valeurs propres possibles. Le lagrangien de l'interaction forte, telle que Heisenberg la concevait,

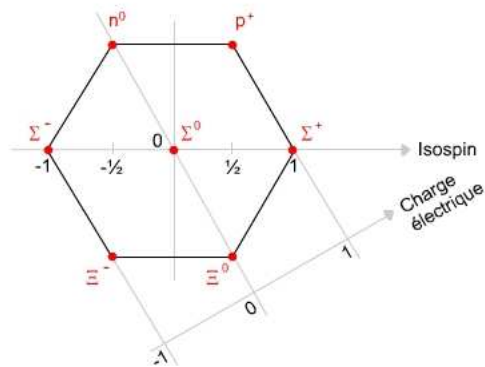


FIG. 3 – Une image de la symétrie entre particules. Si l’isospin, imaginé par Heisenberg, introduisait une symétrie entre le proton et le neutron, on peut compléter (ou compliquer ?) le schéma par l’introduction de particules  $\Sigma$  et  $\Xi$ , qui sont elles aussi des combinaisons de quarks.

devait être invariant par  $SU(2)$ , ce qui mène bien à 2 valeurs propres pour la représentation fondamentale.

### 12.3 Quarks and gluons

Hélas ! La théorie des particules élémentaires évolua. Les protons et neutrons perdirent leur dignité de particules élémentaires et se décomposèrent en 3 quarks. La première théorie des quarks fut élaborée notamment par Gell-Mann dans le troisième quart du vingtième siècle. Elle est décrite avec un tout petit peu plus de détails dans l’appendice E. Les quarks interagissent par échange de gluons comme les électrons interagissent par échange de photons. Les gluons, comme les photons, ont une masse nulle ; comme eux, ils ont une invariance locale vis à vis d’un groupe de jauge, qui n’est toutefois plus le groupe abélien  $U(1)$ , mais  $SU(3)$ . De même que les photons sont les vecteurs de l’interaction électromagnétique, les gluons sont les vecteurs de l’interaction forte entre quarks. De cette interaction entre quarks résulte une interaction forte entre nucléons, qui est un peu à l’interaction entre quarks ce que l’interaction de van der Waals entre atomes est à l’interaction électromagnétique. Les quarks sont au nombre de 6, distingués par 6 ”saveurs”, mais il suffit de 2 saveurs (baptisées up et down,  $u$  et  $d$ ) pour fabriquer un proton de formule  $uud$  et un neutron de formule  $udd$ . On retrouve ainsi les 2 états de Heisenberg et l’invariance par  $SU(2)$ . En ajoutant le quark appelé *strange*, on peut obtenir d’autres particules dont la symétrie est représentée par la figure 3. Plus tard, en 1970, Glashow, Iliopoulos et Maiani ”inventèrent” un quatrième quark ; et comme on le verra, ce n’était pas fini.

### 12.4 Le modèle standard et les interactions faibles

Après avoir décrit les interactions fortes, qui assurent la cohésion des quarks dans les nucléons et celle des nucléons dans le noyau, les théoriciens des particules les englobèrent, avec l’électrodynamique quantique, dans une théorie plus unitaire, appelée modèle standard, et qui inclut aussi les interactions faibles. Le modèle standard est une théorie de jauge, fondée sur un groupe de jauge  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . Le groupe  $SU(3)$  sert, comme on l’a vu, à décrire les interactions fortes. On a vu que  $U(1)$  correspond à l’électromagnétisme. Est-ce à dire alors que  $SU(2)$  décrit les interactions faibles ? C’est plus compliqué, car la symétrie  $SU(2) \times U(1)$  se brise spontanément.

Il n'en reste qu'une symétrie  $U(1)$  distincte de la symétrie  $U(1)$  d'où on est parti, et pourvue de bosons de jauge de masse nulle, qui sont les photons. Mais les bosons de jauge liés à la symétrie  $SU(2)$  ont acquis une masse non nulle. Ce sont les bosons de jauge de l'interaction faible ( $W^+$ ,  $W^-$  et  $Z_0$ ).

On attendrait pourtant de nouveaux bosons de masse nulle, ceux que le théorème de Goldstone associe à une symétrie continue brisée. Or ces bosons ne sont pas observés. Ce paradoxe a été résolu par l'introduction d'un nouveau boson de masse non nulle, appelé boson de Higgs, qui résulte d'une recombinaison du boson qui voudrait être de Goldstone, lequel est ainsi phagocyté et n'apparaît pas. Ce "mécanisme de Higgs" est propre aux symétries de jauge. Dans la compréhension de ce problème, le rôle de Nambu, prix Nobel 2008, fut essentiel. Il fut un précurseur du boson de Goldstone, et fit beaucoup pour la compréhension du mécanisme de Higgs, que nous décrivons un peu plus en détail dans l'appendice F.

Quant au théorème de Goldstone, fabriqué pour la physique des particules élémentaires, il n'y trouve guère d'applications exactes. Comme application approchée on peut citer les pions, qui doivent leur faible masse au fait qu'ils sont approximativement des bosons de Goldstone liés à la violation d'une symétrie approximative par rapport à la chiralité.

## 12.5 Au delà du modèle standard : supersymétrie, etc.

Le modèle standard est probablement correct, en ce sens que toutes ses prédictions sont vérifiées expérimentalement, sauf le boson de Higgs non encore observé. Mais on aimerait avoir un modèle qui prédise davantage. Par exemple, le modèle standard n'explique pas pourquoi la charge du proton est égale à celle de l'électron. Cette interrogation est parmi celle qui ont amené à des théories de grande unification, fondées par exemple sur le groupe  $SU(5)$  ou sur  $SO(10)$ . Le mécanisme de Higgs y fonctionne à répétition et multiplie le nombre des particules élémentaires, que le modèle standard avait réussi à diminuer un peu. Puis on a envisagé une symétrie entre bosons et fermions, bien entendu destinée à être brisée : c'est la supersymétrie. Il restait à trouver une théorie qui englobe la gravitation : les espoirs reposent actuellement sur la théorie des cordes. Elle rompt avec le concept de particules ponctuelles, ce que l'on peut trouver satisfaisant ; il est vrai qu'il faut pour cela passer dans un espace à 10 dimensions. C'est le coeur, disait Pascal, qui sent qu'il y a trois dimensions dans l'espace ; mais le coeur a ses raisons que la raison ne connaît point, ajoutait-il. De toute façon Einstein avait déjà ajouté une dimension !

## 12.6 Matière et antimatière

Disons quelques mots de la symétrie entre matière et antimatière, dont la rupture mystérieuse a justifié le prix Nobel de Makoto Kobayashi et Toshihide Maskawa. Pendant des années, les observateurs ont scruté le ciel à la recherche d'anti-univers. En vain ; jusqu'en 1964 où une expérience sur le kaon révéla une violation des lois de la symétrie. La formation de la matière et de l'antimatière ne se fait pas via un processus équitable. Lors du Big Bang, la matière et l'antimatière créées se sont annihilées. N'est resté que cet excédent de matière. Mais comment expliquer la violation de la symétrie ? C'est Makoto Kobayashi et Toshihide Maskawa qui, en 1972, démontrèrent (en exploitant une idée du romain Nicola Cabibbo) que si la matière n'est pas constituée de quatre quarks - comme on le croyait jusqu'alors - mais de six, alors la violation de la symétrie se fait de façon naturelle. Ils ajoutent ainsi à la liste des quarks existants (up, down, charme, étrange), les quarks bottom et top (aussi appelés vérité et beauté). Le premier fut découvert quelques années plus tard, le second un peu plus tard encore.

Alors que la description des électrons et des photons par l'électrodynamique quantique est une théorie unique et achevée, il n'en est pas de même pour les autres particules. Pour les décrire,



on peut hésiter entre diverses théories dont aucune n'est totalement satisfaisante : les unes parce qu'elles n'expliquent pas tout, les autres parce qu'elles reposent sur des hypothèses difficilement vérifiables. Toutes ces théories font cependant grand usage de la notion de symétrie et de la notion de groupe.

## 13 Conclusion

La symétrie joue un grand rôle en physique. La brisure de symétrie également. Elle s'introduit naturellement dans la théorie des transitions de phase. Moins naturellement dans les théories des particules élémentaires, où elle est en partie le fruit de l'imagination fertile de théoriciens en quête, légitime, d'unification. Nous n'avons pas parlé d'autres domaines comme la mécanique des fluides, où la rupture de symétrie est fréquemment observée. Des exemples sont l'instabilité de Rayleigh-Plateau (fragmentation d'un jet cylindrique sous l'effet de la tension superficielle) ou l'instabilité de Rayleigh-Bénard (formation de rouleaux de convection dans une casserole chauffée par en dessous).

Les groupes de transformations ne sont pas les seules structures de groupe qui apparaissent en physique. Les groupes de permutations sont un autre exemple. La statistique de Bose et la statistique de Fermi associent au groupe des permutations de  $N$  particules identiques deux représentations irréductibles différentes, mais si simples qu'il n'y a pas lieu d'invoquer la théorie des groupes. Il n'en est pas de même si on cherche à découvrir d'autres modèles statistiques que ceux de Bose et de Fermi. Car on en a découvert, mais à 2 dimensions seulement. Selon Wikipedia, le concept d'anyon peut servir pour décrire les couches de graphène ou l'effet Hall quantique, ou pour les ordinateurs quantiques. Il convient aussi de mentionner le "groupe de renormalisation" qui permet un traitement mathématique précis des transitions de phase. C'est bien un ensemble de transformations, mais plus abstraites que celles qui interviennent par exemple en cristallographie ; ces transformations sont plutôt des changements de variables dans un système d'équations. D'autre part le groupe de renormalisation n'est pas vraiment un groupe mais plutôt un semi-groupe, car les transformations ne sont pas inversibles, ou du moins on ne se préoccupe pas de leur trouver un inverse qui n'aurait guère d'intérêt.

Ainsi, la symétrie est une notion partout présente dans la nature. Pour l'exploiter quantitativement, la théorie des groupes est un outil puissant. Elle requiert des recettes qui sont efficaces quand on a appris à bien les manier, mais dont l'apprentissage nécessite de la part de l'étudiant une certaine ténacité.

Ajoutons pour finir que la théorie des groupes est bien plus qu'un livre de recettes : elle éclaire souvent les lois physiques en les reliant à la simple géométrie.

Je remercie chaleureusement Jean Iliopoulos et Pierre Fayet pour des leçons élémentaires sur les particules du même nom, et pour avoir relu le manuscrit. Je suis reconnaissant à Roger Balian, Manuel Houzet et Michail Zhitomirskii pour de précieuses explications.

## A Structure électronique dans un réseau hexagonal plan. Points de Dirac du graphène

Le graphène est du graphite réduit à une couche monoatomique. Sa structure de bande présente une particularité remarquable que nous allons démontrer. Dans l'approximation dite

des "liaisons fortes", le hamiltonien d'un électron est

$$\mathcal{H} = \sum_{ij} \gamma_{ij} c_i^\dagger c_j \quad (19)$$

où  $i$  et  $j$  désignent les sites du réseau qui dans le cas présent est un réseau en nid d'abeilles,  $c_i$  et  $c_i^\dagger$  détruisent et créent un électron au site  $i$ , et les nombres  $\gamma_{ij}$  ont les propriétés de symétrie du réseau. Les énergies des états électroniques sont les valeurs propres de la matrice  $\Gamma$  des  $\gamma_{ij}$ . S'il n'y avait qu'un site par maille, elles seraient obtenues par une transformation de Fourier. Mais le réseau en nid d'abeilles a 2 atomes par maille. Il est fait de 2 réseaux de Bravais plans triangulaires 1 et 2 qui s'interpénètrent. Les composantes  $u^i$  de tout vecteur propre s'écrivent  $u_i = u_1 \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R})$  si  $i$  est le point  $\mathbf{R}$  du réseau 1, et  $u_i = u_2 \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R})$  si  $i$  est le point  $\mathbf{R}$  du réseau 2. Ceci peut s'écrire  $u_{R\alpha} = u_\alpha \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R})$  avec  $i = 1$  ou 2. Les nombres  $u_1$  et  $u_2$  sont vecteurs propres de la matrice

$$\Gamma(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \gamma_{11}(\mathbf{k}) & \gamma_{12}(\mathbf{k}) \\ \gamma_{21}(\mathbf{k}) & \gamma_{22}(\mathbf{k}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11}(\mathbf{k}) & \gamma_{12}(\mathbf{k}) \\ \gamma_{12}^*(\mathbf{k}) & \gamma_{11}(\mathbf{k}) \end{bmatrix} \quad (20)$$

où

$$\gamma_{\alpha\gamma}(\mathbf{k}) = \sum_{R',\gamma} \exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_{R\alpha} - \mathbf{r}_{R'\gamma})]$$

Dans un premier temps, on va se désintéresser du réseau 2. A tout point  $\mathbf{R}$  du réseau 1 (Fig. 4a), on peut associer le scalaire complexe  $\exp[i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}]$ . Mais on peut aussi préférer lui associer le vecteur bidimensionnel réel

$$\mathbf{v}(\mathbf{R}) = [\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}), \sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{R})] \quad (21)$$

qui peut par exemple représenter un spin dans un problème de magnétisme. dont les moments magnétiques seraient localisés aux points  $\mathbf{R}$  d'un réseau triangulaire (Fig. 4a). Il est naturel de se demander s'il existe une structure magnétique qui conserve la symétrie de rotation d'ordre 3. La réponse est oui, comme le montre la Figure 4b. Si  $O$  est le centre de l'un des triangles, la structure 4b est invariante par une rotation du réseau de  $2\pi/3$  autour de  $O$ , accompagnée d'une rotation des vecteurs (spins) de  $2\pi/3$ . Or l'invariance par rotation entraîne que le "champ moléculaire" au point  $O$  est nul, quels que soient les  $\gamma_{ij}$ .

$$\sum_{\mathbf{R}} \gamma_{O\mathbf{R}} \mathbf{v}(\mathbf{R}) = 0 \quad (22)$$

où  $\mathbf{R}$  désigne les sites du réseau 1. Or  $O$  est un site du réseau 2, comme on le voit par la figure 4c. Les composantes des "spins" de la Figure 4b sont les parties réelle et imaginaire de

$$\psi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}) = \exp(i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}) \quad (23)$$

où

$$K_x = \frac{2\pi}{3b} \quad ; \quad K_y = \frac{2\pi}{b\sqrt{3}}, \quad (24)$$

et  $b$  est la distance entre les sites du réseau triangulaire. Soit en fonction de la distance interatomique  $a = b/\sqrt{3}$  du réseau en nid d'abeille,

$$K_x = \frac{2\pi}{3b\sqrt{3}} \quad ; \quad K_y = \frac{2\pi}{3b}, \quad (25)$$

La relation (22) s'écrit donc

$$\gamma_{12}(\mathbf{K}) = 0 \quad (26)$$

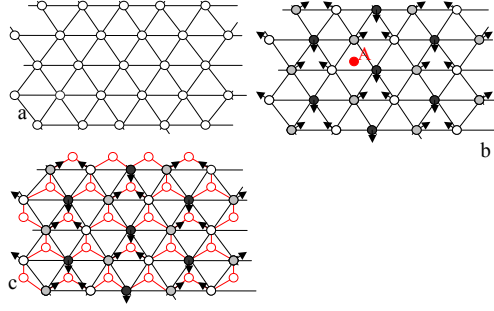


FIG. 4 – a) Un réseau triangulaire plan. b) Une structure magnétique qui conserve la symétrie de rotation d'ordre 3. c) En ajoutant un autre réseau triangulaire on obtient un réseau en nid d'abeille. En tout site du second réseau, le champ moléculaire dû au premier réseau est nul.

La matrice  $\Gamma(\mathbf{K})$  est donc dégénérée, avec ses 2 valeurs propres égales. Revenant au problème électronique, on voit qu'il existe un état électronique doublement dégénéré, quelle que soit la portée des  $\gamma_{ij}$ . C'est en fait une très bonne approximation de supposer (comme on le fait généralement) que  $\gamma_{ij}$  n'est non nul que pour des sites  $i$  et  $j$  voisins (appartenant donc l'un au réseau 1, l'autre au réseau 2). Dans ce cas on peut montrer que si  $\mathbf{k}$  n'est pas égal à  $\mathbf{K}$ , l'un des états électroniques a une énergie  $\epsilon^-(\mathbf{k}) < \epsilon(\mathbf{K})$  alors que l'autre énergie est  $\epsilon^+(\mathbf{k}) > \epsilon(\mathbf{K})$ . Comme dans le graphène pur il y a exactement un électron par site, on a donc à température nulle une bande pleine et une bande vide qui se touchent en un nombre discret de points de l'espace réciproque, avec un gap nul. Ces points sont appelés points de Dirac.

## B Recette pour obtenir les vecteurs propres d'une matrice qui appartient à une représentation irréductible particulière

Nous voulons diagonaliser une matrice carrée  $M$  (à  $n \times n$  éléments). Cette matrice agit sur des matrices colonnes ou vecteurs à  $n$  éléments que nous noterons  $|\varphi\rangle$  et qui constituent un espace vectoriel  $\mathcal{E}$ . Par hypothèse,  $M$  est invariante par les opérations  $g$  d'un groupe  $G$ . Ceci veut dire que  $O(g)MO(g)^{-1} = M$ , où  $O(g)$  est une matrice qui décrit l'action de  $g$  sur les vecteurs  $|\varphi\rangle$ . Les matrices  $O(g)$  forment une représentation de  $G$ , que nous supposons réductible. Si elle ne l'est pas, la théorie des groupes ne peut apporter aucune aide.

Le groupe  $G$  admet des représentations irréductibles par des matrices  $\mathcal{D}^{(p)}(g)$  de dimensions  $d_p$ , dont les éléments sont  $\mathcal{D}_{\lambda\mu}^{(p)}(g)$ .

On démontre que les matrices  $\mathcal{D}^{(p)}(g)$  vérifient alors la propriété d'orthogonalité (Streitwolf 1971, Canals 2009)<sup>7</sup>

$$\sum_g \mathcal{D}_{\lambda\mu}^{(p)}(g) \mathcal{D}_{\lambda'\mu'}^{(p')}(g) = (n/d_p) \delta_{pp'} \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'} \quad (27)$$

On dit qu'un vecteur  $|e_\lambda\rangle$  de  $\mathcal{E}$  appartient à la représentation irréductible  $p$  si

<sup>7</sup>Sacrifiant la rigueur pour la simplicité, nous omettons certains détails importants. Notamment, les matrices  $\mathcal{D}^{(p)}(g)$  sont supposées unitaires. Cela est possible parce que toute représentation est équivalente à une représentation par des matrices unitaires (Streitwolf 1971, Canals 2009).

$$O(g) | e_\lambda \rangle = \sum_{\mu} \mathcal{D}_{\lambda\mu}^{(p)}(g) | e_\mu \rangle \quad (28)$$

D'après le théorème du développement (expansion theorem, Streitwolf 1971) tout vecteur  $|\varphi\rangle$  peut s'écrire comme une somme de composantes dont chacune appartient à une représentation irréductible  $p$ .

$$|\varphi\rangle = \sum_p \sum_{\lambda} \sum_{\alpha} \left| e_{\lambda\alpha}^{(p)} \right\rangle \quad (29)$$

où  $1 \leq \lambda \leq d_p$ ,  $p$  désigne les diverses représentations irréductibles, et on a introduit un indice supplémentaire  $\alpha$  qui prend les valeurs entières jusqu'à une valeur  $q_p$  qui dépend de la matrice  $M$ , et peut être nul pour certaines valeurs de  $p$ . Il existe une recette pour déterminer  $q_p$  (Streitwolf 1971, Canals 2009), mais nous ne l'utiliserons pas. Les vecteurs  $\left| e_{\lambda\alpha}^{(p)} \right\rangle$  seront supposés orthonormés. Si ces vecteurs étaient pris comme vecteurs de base, la matrice  $M$  aurait la forme diagonale par blocs (6). Le problème est que les vecteurs  $\left| e_{\lambda\alpha}^{(p)} \right\rangle$  ne sont pas connus. On va voir comment on peut quand même mettre la matrice  $M$  sous la forme diagonale par blocs.

Pour chaque vecteur  $|\varphi\rangle$  nous voulons déterminer chaque terme de la somme (29). En faisant cela pour  $n$  vecteurs  $|\varphi\rangle$  indépendants, nous obtiendrons, pour chaque  $p$ , des vecteurs qui sont des combinaisons linéaires des  $\left| e_{\lambda\alpha}^{(p)} \right\rangle$ . Leur orthogonalisation fournit  $d_p q_p$  vecteurs indépendants qui sous-tendent un espace  $\mathcal{E}_p$ . En faisant cela pour toutes les valeurs de  $p$ , on obtient une base dans laquelle la matrice  $M$  est diagonale par blocs.

Après avoir énoncé le principe de la méthode, donnons la recette. Si on multiplie (29) par  $[\mathcal{D}_{\lambda\mu}^{(p)}]^*(g)O(g)$  et si on somme sur  $g$ , on trouve en utilisant (27) et (28)

$$\sum_g [\mathcal{D}_{\lambda\mu}^{(p)}]^*(g)O(g) |\varphi\rangle = (n/d_p) \sum_{\alpha} \varphi_{\lambda\alpha}^{(p)} \left| e_{\mu\alpha}^{(p)} \right\rangle \quad (30)$$

Si maintenant on fait  $\lambda = \mu$  et qu'on somme sur  $\lambda$ , le second membre se réduit à un facteur près à la projection de (29) sur l'espace  $\mathcal{E}_p$  :

$$\sum_g \sum_{\lambda} [\mathcal{D}_{\lambda\mu}^{(p)}]^*(g)O(g) |\varphi\rangle = n P_p |\varphi\rangle \quad (31)$$

où

$$P_p = (1/n) \sum_g \sum_{\lambda} [\mathcal{D}_{\lambda\mu}^{(p)}]^*(g)O(g) \quad (32)$$

est l'opérateur de projection sur  $\mathcal{E}_p$ . Il n'y a plus qu'à achever le programme en faisant agir  $P_p$  sur  $n$  vecteurs indépendants, orthogonaliser les vecteurs obtenus, et répéter l'opération pour toutes les représentations irréductibles  $p$ . Dans la base ainsi obtenue, la matrice  $M$  est diagonale par blocs.

## C Représentations spinorielles du groupe de Lorentz et spineurs de Dirac

*Représentation spinorielle bidimensionnelle irréductible du groupe de Lorentz*

Pour l'obtenir, il convient d'associer à tout quadrivecteur  $\mathbf{x} = (ct, x, y, z)$  la matrice bidimensionnelle hermitique

$$X = \begin{bmatrix} ct + z & x + iy \\ x - iy & ct - z \end{bmatrix} = t + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z \quad (33)$$

On voit que  $\det X = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$  est la norme de Minkowski de  $\mathbf{x}$ . Elle doit être conservée dans une transformation de Lorentz.

Nous allons montrer que les matrices  $2 \times 2$  complexes  $B$  de déterminant 1 permettent d'obtenir une représentation spinorielle du groupe de Lorentz. Dans ce but, nous considérons la matrice.

$$X' = BXB^+ \quad (34)$$

où  $B^+$  désigne la matrice hermitique conjuguée de  $B$ . La matrice  $X'$  est hermitique et son déterminant est égal à  $\det X$ . Il définit donc un quadrivecteur  $\mathbf{x}'$  par la formule (33). Celle-ci est donc une transformation de Lorentz.

Par exemple une translation uniforme dans la direction  $z$  correspond à  $B = \exp(-\varphi\sigma_z/2)$ . En effet, en utilisant les propriétés d'anticommutation des matrices de Pauli, on voit que

$$\begin{aligned} BXB^+ &= BXB = \exp(-\varphi\sigma_z/2)(ct + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z)\exp(-\varphi\sigma_z/2) \\ &= (ct + z\sigma_z)\exp(-\varphi\sigma_z) + (x\sigma_x + y\sigma_y) \end{aligned}$$

Ceci est la transformation de Lorentz (1), qui correspond à une translation uniforme dans la direction  $z$ , à vitesse uniforme  $v = \beta c$  avec  $\sinh \varphi = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ .

Un calcul analogue montre qu'une rotation des axes  $x$  et  $y$  d'angle  $\varphi$  autour de l'axe  $z$  correspond à  $B = \exp(-i\varphi\sigma_z/2)$  comme dans le cas non relativiste.

Les règles sont analogues pour les rotations autour de  $x$  and  $y$  et les translations uniformes le long de  $x$  et  $y$ . Ceci montre que toute transformation de Lorentz correspond à une matrice  $B$  ... ou plutôt à deux matrices puisque  $B$  peut être remplacée par  $-B$  dans (34).

Ainsi, dans la représentation spinorielle du groupe de Lorentz que nous venons de définir, l'opérateur  $\sigma_\alpha$  décrit à la fois une rotation infinitésimale autour de l'axe  $\alpha$  et une translation le long de cet axe, la seule différence étant le facteur  $i$ . Comme ces deux opérations sont physiquement très différentes, la représentation spinorielle bidimensionnelle est peu appropriée à une description quantique relativiste.

*Représentation de Dirac du groupe de Lorentz.*

Si des matrices  $B(g)$  forment une représentation d'un groupe non commutatif  $G$  dont les éléments sont  $g$ , les matrices hermitiques conjuguées  $B^+(g)$  ne forment généralement pas une représentation, car  $B^+(g)B^+(g') = B^+(g'g)$  est généralement différent de  $B^+(gg')$ . Par contre les matrices  $[B^+(g)]^{-1}$  forment bien une représentation. Si  $G$  est le groupe de Lorentz et  $B(g)$  sont les matrices définies précédemment, ces deux représentations ne sont pas équivalentes. En effet, l'équivalence de deux représentations  $B$  et  $B'$  implique  $B'(g) = UB(g)U^{-1}$  et par suite  $\text{Tr } B = \text{Tr } B'$ . Cette relation n'est pas vérifiée, par exemple pour une matrice diagonale,  $B'_{11} + B'_{22} = (B^*_{11} + B^*_{22})/(B_{11}B_{22})^* = B^*_{11} + B^*_{22}$  n'est généralement pas égal à  $B_{11} + B_{22}$ .

La représentation de Dirac associée à toute transformation de Lorentz  $g$  la matrice  $4 \times 4$

$$\begin{bmatrix} B(g) & 0 \\ 0 & [B^+(g)]^{-1} \end{bmatrix} \quad (35)$$

Cette représentation réductible opère sur un espace de spineurs à 4 dimensions et la fonction d'onde qui obéit à l'équation de Dirac est un élément de cet espace. Elle est formée de 2 spineurs à 2 dimensions, dont l'un se transforme par  $B$ , l'autre par  $(B^+)^{-1}$  quand on fait une transformation de Lorentz.

## D Invariance de jauge en électrodynamique

Nous nous limiterons au cas d'un électron en interaction avec le champ électromagnétique. L'électron (de masse  $m$  et de charge  $q = -e$ ) est représenté par une fonction d'onde à 4 composantes (celle de l'équation de Dirac) et le champ électromagnétique par le potentiel vecteur à 4 composantes  $A_\mu$ . Jauch & Rohrlich (1955) écrivent la fonction suivante qu'ils appellent "lagrangien" (mais qui pour d'autres auteurs est la densité de lagrangien) :

$$\mathcal{L} = -(1/2)\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \bar{\Psi}(\gamma_\mu \partial^\mu + m)\Psi - ie\bar{\Psi}\gamma_\mu A^\mu \Psi \quad (36)$$

où  $\gamma_\mu$  désigne les 4 matrices  $4 \times 4$  définies plus haut et la sommation sur les indices est sous-entendue (convention d'Einstein).

Le lagrangien (A1) permet de définir l'action  $S = \int \mathcal{L} d^4x$ , où l'intégrale est sur le domaine compris entre 2 hyperplans de l'espace-temps relativiste. Testa (1993) remarque que l'action (36) est invariante par la transformation (18) combinée à la transformation de la fonction d'onde électronique  $\Psi(\mathbf{x})$  en

$$\Psi'(\mathbf{x}) = \exp[i\Lambda(\mathbf{x})]\Psi(\mathbf{x}) \quad (37)$$

L'équation de Dirac n'est pas facile à généraliser à plus d'un électron. Il est donc intéressant de démontrer (37) à partir de l'équation non relativiste de Schrödinger. Cela est fait par Cohen-Tannoudji et al. (1987), pages 169 et 170.

## E Un formalisme pour les interactions fortes

Pour voir à quoi ressemblent les équations des particules élémentaires en évitant des complications excessives, nous nous bornerons aux interactions nucléaires fortes, décrites par la chromodynamique quantique. Ce formalisme reposait sur un lagrangien que nous écrirons d'une part pour mesurer l'analogie et la différence avec l'électrodynamique quantique de l'appendice D, d'autre part pour compter les variables et les paramètres dont il dépend :

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\Psi}_{ip}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_p)\Psi_{ip} - gG_\mu^a \bar{\Psi}_{ip}\gamma^\mu T_{ij}^a \Psi_{jp} - (1/4)G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \quad (38)$$

Dans cette formule, les spineurs à 4 composantes  $\Psi_{ip}$  désignent les champs de quarks ; l'indice  $p=1,2,\dots, 6$  correspond à la "saveur", et l'indice  $i=1, 2$  ou  $3$  correspond à la "couleur". Le champ  $G$  est celui des "gluons". Comme les photons, les gluons sont de masse nulle. Les quantités  $T_{ij}^a$  sont données par la théorie des groupes (matrices de Gell-Mann). La constante de couplage  $g$  est un paramètre, qui s'ajoute aux 6 masses. Au total il y a 7 paramètres. Que devient la symétrie dans tout ça ? On pourrait perdre espoir en sachant que les masses des 6 quarks sont différentes. Toutefois, celles des quarks  $u$  et  $d$  sont de l'ordre du MeV (à un facteur  $c^2$  près), c'est-à-dire faibles par rapport aux masses des nucléons qu'ils composent, lesquelles sont de l'ordre du GeV. Il n'y a donc pas là de quoi détériorer outre mesure la symétrie entre proton et neutron (en ignorant, bien entendu, l'électromagnétisme). Les choses se gâtent quand on s'intéresse aux autres quarks qui sont nettement plus lourds, de quelques centaines de MeV à quelques centaines de GeV.

## F Interactions à longue portée et mécanisme de Higgs

On peut se demander ce que devient une onde sonore dans un gaz quand les particules deviennent chargées. L'onde en question a une fréquence non nulle pour  $q = 0$  ; ce n'est plus en fait une onde sonore... C'est un plasmon, et le gaz chargé est un plasma. Esquissons la démonstration. L'équation du mouvement est  $d^2u_q/dt^2 = -V_q q^2 u_q$ , où  $u_q$  est la transformée de

Fourier du déplacement et  $V_q$  est la transformée de Fourier du potentiel. Pour des interactions à courte portée,  $V_q$  est fini pour  $q=0$ , et la fréquence  $\omega_q$  est proportionnelle à  $q$ . Pour des interactions coulombiennes,  $V_q$  est proportionnel à  $1/q^2$  et la fréquence de plasma est non nulle pour  $q=0$ . Cette remarque constituait le début d'un article qu'Anderson publia en 1963. L'auteur considérait aussi le cas analogue de la supraconductivité. Le mode de Goldstone serait alors une oscillation de courant,  $j(x, t) = j_0 \cos(qx - \omega t)$ . Mais une telle oscillation dans l'espace impliquerait des amas de charge, dont l'énergie serait finie à cause de la longue portée de l'interaction coulombienne. Le mode de Goldstone de la supraconductivité n'annule pas sa fréquence pour  $q = 0$ . Dans le langage des hautes énergies, il est "massif" ; ce n'est plus en fait un mode de Goldstone.

Avec une grande perspicacité, Anderson voyait une analogie entre l'absence expérimentale de mode de fréquence nulle dans un plasma, et l'absence de mode de Goldstone dans des problèmes de physique des particules élémentaires où il était, à l'époque, attendu, malgré des réflexions antérieures de Schwinger, qui avait déjà pressenti la solution, c'est-à-dire le boson de Higgs.

## Références

- [1] M. Amara (2009) École sur la symétrie en Physique de la matière condensée. A paraître au Journal de Physique 4.
- [2] P.W. Anderson, Phys. Rev. **130** (1963) 439.
- [3] M. I. Aroyo (2009) École sur la symétrie en Physique de la matière condensée. A paraître au Journal de Physique 4.
- [4] F. Axel, S. Aubry (1981) J. Phys. C : Solid State Phys. **14** 5433
- [5] E.F. Bertaut (1971) Journal de Physique Colloque C1, 32, 462
- [6] F. Bourée (2009) École sur la symétrie en Physique de la matière condensée. A paraître au Journal de Physique 4.
- [7] R. Brout, F. Englert (2007) C. R. Physique **8**, 973
- [8] N. Byers (1996) <http://fr.arxiv.org/abs/physics/9807044>
- [9] B. Canals (2009) École sur la symétrie en Physique de la matière condensée. A paraître au Journal de Physique 4.
- [10] E. Cartan (1913) Bull. Soc. Math. France **41**, 56.
- [11] E. Cartan (1938) Leçons sur la théorie des spineurs. Paris, H. Hermann.
- [12] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg (1987) Photons et atomes (EDP Sciences, CNRS editions, Les Ulis).
- [13] A. Comtet (2005) *L'équation de Dirac* Lecture at the Université Pierre et Marie Curie. <http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00092970/fr/>
- [14] P. Curie, Bulletin de la Société minéralogique de France **7**, 418 (1884) et *Oeuvres de Pierre Curie*, available through Gallica (<http://gallica.bnf.fr/>)p. 79

- [15] G. Eckold (2009) École sur la symétrie en Physique de la matière condensée. A paraître au Journal de Physique 4.
- [16] F. Englert, R. Brout, Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 321.
- [17] S. L. Glashow, J. Iliopoulos, L. Maiani (1970) Phys. Rev. D **2**, 1285.
- [18] J. Goldstone, Nuovo Cimento **19** (1961) 154.
- [19] J. Goldstone, A. Salam, S. Weinberg, Phys. Rev. **127** (1962) 965.
- [20] B. Grenier (2009). École sur la symétrie en Physique de la matière condensée. A paraître au Journal de Physique 4.
- [21] M. Hamermesh (1962) Group theory and its application to physical problems (Dover)
- [22] P.W. Higgs, Phys. Lett. **12** (1964) 132.
- [23] P.W. Higgs, Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 508.
- [24] P. Higgs (2007) C. R. Physique **8**, 970
- [25] M. Houzet (2009) École sur la symétrie en Physique de la matière condensée. A paraître au Journal de Physique 4.
- [26] J.M. Jauch, F. Rohrlich (1955) The theory of photons and electrons (Addison-Wesley, Cambridge, U.S.A.) P.H.E. Meijer, E. Bauer (2004) Group Theory : The Application To Quantum Mechanics (Dover).
- [27] H. Kleinert (1989) *Gauge fields in condensed matter* (World scientific, Singapore).
- [28] J. Kreisel (2009) École sur la symétrie en Physique de la matière condensée. A paraître au Journal de Physique 4.
- [29] Monroe, Don, , New Scientist, 1 October 2008
- [30] E. Noether, *Invariante Variationsprobleme*, Nachr. d. König. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse (1918), 235-257; English translation M. A. Trépanier, Transport Theory and Statistical Physics **1**(3) 1971,183-207.
- [31] J. Rodriguez-Carvajal (2009). This school.
- [32] J. Schweizer (2005) C.R. Physique **6**, 375 and Corrigendum (2006) C.R. Physique **7**, 823
- [33] J. Schweizer, J. Villain, A.B. Harris (2007) Eur. Phys. J. Appl. Phys. **38**, 41
- [34] J. Schweizer (2009). École sur la symétrie en Physique de la matière condensée. A paraître au Journal de Physique 4.
- [35] H.W. Streitwolf (1971) Group theory in solid-state physics (Macdonalds, London).
- [36] M. Testa (1993) Articles 'gauge, théorie de' and 'spinore' in Enciclopedia delle Scienze fisiche, tome 2, p. 842 (Rome)
- [37] P. Toledano (2009) École sur la symétrie en Physique de la matière condensée. A paraître au Journal de Physique 4.
- [38] J. Villain, M. Gordon (1980) J. Phys. C : Solid State Phys. **13** 3117
- [39] F. Wilczek (1982) Phys. Rev. Lett. **49**, 957
- [40] B. Wunsch, F. Guinea, F. Sols, New Journal of Physics **10** (2008) 103027
- [41] H. Yukawa (1949) Nobel lecture. <http://nobelprize.org/>